

ДУАЛЬНИЙ МЕТОД ПРОГРАМУВАННЯ

Воронін Альберт Миколайович

Національний авіаційний університет, м. Київ,
alnv@ukr.net

Савченко Аліна Станіславівна

Національний авіаційний університет, м. Київ,
a.s.savchