

УДК 519.854.2

*В.О. Васянін, О.М. Трофимчук, Л.П. Ушакова*

## ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ КІЛЬЦЕВИХ МАРШРУТІВ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ У БАГАТОПРОДУКТОВІЙ ІЄРАРХІЧНІЙ МЕРЕЖІ

### **Васянін Володимир Олександрович**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,  
м. Київ,  
*archukr@meta.ua*

### **Трофимчук Олександр Миколайович**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,  
м. Київ,  
*itgis@nas.gov.ua*

### **Ушакова Людмила Павлівна**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН  
України, м. Київ,  
*archukr@meta.ua*

Формуються математичні моделі задач побудови кільцевих маршрутів транспортних засобів у багатопродуктовій ієрархічній мережі. Як правило, такі мережі складаються з децентралізованої магістральної мережі та мереж у внутрішніх зонах обслуговування магістральних вузлів (внутрішніх мереж). У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися продуктами (товарами, вантажами) з іншими вузлами. У зарубіжній літературі задачі проектування таких мереж називають задачами багатоступінчастого (багатошарового, багаторівневого) розміщення та маршрутизації (Multi-Echelon Location-Routing Problem — ME LRP). У багатоступінчастих LRP є кілька посередників між магістральними вузлами (центральними первинними об'єктами) і вузлами у внутрішніх зонах магістральних вузлів (кінцевими споживачами, клієнтами), а продукт, що розподіляється з магістральних вузлів, проходить через два або більше другорядних посередників у мережі (сателітів) до кінцевого споживача. У класичній LRP об'єднані для спільного розв'язання дві задачі — задача визначення розташування вторинних об'єктів (сателітів або депо) та магістральних маршрутів транспортних засобів та задача побудови кільцевих маршрутів внутрішніх транспортних засобів для обслуговування клієнтів з відомим попитом на однорідний взаємозамінний продукт. На відміну від задач розподілу однорід-

ного взаємозамінного продукту, у багатопродуктових задачах LRP (Multi-Commodity Location-Routing Problem — MC LRP) потоки продуктів не взаємозамінні, потік кожного продукту має бути доставлений з певного первинного об'єкта до конкретного клієнта. Передбачається, що багаторівнева структура транспортної мережі визначена і відомі географічне розташування магістральних вузлів та його внутрішні зони обслуговування з множиною вузлів доставки і збору вантажів (клієнтів). Тому задачі визначення магістральних маршрутів транспортних засобів та побудови кільцевих маршрутів внутрішніх транспортних засобів розглядаються незалежно одна від одної. Обговорюються види витрат реальних транспортних процесів, які мають враховуватися при формуванні цільової функції задач маршрутизації та запропоновані математичні моделі задач побудови комбінованих та розділених кільцевих маршрутів із неоднорідним парком транспортних засобів. Зазначається можливість розв'язання сформульованих задач за допомогою відомих пакетів змішаного та цілочисельного лінійного програмування.

**Ключові слова:** багатопродуктові ієрархічні мережі, задачі комбінаторної оптимізації, математичні моделі кільцевих маршрутів транспортних засобів.

### Вступ

Як правило, існуючі та спроектовані транспортні мережі мають ієрархічну структуру і складаються з децентралізованої магістральної мережі та мереж у внутрішніх зонах обслуговування магістральних вузлів (внутрішніх мереж). У зарубіжній літературі завдання проектування таких мереж, розподілу та маршрутизації потоків у них називають завданнями багатоступінчастого (багато-ешелонного, багаторівневого) розміщення та маршрутизації (Multi-Echelon Location-Routing Problem — ME LRP). У багатоступінчастих LRP є кілька посередників між магістральними вузлами (центральними первинними об'єктами) та вузлами у внутрішніх зонах магістральних вузлів (кінцевими споживачами, клієнтами). Замість того, щоб обслуговуватися безпосередньо з центрального об'єкта в багатоступінчастій LRP розподільний продукт (товар, вантаж) проходить через два або більше другорядних посередників у мережі (які називаються сателітами) до виходу на кінцевого споживача. У класичній двоступінчастій LRP (2E-LRP) маршрути магістральних транспортних засобів обмежені одним рівнем (ешелоном). Маршрути транспортних засобів другого рівня починаються та закінчуються на другорядному об'єкті та проходять кілька кінцевих споживачів (клієнтів). Зазвичай у таких мережах жоден транспортний засіб не проходить всі первинні, другорядні та клієнтські вузли.

У класичній LRP об'єднані для спільного розв'язання дві задачі: задача визначення розташування вторинних об'єктів (сателітів або депо) та магістральних маршрутів транспортних засобів і задача побудови кільцевих маршрутів внутрішніх транспортних засобів для обслуговування клієнтів з відомим попитом на однорідний взаємозамінний продукт. При цьому в цільовій функції задачі на мінімум враховуються капітальні витрати на відкриття вторинних об'єктів, фіксована вартість потрібного парку магістральних та внутрішніх транспортних засобів, витрати на навантаження та вивантаження вантажів та змінні експлуатаційні витрати на транспортування вантажів на маршрутах першого та другого рівнів (змінна вартість маршрутів). Огляд сімейства задач LRP і методів їх вирішення можна знайти в [1–10].

На відміну від задач розподілу однорідного взаємозамінного продукту, багатопродуктові задачі LRP (Multi-Commodity Location-Routing Problem — MC LRP)

вивчалися менш інтенсивно. Особливістю цих задач є незв'язаність потоків продуктів від відправника до одержувача — потік кожного продукту має бути доставлений з певного первинного об'єкта до конкретного клієнта. Огляд задач MC LRP та методів їх вирішення з низкою додаткових обмежень на пропускні можливості вузлів мережі, вантажопідйомність транспортних засобів, часові вікна доставки продуктів та інші наведено в [11–17].

### Ієрархічна структура транспортної мережі

Передбачається, що багаторівнева структура багатопродуктової транспортної мережі визначена і відомі географічне розташування магістральних вузлів та їх внутрішні зони обслуговування з множиною вузлів доставки та збору вантажів (клієнтів). Кожен вузол у мережі має назву, унікальний індекс та порядковий номер. Кожному вузлу можна поставити у взаємно-однозначну відповідність множину індексів (номерів) інших вузлів, що кореспондуються з ним у магістральній та внутрішній мережах. У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися кореспонденціями (продуктами, товарами, вантажами) з усіма іншими вузлами. Кореспонденція характеризується вузлом-джерелом, вузлом-стоком та величиною, яка для транспортних мереж задається кількістю тарно-штучних вантажів в упаковці уніфікованого розміру.

У магістральній мережі всі кореспонденції транспортуються у магістральних транспортних засобах у транспортних блоках заданого розміру (ємності, обсягу). Розмір транспортного блоку вимірюється кількістю одиниць кореспонденцій, що вміщуються в нього (наприклад, 40 тарно-штучних вантажів). Усі магістральні вузли є сортувальними центрами, в яких кореспонденції спочатку сортуються за адресами (вузлами) призначення, а потім пакуються як збірні вантажі в транспортні блоки. Оскільки величина окремих кореспонденцій значно менша за розмір транспортного блоку, вони при сортуванні можуть кілька разів і в різних вузлах об'єднуватися (упаковуватися) з кореспонденціями, що мають інші адреси призначення. При такому об'єднанні кореспонденцій у вузлах мережі зменшується кількість напрямків їх сортування та кількість транспортних блоків, необхідних для їхнього пакування, але в окремих вузлах з'являються додаткові обсяги сортування кореспонденцій, що не досягли адреси призначення. Крім того, збільшується час доставки одержувачу кореспонденцій, які проходять додаткове сортування в транзитних вузлах прямування.

У внутрішній зоні кожного магістрального вузла знаходяться вузли доставки та збору кореспонденцій (клієнти), які можуть обмінюватися кореспонденціями між собою та з іншими вузлами ієрархічної мережі тільки через цей магістральний вузол. Транспортування кореспонденцій у внутрішній мережі виконується за кільцевими маршрутами внутрішніми транспортними засобами.

На рис. 1 показані фрагменти трьохрівневої мережі, де  $i, j, k$  — магістральні вузли зі своїми магістральними зонами обслуговування (ЗОВ),  $m$  — вузли доставки та збору кореспонденцій у внутрішній зоні обслуговування кожного магістрального вузла (внутрішні мережі).

Магістральні вузли різного типу відрізняються між собою функціональними можливостями, рівнем технічної оснащеності, числом обслуговуючого персоналу та ін. Деякі з них можуть сортувати потоки до всіх магістральних вузлів, інші — тільки до магістральних вузлів у зоні свого обслуговування. В окремих магістральних вузлах може бути заборонено сортування транзитних потоків кореспонденцій та обробка транзитних потоків транспортних блоків. У вузлах доставки та збору кореспонденцій потоки не сортуються, а безпосередньо відправляються у відповідний магістральний вузол.

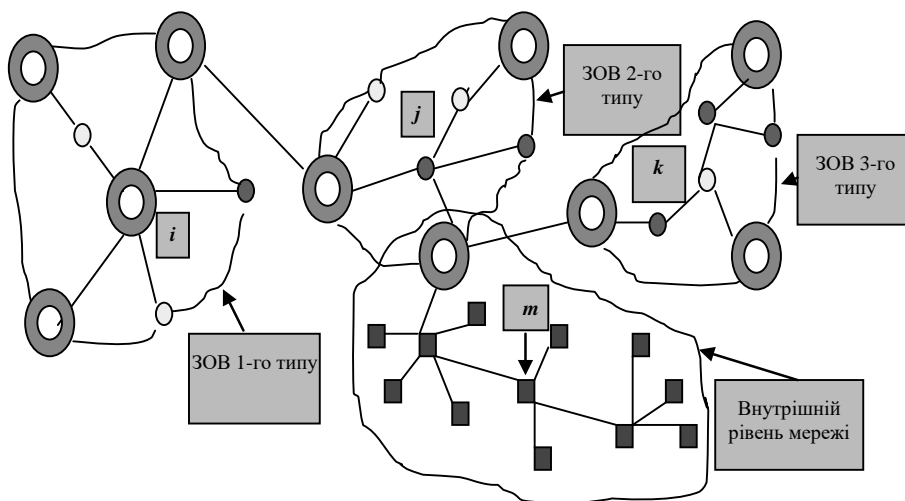


Рис. 1

У [18] розглядається узагальнена задача упаковки та розподілу потоків кореспонденцій в ієрархічній мережі, вирішення якої здійснюється в кілька етапів. На першому етапі вирішується задача вибору ієрархічної структури магістральної мережі та схеми сортування кореспонденцій у вузлах мережі та пакування їх у транспортні блоки [19, 20]. На другому етапі постає задача розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків зі збірними кореспонденціями, сформованими при вирішенні першої задачі [21]. Під збірними кореспонденціями розуміються об'єднані в один транспортний блок тарно-штучні вантажі з різними адресами призначення, які можуть не збігатися з адресою призначення транспортного блоку. Збірні вантажі утворюються для максимального скорочення кількості транспортних блоків та транспортних засобів, необхідних для їх упаковки та транспортування у магістральній мережі.

У внутрішніх зонах магістральних вузлів виникає задача побудови раціональних кільцевих маршрутів транспортних засобів із центральним магістральним вузлом. На рис. 2 проілюстровані фрагменти внутрішньо вузлової мережі, схематично показані циркулюючі потоки та приклад кільцевих маршрутів, де: а) внутрішньо вузлова мережа з центральним магістральним вузлом та депо, місця дислокації клієнтів зафарбовані чорним кольором, а дорожні вузли — сірим, ділянки доріг показані лініями; б) вхідні та вихідні магістральні потоки (широка стрілка) та внутрішньо вузлові потоки до клієнтів та від клієнтів (проста стрілка); в) два кільцеві маршрути транспортних засобів.

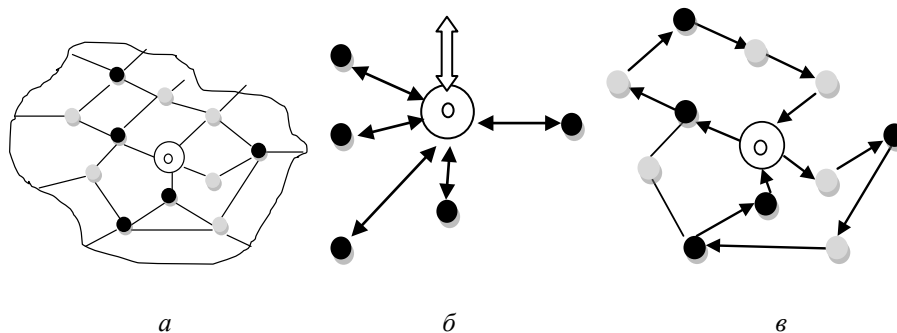


Рис. 2

У [22] для транспортування вантажів у внутрішній мережі запропоновані математичні постановки задач побудови окремих маршрутів доставки та збору вантажів, але на практиці може виявитися, що комбіновані маршрути, коли у внутрішніх вузлах дозволена одночасна доставка та збір вантажів, економічно вигідніші. Крім того, якщо дозволити і розділену (розщеплену) доставку та збір, коли допускається дроблення потоків вантажів і кожен клієнт може відвідуватися декількома транспортними засобами, то економія транспортних витрат може бути ще значнішою. У цьому випадку привабливим є те, що запити клієнтів можуть перевищувати вантажопідйомність транспортних засобів і при коливанні величини потоків на певних проміжках часу не доведеться купувати або орендувати додаткові транспортні засоби.

Запропоновано математичні моделі задач побудови комбінованих та розділених маршрутів, обговорюються види витрат, які мають бути включені до цільових функцій запропонованих моделей.

### **Змістова постановка задачі та функції витрат**

Розглянемо питання, пов'язані з методикою розрахунку наведених витрат під час вирішення завдання маршрутизації внутрішньо вузлових перевезень. Мета вирішення такого завдання — визначення загальної кількості та складу парку транспортних засобів за типами та вантажопідйомністю, необхідних для виконання всіх перевезень у внутрішній зоні магістрального вузла при мінімізації капітальних витрат на придбання транспортних засобів та експлуатаційних витрат на транспортування вантажів. При розв'язанні задачі потрібно визначити робочий парк неоднорідних транспортних засобів (гетерогенний робочий парк) та знайти схему розподілу потоків вантажів та маршрутизації транспортних засобів у внутрішньо вузловій мережі перевезень. У зарубіжній літературі ці завдання прийнято називати Fleet Size and Mix Vehicle Routing (FSMVRP) та Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem (HFVRP), залежно від обмежень на кількість транспортних засобів кожного типу.

Для транспортних підприємств (компаній) ключовими факторами при розрахунку витрат є очікувані обсяги перевезень, ціни на транспортні засоби та собівартість перевезень. Транспортні засоби з більшою вантажопідйомністю зазвичай мають більш низьку собівартість перевезення одиниці вантажу, ніж транспортні засоби з меншою вантажопідйомністю, за умови, що коефіцієнт завантаження транспортного засобу досить високий. Слід враховувати і те, що для вживаних транспортних засобів витрати на амортизацію нижчі, а витрати на утримання вищі, ніж у нових. Обсяги перевезень і ціни на транспортні засоби змінюються у часі, тому у транспортних підприємствах виникає і задача управління розміром робочого парку не тільки на періоди поточного планування, а й на перспективу. Надмірно великий парк при зниженні попиту на перевезення змушує продавати або здавати в оренду надлишок транспортних засобів, збільшення попиту призводить до необхідності придбання нових транспортних засобів або їхньої оренди. У будь-якому разі при плануванні перевезень очікувані доходи повинні бути більшими за очікувані витрати. Регулювання розміру робочого парку, яке залежить від наведених та інших випадкових чинників, має здійснюватися під час вирішення динамічних стохастичних задач довгострокового планування, математичні моделі яких більш агреговані, ніж у задач поточного планування. Відповідно в цьому випадку використовуються і більш агреговані функції наведених витрат.

У математичних моделях поточного (тактичного) планування, зазвичай, розглядаються усереднені потоки і ціни для заданих періодів часу протягом

року, які розраховуються статистичними методами. Невизначеність у цьому разі зменшується, і задача маршрутизації має розглядатися на більш детальному рівні з урахуванням всіх значимих факторів. Як і при довгостроковому плануванні, в умовах коливання попиту, основні рішення пов'язані з придбанням та орендою транспортних засобів або з продажем та здаванням у оренду наявних надлишків. Однак при прийнятті тактичних рішень слід приділяти більше уваги коригуванню вантажопідйомності транспортних засобів. Тому під час вирішення задач маршрутизації на середньострокові періоди створюються резерви вантажопідйомності транспортних засобів на усіх маршрутах транспортування вантажів, тобто може бути заданий коефіцієнт максимального завантаження транспортного засобу. Це призводить до використання транспортних засобів з більшою вантажопідйомністю та збільшення капітальних та експлуатаційних витрат, але дозволяє виконувати замовлення клієнтів в умовах коливання попиту у певних межах. Завдання полягає у визначенні «золотої середини». При поточному плануванні точно відомі розмір та склад робочого парку транспортних засобів, детальна схема розподілу потоків вантажів та транспортних засобів за маршрутами руху. Відомі також укладені контракти та тарифи на перевезення вантажів та інші види операцій, що впливають на поточний фінансовий стан транспортного підприємства.

На оперативному рівні завдання транспортного підприємства, як правило, полягає у перерозподілі потоків та реоптимізації схеми маршрутизації при перевищенні провізної можливості або виникненні відмов у клієнтів та на маршрутах руху, а також при різних непередбачених ситуаціях та стихійних лихах. У цьому випадку може використовуватися внутрішній резерв транспортних засобів або залучені орендні транспортні засоби.

Для транспортних підприємств надзвичайно важливо, щоб під час вирішення завдань поточного планування вони могли отримати реальні оцінки транспортних витрат. Тому в математичних моделях, що використовуються для поточного планування перевезень, у функціях витрат повинні відображатися основні статті експлуатаційних витрат, пов'язані з утриманням парку транспортних засобів та транспортуванням вантажів.

У більшості зарубіжних та вітчизняних робіт, присвячених вирішенню завдань замкнутої маршрутизації (побудови кільцевих, циклічних маршрутів), автори розглядають витрати на дугах маршруту як задані константи, припускаючи, що ці витрати не залежать від типу та вантажопідйомності транспортного засобу. Більше того, приймається також, що витрати однакові під час проходження транспортної дуги у прямому та зворотному напрямках. Проте такі припущення нереалістичні. На практиці витрати на дугах залежать від довжини, стану та географічних особливостей ділянок дороги, типу та вантажопідйомності транспортного засобу, його поточного завантаження та швидкості руху. Усе це, в свою чергу, впливає на витрати палива. Крім того, при транспортуванні вантажів потрібно враховувати додаткові витрати, пов'язані з випадковими факторами — вимушеними простоями транспортних засобів через непередбачені ситуації на дорозі, стихійні прояви природи та ін. Додаткові витрати на практиці зазвичай проявляються у вигляді штрафних санкцій за порушення строків доставки вантажів, їх втрату чи пошкодження.

У задачах побудови кільцевих (циклічних) маршрутів завжди відома початкова та кінцева точки маршруту, тому будуть знайдені всі вузли та дуги, через які проходить маршрут. Це дає можливість за умови адитивності витрат задавати їх на дугах  $(i, j)$  та у вузлах  $i$  функціями  $f_{ij}^k$  та  $f_i^k$  для кожного транспортного засобу типу  $k$ . У ці функції, крім основних параметрів, що визначають довжину ду-

ги, вантажопідйомність та швидкість руху транспортного засобу, повинні включатися коефіцієнти, що відображають його фактичне завантаження на дузі та її географічні особливості (наприклад, підйом чи спуск відповідної ділянки дороги). Функції  $f_{ij}^k$  можуть залежати від одного, узагальненого параметра — витрати палива на дузі  $(i, j)$ . Значення цих функцій, що обчислюються в процесі вирішення задачі, повинні визначати реальні експлуатаційні витрати на перевезення вантажів по всьому маршруту, що проходить по фізичних ділянках доріг (рис. 2, а, в).

Зрозуміло, що витрати на придбання, утримання та експлуатацію робочого парку транспортних засобів при вирішенні задачі маршрутизації повинні розраховуватися лише з урахуванням тих параметрів, які явно чи неявно входять до математичної моделі задачі. Тому ці витрати становитимуть лише частину собівартості перевезень транспортного підприємства. Нагадаємо, що собівартість перевезень — це виражена у грошовій формі величина експлуатаційних витрат транспортного підприємства, що припадають у середньому на одиницю продукції транспорту. На вантажному автомобільному транспорті собівартість перевезень визначається зазвичай за перевезену тунну вантажів на один кілометр (т/км) або за використання одного автомобіля на годину (а/год). Розрахунок собівартості необхідний для визначення тарифів на перевезення вантажів та очікуваного прибутку підприємства. Оптимізація маршрутів перевезення вантажів дозволяє знизити собівартість перевезень переважно за рахунок усунення нераціональних маршрутів, збільшення коефіцієнта завантаження та зменшення споживаного палива та порожнього пробігу транспортних засобів, зменшення часу доставки вантажів споживачеві.

Оскільки після вирішення задачі відомі капітальні витрати на придбання робочого парку транспортних засобів, виникає питання: які статті експлуатаційних витрат на перевезення потрібно враховувати у загальній формулі розрахунку наведених витрат під час вирішення задачі? Видається доцільним, що для розрахунку експлуатаційних витрат у формулі необхідно враховувати тільки ті статті витрат, які безпосередньо пов'язані з перевезенням вантажів, а загальногосподарські (накладні) витрати підприємства можна не враховувати. Перерахуємо основні статті цих витрат: паливо, мастильні та інші експлуатаційні матеріали; технічне обслуговування, ремонт та амортизація щодо відновлення рухомого складу; знос та ремонт автомобільної гуми; заробітна плата водіїв разом із відрахуваннями на соціальні потреби.

Крім перерахованих, у загальній розрахунковій формулі наведених витрат можуть враховуватися й інші статті експлуатаційних витрат, пов'язані з рухом (дорожні збори, оплата платних доріг тощо). Головне — щоб величина експлуатаційних витрат, розрахована за виведеною формулою при розв'язанні задачі, була якомога ближче порівнянна (адекватна) з величиною тієї частини витрат, які фактично понесло підприємство лише на перевезення вантажів оптимізованими маршрутами руху транспортних засобів.

Визначення загальної формули розрахунку наведених витрат — це окреме, непросте завдання для економістів транспортного підприємства, яке має бути вирішено до проведення чисельного розв'язання задачі знаходження складу та кількості транспортних засобів, розподілу потоків вантажів та маршрутизації транспортних засобів. У багатьох практичних випадках функції наведених витрат нелінійні, несепарабельні і неадитивні, і це слід враховувати при побудові математичної моделі конкретної задачі.

## Математичні моделі побудови кільцевих маршрутів

Нехай фізична мережа внутрішньо вузлових перевезень (рис. 2, а) задана зв'язним орієнтованим графом  $\tilde{G}(\tilde{N}, \tilde{P})$ . Множина вершин  $\tilde{N} = \{0\} \cup \{1, \dots, n\} \cup \{n+1, \dots, \tilde{n}\}$ , яка перенумерована від 0 до  $\tilde{n}$ , включає вершину  $\{0\}$  — депо та магістральний вузол,  $\{1, \dots, n\}$  — множину клієнтів та  $\{n+1, \dots, \tilde{n}\}$  — множину транзитних пунктів, що пов'язують окремі ділянки доріг. Транзитні пункти вводяться для врахування особливостей окремих ділянок доріг, що з'єднують вузли у внутрішній зоні магістрального вузла. Ділянки доріг представлені протилежно спрямованими орієнтованими дугами  $(i, j)$ ,  $(j, i)$ ,  $i, j \in \tilde{N}$ ,  $i \neq j$ , одна з яких може бути відсутня (наприклад, через односторонній рух по ділянці дороги або заборони проїзду вантажним видам транспорту). Довжини дуг задані матрицею  $\tilde{R} = \|\tilde{r}_{ij}\|_{\tilde{n}+1 \times \tilde{n}+1}$ ,  $\tilde{r}_{ij} \in R^1$ ,  $(i, j) \in \tilde{P}$ . Нехай для дуг мережі відомі коефіцієнти  $\tilde{k}_{ij} \in R^1$ ,  $\tilde{k}_{ij} \geq 1,0$ , що характеризують географічні особливості (підйом, спуск та ін.) та фізичний стан (якість покриття) ділянок доріг. Визначимо елементи перетвореної матриці  $\tilde{R}'$  як  $\tilde{r}'_{ij} = \tilde{k}_{ij}\tilde{r}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \tilde{P}$ , і побудуємо на ній всі найкоротші шляхи в  $\tilde{G}(\tilde{N}, \tilde{P})$ . У результаті отримаємо матрицю довжин найкоротших шляхів  $\tilde{L} = \|\tilde{l}_{ij}\|_{\tilde{n}+1 \times \tilde{n}+1}$  і довідкову матрицю  $\tilde{C} = \|\tilde{c}_{ij}\|_{\tilde{n}+1 \times \tilde{n}+1}$ , кожен елемент якої  $\tilde{c}_{ij}$ ,  $i \neq j$ , визначає номер передостаннього вузла на найкоротшому шляху від  $i$  до  $j$ ,  $\tilde{c}_{ii} = 0$ ,  $i = \overline{1, \tilde{n}+1}$ . За допомогою довідкової матриці можна легко визначити найкоротший шлях між будь-якими вершинами вихідного графа. За матрицею  $\tilde{L}$  для множини  $\{0\} \cup \{1, \dots, n\}$  побудуємо повний орієнтований граф  $G(N, A)$  з множиною вершин  $N = \{0, 1, \dots, n\}$  і множиною дуг  $A = \{(i, j) : \forall i, j \in N, i \neq j\}$  з відомими довжинами  $l_{ij}$ ,  $(i, j) \in A$ . Вочевидь, що для дуг побудованого графа виконується правило трикутника  $l_{ik} + l_{kj} \geq l_{ij}$ . Надалі всі задачі будемо формулювати на графі  $G(N, A)$ .

Нехай для кожного клієнта  $j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , задано середньодобову кількість  $a_j > 0$  і  $b_j > 0$ ,  $a_j, b_j \in Z^+$ , одиниць тарно-штучних вантажів уніфікованого розміру, що потрібно протягом доби доставити клієнту з магістрального вузла (депо) і відправити від клієнта у магістральний вузол ( $a_0 = b_0 = 0$ ). Приймається, що протягом деякого періоду поточного планування тривалістю  $T$  днів середньодобові потоки незначно змінюються і за  $T$  днів може бути перевезено  $T \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$  вантажів.

У депо є  $K$  типів транспортних засобів з різною вантажопідйомністю  $Q_k \in Z^+$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Вантажопідйомність вимірюється у тих самих одиницях, що і потоки вантажів. Передбачається, що  $\max_j \{a_j, b_j\} \leq Q_K$ , а кількість транспорт-

них засобів кожного типу може бути обмежена величиною  $m_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , і не обмежена. Для кожного типу транспортного засобу відома вартість його придбання та середньостатистична вартість обслуговування за добу. У вартість обслуговування включаються витрати на мастильні та інші експлуатаційні матеріали, ре-



монт та амортизацію рухомого складу, зношування та ремонт автомобільної гуми, заробітна плата водіїв разом з відрахуваннями на соціальні потреби. Нехай до розрахунку цих витрат задана функція  $F_V = f(S_k, R_k)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , де  $S_k$  — фіксована вартість придбання транспортного засобу типу  $k$ , а  $R_k$  — витрати на обслуговування одного транспортного засобу типу  $k$  на добу.

Після сортування в магістральному вузлі вантажі для кожного клієнта можуть перевозитись у транспортних засобах на піддонах, для навантаження та вивантаження яких необхідно використовувати механізовані автотранспортувачі. Вантажі від клієнтів до магістрального вузла перевозяться «навалом». При великому обсязі вантажів, що перевозяться, витрати на операції навантаження і вивантаження можуть бути значними і їх необхідно враховувати при вирішенні задачі.

Для депо та клієнтів задана функція  $F_L = f(Q_k, u_j)$ ,  $j = \overline{0, n}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , витрат на навантаження-вивантаження  $u_j$  вантажів. На практиці прийнято вважати, що ця функція не залежить від типу транспортного засобу, а залежить тільки від обсягу вантажу та наявності вантажно-розвантажувального обладнання у депо та у клієнтів. У депо витрати на навантаження та вивантаження несе транспортне підприємство, клієнти можуть виконувати ці операції за власний рахунок. Надалі передбачається, що місця дислокації клієнтів є пунктами доставки та збору транспортного підприємства, тому витрати на навантаження та вивантаження вантажів у клієнтів також відносяться до загальних витрат підприємства. Як правило, такі витрати моделюються безперервною увігнутою функцією  $F_L = f(u_j)$ ,  $j = \overline{0, n}$ , від обсягу вантажів. В окремих випадках може бути прийнята лінійна залежність  $F_L = c_L u_j$ , де  $c_L$  — вартість навантаження-вивантаження одиниці вантажів. Зрозуміло, якщо витрати на навантаження і вивантаження вантажів не залежать від типу транспортного засобу, то вони не повинні фігурувати в цільовій функції задачі і можуть бути обчислені незалежно від змінних таким чином:  $F_{full} = f(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)) + \sum_{i=1}^n f(a_i + b_i)$  або  $F_{full} = 2c_L \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ . Якщо ж така залежність існує, то ці витрати мають бути пов'язані з невідомими змінними задачі.

Нехай вартість проїзду транспортного засобу типу  $k$  по дузі  $(i, j) \in A$  задана функцією  $F_M = f(l_{ij}, Q_k, V_{av}^k, k_L)$ , де  $l_{ij}$  — довжина дуги в кілометрах,  $V_{av}^k$  — середня швидкість руху (км/год),  $k_L$  — коефіцієнт завантаження транспортного засобу на дузі. Значення  $k_L = u_{ij} / Q_k \in [0, 1]$ , де  $u_{ij}$  — поточне завантаження транспортного засобу. Фактично функція  $F_M$  визначає вартість витраченого палива на пересування дугою  $(i, j)$  для кожного транспортного засобу типу  $k$ . У багатьох задачах маршрутизації приймається  $F_M = c_k l_{ij}$ , де  $c_k$  — питома вартість палива транспортного засобу типу  $k$  на один кілометр шляху. Часто розглядається випадок, коли витрати на пересування дугою не залежать від типу транспортного засобу і однакові для прямого та зворотного напрямків руху. У цьому випадку вводяться додаткові умови для вантажопідйомності  $Q_1 < Q_2 \dots < Q_K$  та фіксованої вартості  $F_1 < F_2 \dots < F_K$ .

Усі функції витрат повинні бути приведені до порівнянного виду, наприклад, за добу або за заданий період часу поточного планування  $T$ . Якщо побудовані функції витрат  $F_V$ ,  $F_L$  і  $F_M$  реально відображають виробничі витрати, то їх су-

ма буде достатньо близька до фактичних витрат транспортного підприємства для придбання й експлуатацію робочого парку транспортних засобів без урахування накладних витрат. Прийmemo, що при розв'язанні задачі ці функції розраховуються та їх відповідні числові значення  $F_k$ ,  $f_j^k$  і  $f_{ij}^k$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , використовуються у цільовій функції.

**Задача побудови комбінованих маршрутів з одночасним отриманням та доставкою вантажів (Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery — VRPSPD).** Позначимо загальну суму витрат транспортного підприємства як  $F_{DR} + F_{CR}$  при проектуванні лише окремих маршрутів доставки та збору вантажів [22] і розглянемо задачу побудови комбінованих маршрутів. Головна особливість цієї задачі полягає в тому, що при побудові маршрутів важливим є порядок відвідання клієнтів з урахуванням вантажопідйомності транспортного засобу та можливості навантаження вантажів у магістральний вузол залежно від кількості вивантаженого вантажу в кожному вузлі маршруту. У цьому випадку для окремих індивідуальних задач оптимізації може виявитися, що загальні витрати  $F_{DCR}$  при вирішенні комбінованої задачі менші або дорівнюють сумарним витратам  $F_{DR} + F_{CR}$ . Не виключений і варіант  $F_{DR} + F_{CR} < F_{DCR}$ . Тому при проектуванні маршрутів транспортне підприємство має використовувати як комбіновані моделі, так і окремі моделі доставки та збору вантажів.

Нехай  $C = \{1, \dots, n\}$  — множина клієнтів,  $V = \{1, \dots, K\}$  — множина типів транспортних засобів. Введемо потокові змінні  $y_{ij}$ , що визначають кількість вантажів у транспортному засобі при його проїзді до клієнта  $j$  після відвідання клієнта  $i$ ,  $i, j \in N$ , та потокові змінні  $z_{ji}$ , що визначають кількість вантажів у транспортному засобі при його проїзді до клієнта  $i$  після відвідання клієнта  $j$ ,  $i, j \in N$ . Визначимо булеві змінні  $x_{ij}^k$ ,  $x_{ij}^k = 1$ , якщо транспортний засіб типу  $k$  рухається від клієнта  $i$  до клієнта  $j$  і  $x_{ij}^k = 0$  в іншому випадку. Нехай  $\sum_{j \in C} x_{0j}^k$  — сумарна кількість використовуваних транспортних засобів типу  $k$ . Сформулюємо задачу.

Потрібно знайти мінімум функції

$$F_{DCR} = \sum_{k \in V} F_k \sum_{j \in C} x_{0j}^k + \sum_{k \in V} \sum_{j \in N} f_j^k \left( \sum_{i \in C} |(y_{ij} - y_{ji})| x_{ji}^k \right) + \sum_{k \in V} \sum_{j \in N} f_j^k \left( \sum_{i \in C} |(z_{ji} - z_{ij})| x_{ij}^k \right) + \sum_{k \in V} \sum_{i, j \in N} f_{ij}^k x_{ij}^k \quad (1)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in V} \sum_{i \in N} x_{ij}^k = 1, \quad \forall j \in C, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^k - \sum_{i \in N} x_{ji}^k = 0, \quad \forall j \in C, \quad \forall k \in V, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in C} y_{0j} = \sum_{j \in C} a_j, \quad \sum_{j \in C} z_{j0} = \sum_{j \in C} b_j, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} y_{ij} - \sum_{i \in N} y_{ji} = a_j, \quad \forall j \in C, \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} z_{ji} - \sum_{i \in N} z_{ij} = b_j, \quad \forall j \in C, \quad (6)$$

$$\sum_{k \in V} a_j x_{ij}^k \leq y_{ij} \leq \sum_{k \in V} (Q_k - a_i) x_{ij}^k, \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \quad (7)$$

$$\sum_{k \in V} b_i x_{ij}^k \leq z_{ij} \leq \sum_{k \in V} (Q_k - b_j) x_{ij}^k, \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \quad (8)$$

$$y_{ij} + z_{ij} \leq \sum_{k \in V} (Q_k - \max\{0, b_j - a_j, a_i - b_i\}) x_{ij}^k, \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \quad \forall k \in V, \quad (9)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}, \quad y_{ij}, z_{ij} \geq 0 \text{ і цілі}, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in V. \quad (10)$$

Перша частина цільової функції (1) визначає фіксовані витрати на придбання та обслуговування транспортних засобів, друга — витрати на навантаження та вивантаження вантажів, і третя — перемінні витрати на транспортування вантажів. Обмеження (2) і (3) гарантують, що кожен клієнт  $j$  відвідується лише один раз будь-яким транспортним засобом типу  $k$ , і цей транспортний засіб після прибуття до клієнта повинен обов'язково його залишити. Обмеження (4) означають, що загальна кількість вантажів на виході з депо та на вході в депо дорівнює сумарним вимогам усіх клієнтів. Обмеження (5) і (6) означають, що при відвіданні клієнта  $j$  вантаж  $a_j$  повинен бути вивантажений (кількість вантажу в транспортному засобі після відвідання клієнта зменшується на величину  $a_j$ ), а вантаж  $b_j$  повинен завантажуватися (кількість вантажу в транспортному засобі після відвідання клієнта  $j$  збільшується на величину  $b_j$ ). Ці обмеження забезпечують виконання вимог усіх клієнтів та виключають цикли, що не проходять через депо. Обмеження (7) і (8) пов'язують змінні  $y_{ij}$ ,  $z_{ij}$  і  $x_{ij}^k$ , та означають, що ніякі вантажі не перевозяться з  $i$  в  $j$ , якщо жоден транспортний засіб не обслуговує зв'язок між цими вузлами, тобто якщо  $x_{ij}^k = 0 \quad \forall k \in V$ . Обмеження (9) гарантують, що вантажопідйомність транспортних засобів не буде перевищено, а (10) встановлюють область визначення змінних.

Якщо кількість транспортних засобів типу  $k$  обмежена величиною  $m_k$ , то до задачі можуть бути додані умови

$$\sum_{j \in C} x_{0j}^k \leq m_k, \quad \forall k \in V.$$

У разі потреби також можуть бути встановлені обмеження на максимальну тривалість маршрутів за часом. Для цього включимо в модель часові параметри  $T_k$  — максимальний час поїздки транспортного засобу типу  $k$  і  $t_{ij}$  — час проїзду по дузі  $(i, j)$ , а також безперервні змінні  $r_{ij}$ , що визначають різницю між значенням  $T_k$  і поточним значенням часу руху після проїзду по дузі  $(i, j)$ . Тоді до задачі додадуться обмеження:

$$\begin{aligned} r_{ij} &\leq \sum_{k \in V} T_k x_{ij}^k, \quad \forall (i, j) \in A, \\ r_{0j} &= \sum_{k \in V} T_k x_{0j}^k - \sum_{k \in V} t_{0j} x_{0j}^k, \quad \forall j \in C, \\ \sum_{i \in N} r_{ip} - \sum_{j \in N} r_{pj} &= \sum_{k \in V} \sum_{j \in N} t_{pj} x_{pj}^k, \quad \forall p \in C, \\ r_{ij} &\geq 0, \quad \forall (i, j) \in A. \end{aligned}$$

Перші обмеження означають, що час руху транспортного засобу, що залишився, після проїзду по дузі  $(i, j)$  не може перевищувати максимального часу руху транспортного засобу. Другі умови забезпечують, щоб час руху транспортного засобу, що залишився, після виїзду з депо дорівнював різниці між максимальним часом руху і часом, необхідним для переміщення до клієнта  $j$ . Треті обмеження вказують на те, що кожного разу, коли транспортний засіб проїжджає між двома клієнтами, час руху зменшується на час проїзду між цими клієнтами.

Для формулювання задачі (1)–(10) з обмеженнями на часові вікна депо представимо двома вузлами з номерами 0 та  $n+1$ . Тоді  $N = \{0\} \cup \{1, \dots, n\} \cup \{n+1\}$ .

Нехай  $[t_i^S, t_i^C]$  і  $s_i$  визначають проміжок часу (часове вікно), протягом якого можливе обслуговування, і час обслуговування клієнта  $i$ ,  $t_i^S, t_i^C, s_i \in R^1$ . Введемо змінні  $t_i^k \in R^1$ , що означають точний час початку обслуговування транспортного засобу типу  $k$  у клієнта  $i$ . Приймається, якщо транспортний засіб прибуває до клієнта  $i$  раніше  $t_i^S$ , то він чекає на початок обслуговування. У задачу (1)–(10) додадуться у цільову функцію складова  $\sum_{k \in V} (t_{n+1}^k - t_0^k)$  і обмеження:

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1, \quad \sum_{i \in N} x_{i, n+1}^k = 1, \quad \forall k \in V;$$

$$t_j^k \geq t_i^k + s_i + t_{ij} - M_{ij}(1 - x_{ij}^k), \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in V,$$

де  $M_{ij} = \max\{0, t_i^C + s_i + t_{ij} - t_j^S\}$ ;

$$t_i^S \sum_{j \in N} x_{ij}^k \leq t_i^k, \quad t_i^k \leq t_i^C \sum_{j \in N} x_{ij}^k, \quad \forall i \in N, \quad \forall k \in V;$$

$$x_{i0}^k = 0, \quad x_{ii}^k = 0, \quad x_{n+1, i}^k = 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall k \in V.$$

У записах перших обмежень передбачається, якщо транспортний засіб не використовується, то він здійснює порожній тур, тобто  $x_{0, n+1}^k = 1, \forall k \in V$ . Крім того,  $a_0 = a_{n+1} = s_0 = s_{n+1} = 0, [t_0^S, t_0^C] = [t_{n+1}^S, t_{n+1}^C] = [Start, Close]$ , де *Start* та *Close* — час виїзду та приїзду в депо. Задача з часовими вікнами є задачею змішаного цілочисельного програмування.

Задачу VRPSPD вперше сформульовано Min [23] в 1989 р. Для розв'язання задачі розподілу та збору книг публічної бібліотеки автор запропонував евристичні алгоритми, засновані на кластеризації клієнтів відповідно до їх потреб та вантажопідйомності транспортних засобів та розв'язання задачі комівояжера (Traveling Salesman Problem — TSP) для кожного кластера. Огляди літератури з задач VRPSPD та методів і алгоритмів їх вирішення можна знайти в [24, 25].

**Задача побудови маршрутів із розділеною доставкою вантажів (The Split Delivery Vehicle Routing Problem — SDVRP).** У класичній задачі з розділеною (розщепленою) доставкою, що формулюється на повному неорієнтованому графі, передбачається використання необмеженого однорідного робочого парку транспортних засобів з однаковою вантажопідйомністю. Кожен клієнт може відвідуватися декількома транспортними засобами, а запит клієнтів може бути більшим за вантажопідйомність транспортних засобів. Кожен транспортний засіб починає і закінчує свій тур у тому самому депо. Задано вартості проїзду по ребрах (довжи-

ни ребер), які задовольняють нерівностям трикутника. Задача полягає у побудові маршрутів, які обслуговують запити всіх клієнтів без порушення обмежень на вантажопідйомність транспортних засобів та мають мінімальну вартість.

Справедливо припустити, що розділене перевезення вантажів найбільш характерне для реальних транспортних мереж і необхідне при оперативному управлінні перевезеннями в умовах обмеженої провізної можливості парку транспортних засобів і значного коливання потоків. Вперше задача SDVRP була розглянута М. Drog і Р. Trudeau у 1989 р. [26, 27], які вказали на можливість скорочення транспортних витрат за рахунок дроблення потоків та їх розділеної доставки клієнтам. С. Archetti та інші [28, 29] провели аналіз максимально можливої економії транспортних витрат та представили результати обчислювальних експериментів, що показують, як економія залежить від характеристик індивідуальних завдань оптимізації. Отже, розділена доставка в окремих випадках дозволяє поліпшити розв'язок нерозділеної задачі до двох разів.

Сформулюємо задачу SDVRP з необмеженим та обмеженим неоднорідним парком транспортних засобів. Відомі обсяги вантажів  $a_i \in Z^+$ ,  $i = \overline{1, n}$ , що вимірюються кількістю одиниць, кількість  $m_k$  і вантажопідйомність  $Q_k \in Z^+$  транспортних засобів типу  $k \in V$ ,  $V = \{1, \dots, K\}$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Нехай, як і раніше,  $N = \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $C = \{1, \dots, n\}$ . Кожен клієнт може відвідуватися декількома транспортними засобами, а запит клієнтів може бути більшим за вантажопідйомність транспортних засобів. Кожен транспортний засіб починає і закінчує свій тур в тому ж депо. Відомі  $F^k$ ,  $f_i^k$  і  $f_{ij}^k$ ,  $i, j = \overline{0, n}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , — відповідно фіксовані витрати на придбання та обслуговування транспортних засобів, перемінні витрати на обробку та транспортування вантажів. Задача полягає у побудові маршрутів, які обслуговують запити всіх клієнтів без порушення обмежень на вантажопідйомність транспортних засобів та мають мінімальну вартість.

Введемо змінні  $y_i^{kl}$ , що визначають кількість одиниць вантажу, доставлених клієнту  $i$   $l$ -м транспортним засобом типу  $k$ , цілі змінні  $u_i^{kl}$  для виключення підциклів, які визначають порядковий номер елемента  $i$  в маршруті  $l$ -го транспортного засобу типу  $k$  і булеві змінні  $x_{ij}^{kl}$ ,  $x_{ij}^{kl} = 1$ , якщо  $l$ -й транспортний засіб типу  $k$  рухається від клієнта  $i$  до клієнта  $j$  і  $x_{ij}^{kl} = 0$  в іншому випадку. Індекс  $l = 1, 2, \dots$  визначає номер транспортного засобу типу  $k$ . Потрібно знайти мінімум функції

$$F_{CDVRP} = \sum_{k \in V} F_k \sum_{l=1, 2, \dots} \sum_{j \in C} x_{0j}^{kl} + \sum_{k \in V} \sum_{l=1, 2, \dots} \sum_{i \in N} f_i^k (y_i^{kl}) + \sum_{k \in V} \sum_{l=1, 2, \dots} \sum_{i, j \in N} f_{ij}^k x_{ij}^{kl} \quad (11)$$

при обмеженнях:

$$\sum_{k \in V} \sum_{l=1, 2, \dots} \sum_{i \in N} x_{ij}^{kl} \geq 1, \quad \forall j \in N, \quad (12)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij}^{kl} - \sum_{i \in N} x_{ji}^{kl} = 0, \quad \forall j \in N, \quad \forall k \in V, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$u_i^{kl} - u_j^{kl} + nx_{ij}^{kl} \leq n-1, \forall i, j \in C, \forall k \in V, l=1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$y_i^{kl} \leq a_i \sum_{j \in N} x_{ij}^{kl}, \forall i \in C, \forall k \in V, l=1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$\sum_{k \in V} \sum_{l=1, 2, \dots} y_i^{kl} = a_i, \forall i \in C, \quad (16)$$

$$\sum_{i \in C} y_i^{kl} \leq Q_k, \forall k \in V, l=1, 2, \dots, \quad (17)$$

$$x_{ij}^{kl} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in V, l=1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$y_i^{kl}, u_i^{kl} \geq 0 \text{ і цілі}, \forall i \in C, \forall k \in V, l=1, 2, \dots \quad (19)$$

Для обмеженого парку транспортних засобів до задачі додадуться обмеження

$$\sum_{l=1, 2, \dots} \sum_{j \in C} x_{0j}^{kl} \leq m_k, \forall k \in V. \quad (20)$$

Цільова функція (11) визначає загальні витрати маршрутизації. Обмеження (12) та (13) гарантують, що кожен клієнт  $j$  відвідується хоча б одним транспортним засобом типу  $k$ , і цей транспортний засіб після прибуття до клієнта та вивантаження його вантажу обов'язково має залишити клієнта. Обмеження (14), вперше введені А. Tucker [30], забороняють підцикли, що не проходять через депо, а обмеження (15)–(17) розподіляють запити клієнтів серед транспортних засобів. Неважко помітити, що обмеження (15) та (16) гарантують відвідування кожного клієнта хоча б одним транспортним засобом, тому обмеження (12) можна вилучити з формулювання задачі. Однак при використанні існуючих пакетів програм змішаного і цілочисельного лінійного програмування може виявитися, що при розв'язанні LP-релаксованої вихідної задачі з обмеженнями (12) можуть бути отримані кращі відсікаючі нерівності, які дозволять значно скоротити час її розв'язання.

Обмеження (14) можна записати як

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij}^{kl} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq C, |S| \geq 2, \forall k \in V, l=1, 2, \dots,$$

де  $S$  — кластер (підмножина клієнтів), що обслуговується  $l$ -м транспортним засобом типу  $k$ .

Постановка задачі (11)–(20) може бути розширена на випадки побудови комбінованих маршрутів, запровадження додаткових обмежень на тривалість та довжину маршрутів, часові вікна тощо [31]. Огляди з класичної задачі SDVRP можна знайти в [32, 33], а окремі методи та алгоритми її розв'язання — в [34–42].

### Висновок

Для ефективного управління процесами обробки та транспортування вантажів у внутрішніх зонах обслуговування магістральних вузлів транспортні підприємства повинні оптимізувати довгострокові, тактичні та оперативні рішення, використовуючи сучасні методи комбінаторної оптимізації. Зменшення наведених експлуатаційних витрат за рахунок оптимізації рішень дозволяє знижувати

тарифи на перевезення вантажів, підтримувати здорову конкуренцію серед перевізників та постійно підвищувати якість обслуговування господарських підприємств та населення. При визначенні структури внутрішньо вузлової мережі перевезень і її математичної моделі повинні враховуватися реальні географічні особливості та характеристики ділянок доріг транспортної мережі та зовнішні фактори, що важко формалізуються. Модель фізичної структури мережі має формуватися за участю досвідчених експертів та диспетчерів транспортних перевезень для кожного магістрального вузла.

У більшості відомих робіт, присвячених вирішенню завдань маршрутизації на транспорті, розглядаються ідеалізовані математичні моделі, в яких не враховуються багато обмежень, притаманних реальним процесам обробки та транспортування вантажів. Часто приймається евклідова відстань між вузлами мережі перевезень, коли виконується правило трикутника, а такі важливі параметри, як відстань, час поїздки, транспортні витрати, час обслуговування та інші, наявні в деякому абстрактному вигляді і моделюються константами. У постановках задач внутрішньо вузлових перевезень повинні бути всі обмеження та параметри, які дозволять розрахувати близькі до фактичних технічні та економічні показники функціонування мережі перевезень.

Для вирішення завдань побудови маршрутів з неоднорідним парком транспортних засобів найчастіше застосовуються класичні евристичні та метаввристичні алгоритми, що пояснюється з одного боку NP-складністю розв'язуваних задач, а з іншого — відносно низькою трудомісткістю розробки таких алгоритмів. Однак слід враховувати, що більшість евристичних алгоритмів на різних екземплярах індивідуальних задач оптимізації можуть дати розв'язки, які як завгодно відрізняються від глобального оптимуму. Тому для вирішення завдань великої розмірності (більше 100 клієнтів) краще використовувати гібридні алгоритми, в яких поєднуються в різних комбінаціях точні (гілок та меж, гілок та відсікань, гілок відсікань та цін, генерації стовпців, розбиття множини, динамічного програмування) та численні евристичні та метаввристичні методи та підходи. Нині можна стверджувати, що розробка гібридних алгоритмів для розв'язання NP-складних кластерних задач маршрутизації загально визнана у світовій практиці [43, 44]. В останні роки спостерігається також тенденція до побудови уніфікованих алгоритмів та порталу-сервера, здатних вирішувати великий клас задач маршрутизації з можливістю врахування багатьох реальних обмежень та параметрів [45].

Запропоновано математичні моделі задач побудови комбінованих та розділених маршрутів для перевезення вантажів у внутрішніх зонах магістральних вузлів. Для розв'язання сформульованих NP-складних задач можуть застосовуватися переважно метаввристичні методи та алгоритми. Враховуючи ієрархічну структуру магістральної мережі перевезень та невелику кількість вузлів у внутрішніх зонах магістральних вузлів, для розв'язання задач можна використовувати універсальні точні методи та алгоритми, запропоновані R. Baldacci та ін. [46–48], які здатні знаходити оптимальні розв'язки багатьох задач маршрутизації з кількістю клієнтів до 100. Крім того, розв'язання задач можливе і класичними методами гілок та меж, гілок та відсікань, гілок відсікань та цін, генерації стовпців, розбиття множини, динамічного програмування тощо, реалізованими в комерційних та відкритих пакетах програм змішаного та цілочисельного лінійного програмування, наприклад, IBM ILOG CPLEX, GAMS, AIMMS, Gurobi Optimizer та ABACUS, COIN-OR, GLPK, Ip\_solve. Чимало з них доступні на сервері NEOS (<https://neos-server.org/neos/>).

До перспективних напрямів розв'язання задач маршрутизації слід віднести розробку стохастичних моделей та алгоритмів для довгострокового планування, що враховують ризики вкладення інвестицій у розвиток парку транспортних засобів, динамічних моделей поточного планування та оперативного управління для визначення меж економічної ефективності отриманих розв'язків на задані проміжки часу під час коливання потоків вантажів та зміні параметрів транспортної моделі. Оперативна інформація в цьому випадку може надходити від GPS з бортів транспортних засобів, системи електронних замовлень по Інтернету та пристроїв мобільного зв'язку (стілникових телефонів, планшетів, смартфонів тощо). Представляє інтерес також створення єдиної загальнонаціональної бази даних у стандартизованому форматі на основі однієї структурованої мови (наприклад, XML) зі складними тестовими прикладами для різних класів типових задач маршрутизації.

*V. Vasyanin, O. Trofymchuk, L. Ushakova*

## CONSTRUCTING PROBLEMS OF VEHICLES RING ROUTES IN MULTICOMMODITY HIERARCHICAL NETWORK

### **Volodymyr Vasyanin**

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,  
*archukr@meta.ua*

### **Oleksandr Trofymchuk**

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,  
*itgis@nas.gov.ua*

### **Lyudmila Ushakova**

Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,  
*archukr@meta.ua*

The paper formulates mathematical models for the problems of constructing ring routes of vehicles in a multicommodity hierarchical network. As a rule, such networks consist of a decentralized backbone network and networks in the internal service areas of the backbone nodes (internal networks). In a multicommodity network, each node can exchange products (goods, cargo) with all other nodes. In foreign literature, the design problems of such networks are called Multi-Echelon Location-Routing Problem (ME LRP). In Multi-Echelon LRPs, there are multiple intermediaries between the backbone nodes (central primary nodes) and nodes in the inner zones of the backbone nodes (end customers, clients), and the distributed product from the backbone nodes passes through two or more secondary of intermediaries (called satellites) before reaching the end consumer. In classical LRP two problems are combined for a joint solution — the problem of determining the location of secondary objects (satellites or depots) and main backbone routes of vehicles and the problem of constructing ring routes of internal vehicles to serve customers with a known demand for a homogeneous interchangeable product. Unlike distribution problems for a homogeneous inter-



changeable product, in multicommodity LRP (MC LRP), product flows are not interchangeable — the flow of each product must be delivered from a specific primary object to a specific client. In this paper, it is assumed that the multi-level structure of the transport network has already been determined and the geographic location of the backbone nodes and their internal service areas with the set of pickup and delivery cargo nodes (clients) are known. Therefore, the problems of determining the main backbone routes of vehicles and constructing ring routes of internal vehicles are considered independently of each other. The types of costs of real transport processes are discussed, which should be taken into account when forming the objective function of routing problems, and mathematical models are proposed for the problems of constructing combined (Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery) and split (The Split Delivery Vehicle Routing Problem) ring routes with a heterogeneous fleet of vehicles. The possibility of solving the formulated problems with the help of well-known packages of mixed and integer linear programming is noted.

**Keywords:** multicommodity hierarchical networks, combinatorial optimization problems, mathematical models of vehicle ring routes.

1. Nagy G., Salhi S. Location-routing: Issues, models and methods. *European Journal of Operational Research*. 2007. **177(2)**. P. 649–672. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.04.004>.
2. Prodhon C., Prins C. A survey of recent research on location-routing problems. *European Journal of Operational Research*. 2014. **238(1)**. P. 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.01.005>.
3. Cuda R., Guastaroba G., Speranza M.G. A survey on two-echelon routing problems. *Computers & Operations Research*. 2015. **55**. P. 185–199. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.06.008>.
4. Drexel M., Schneider M. A survey of variants and extensions of the location-routing problem. *European Journal of Operational Research*. 2015. **241(2)**. P. 283–308. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.08.030>.
5. Guastaroba G., Speranza M.G., Vigo D. Intermediate facilities in freight transportation planning: A survey. *Transportation Science*. 2016. **50(3)**. P. 763–789. <https://doi.org/10.1287/trsc.2015.0631>.
6. Schneider M., Drexel M. A survey of the standard location-routing problem. *Annals of Operations Research*. 2017. **259(1–2)**. P. 389–414. <https://doi.org/10.1007/s10479-017-2509-0>.
7. Mirhedayatian S., Crainic T., Guajardo M., Wallace S. A two-echelon location-routing problem with synchronisation. *Journal of the Operational Research Society*. 2019. **72(1)**. P. 145–160. DOI:10.1080/01605682.2019.1650625.
8. Rodrigue J.-P. The distribution network of amazon and the footprint of freight digitalization. *Journal of Transport Geography*. 2020. **88**. 102825. DOI:10.1016/j.jtrangeo.2020.102825.
9. Mara S.T.W., Kuo R., Asih A.M.S. Location-routing problem: a classification of recent research. *International Transactions in Operational Research*. 2021. **28(6)**. P. 2941–2983. <https://doi.org/10.1111/itor.12950>.
10. Sluijk N., Florio A.M., Kinable J., Dellaert N., Woensel T.V. Two-echelon vehicle routing problems: A literature review. *European Journal of Operational Research*. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.02.022>.
11. Hamidi M., Farahmand K., Sajjadi S., Nygard K. A heuristic algorithm for a multiproduct four-layer capacitated location-routing problem. *International Journal of Industrial Engineering Computations*. 2014. **5**. P. 87–100. DOI: 10.5267/j.ijiec.2013.09.008.
12. Janjevic M., Winkenbach M., Merchan D. Integrating collection-and-delivery points in the strategic design of urban last-mile e-commerce distribution networks. *Transportation Research. Part E*. 2019. **131**. P. 37–67. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2019.09.001>.
13. Boccia M., Crainic T., Sforza A., Sterle C. Multi-commodity location-routing: Flow intercepting formulation and branch-and-cut algorithm. *Computers and Operations Research*. 2018. **89**. P. 94–112. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.08.013>.
14. Ahmed S. A Three echelon location routing problem with multiple commodities and courier delivery. A Thesis in The Department of Mechanical and Industrial Engineering Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Applied Science (Industrial

- Engineering) at Concordia University Montréal, Québec, Canada September 2021. [https://spectrum.library.concordia.ca/id/eprint/988883/1/Ahmed\\_MASc\\_S2021.pdf](https://spectrum.library.concordia.ca/id/eprint/988883/1/Ahmed_MASc_S2021.pdf).
15. Dellaert N., Woensel T.V., Crainic T.G., Saridarq F.D. A multi-commodity two-echelon capacitated vehicle routing problem with time windows: Model formulations and solution approach. *Computers & Operations Research*. 2021. **127**. 105154. <https://doi.org/10.1016/j.cor.20.105154>.
  16. Gu W., Archetti C., Cattaruzza D., Ogier M., Semet F., Speranza M. A sequential approach for a multi-commodity two-echelon distribution problem. *Computers & Industrial Engineering, Elsevier*. 2021. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03167379>.
  17. Jia S., Deng L., Zhao Q., Chen Y. An adaptive large neighborhood search heuristic for multi-commodity two-echelon vehicle routing problem with satellite synchronization. 2021. doi: 10.3934/jimo.2021225.
  18. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A. Simulation of packing, distribution and routing of small-size discrete flows in a multicommodity network. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47(7)**. P. 15–30. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30.
  19. Трофимчук А.Н., Васянин В.А., Ушакова Л.П. Исследование задачи оптимизации иерархической структуры разреженной и плотной коммуникационной сети. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2021. № 1. С. 5–21.
  20. Trofymchuk O.M., Vasyanin V.A., Kuzmenko V.N. Optimization algorithms for packing of small-lot correspondence in communication networks. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. **52(2)**. P. 258–268. DOI: 10.1007/s10559-016-9822-5.
  21. Vasyanin V.A. Problem of distribution and routing of transport blocks with mixed attachments and its decomposition. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. **47(2)**. P. 56–69. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i2.60>.
  22. Васянин В.А., Ушакова Л.П. Задачи построения доставочных и сборочных маршрутов перевозки мелкопартионных грузов во внутренних зонах иерархической автотранспортной сети. *Математичне моделювання в економіці*. 2016. № 3–4. С. 102–131. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/131865>.
  23. Min H. The multiple vehicle routing problem with simultaneous delivery and pickup points. *Transportation Research Part A: General*. 1989. **23(5)**. P. 377–386. [https://doi.org/10.1016/0191-2607\(89\)90085-X](https://doi.org/10.1016/0191-2607(89)90085-X).
  24. Васянин В.А. Задачи построения комбинированных и отдельных маршрутов перевозки мелкопартионных грузов во внутренних зонах иерархической автотранспортной сети. *Математичне моделювання в економіці*. 2017. № 1–2. С. 74–92. <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/131906>.
  25. Koç Ç., Laporte G. A review of vehicle routing with simultaneous pickup and delivery. *Computers & Operations Research*. 2020. 122. 104987. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.104987>.
  26. Dror M., Trudeau P. Savings by split delivery routing. *Transportation Science*. 1989. **23(2)**. P. 141–145. <https://doi.org/10.1287/trsc.23.2.141>.
  27. Dror M., Trudeau P. Split delivery routing. *Naval Research Logistics*. 1990. **37(3)**. P. 383–402. <https://doi.org/10.1002/nav.3800370304>.
  28. Archetti C., Savelsbergh M., Speranza M.G. Worst-case analysis for split delivery vehicle routing problems. *Transportation Science*. 2006. **40(2)**. P. 226–234. DOI:10.1287/trsc.1050.0117.
  29. Archetti C., Savelsbergh M.W.P., Speranza M.G. To split or not to split: That is the question. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2008. **44(1)**. P. 114–123. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2006.04.003>.
  30. Miller C.E., Tucker A.W., Zemlin R.A. Integer programming formulations and traveling salesman problems. *ACM*. 1960. **7**. P. 326–329. <https://doi.org/10.1145/321043.321046>.
  31. Yin C., Bu L., Gong H. Mathematical model and algorithm of split load vehicle routing problem with simultaneous delivery and pickup. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 2013. **9(11)**. P. 4497–4508.
  32. Archetti C., Speranza M.G. The split delivery vehicle routing problem: A survey. In Golden B.L., Raghavan S., Wasil E.A. *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*, New York: Springer-Verlag. 2008. P. 103–122. DOI: 10.1007/978-0-387-77778-8\_5.
  33. Gulczynski D.J., Golden B., Wasil E. Recent developments in modeling and solving the split delivery vehicle routing problem. *Tutorials in Operations Research, INFORMS*. 2008. P. 170–180. <https://doi.org/10.1287/educ.1080.0046>.
  34. Belenguer J., Martinez M., Mota E. A lower bound for the split delivery vehicle routing problem. *Operations Research*. 2000. **48(5)**. P. 801–810. <https://www.jstor.org/stable/223032>.

35. Archetti C., Hertz A., Speranza M.G. A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem. *Transportation Science*. 2006. **40(1)**. P. 64–73. <https://www.jstor.org/stable/25769283>.
36. Boudia M., Prins C., Reghioui M. An effective memetic algorithm with population management for the split delivery vehicle routing problem. *Hybrid Metaheuristics, Lecture Notes in Computer Science*. 2007. **4771**. P. 16–30. DOI: 10.1007/978-3-540-75514-2\_2.
37. Chen S., Golden B., Wasil E. The split delivery vehicle routing problem: Applications, algorithms, test problems, and computational results. *Networks*. 2007. **49(4)**. P. 318–329. DOI: 10.1002/net.20181.
38. Aleman R.E., Hill R.R. A tabu search with vocabulary building approach for the vehicle routing problem with split demands. *Int. J. Metaheuristics*. 2010. **1(1)**. P. 55–80. DOI: 10.1504/IJMHEUR.2010.033123.
39. Archetti C., Bianchessi C., Speranza M.G. A column generation approach for the split delivery vehicle routing problem. *Networks*. 2011. **58(4)**. P. 241–254. <https://doi.org/10.1002/net.20467>.
40. Berbotto L., Garcia S., Nogales F.G. A randomized granular tabu search heuristic for the split delivery vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*. 2014. **222**. P. 153–173. <https://doi.org/10.1007/s10479-012-1282-3>.
41. Khmelev A., Kochetov Y. A hybrid local search for the split delivery vehicle routing problem. *International Journal of Artificial Intelligence*. 2015. **13(1)**. P. 147–164.
42. Khmelev A., Kochetov Y. A hybrid VND method for the split delivery vehicle routing problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2015. **47**. P. 5–12. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2014.11.002>.
43. Golden B.L., Raghavan S., Wasil E.A. The Vehicle routing problem: latest advances and new challenges, *Springer Science & Business Media*, 2008. 591 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-77778-8>.
44. Toth P., Vigo D. Vehicle routing: problems, methods, and applications. Second Edition, SIAM, 2014. 463 p.
45. Vidal T., Crainic T.G., Gendreau M., Prins C. A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*. 2014. **234(3)**. P. 658–673. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.045>.
46. Baldacci R., Mingozzi A. A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems. *Mathematical Programming, Series A*. 2009. **120(2)**. P. 347–380. <https://doi.org/10.1007/s10107-008-0218-9>.
47. Baldacci R., Bartolini E., Mingozzi A., Roberti R. An exact solution framework for a broad class of vehicle routing problems. *Computational Management Science*. 2010. **7(3)**. P. 229–268. <https://doi.org/10.1007/s10287-009-0118-3>.
48. Baldacci R., Toth P., Vigo D. Exact algorithms for routing problems under vehicle capacity constraints. *Annals of Operations Research*. 2010. **175(1)**. P. 213–245. <https://doi.org/10.1007/s10479-009-0650-0>.

Отримано 13.06.2022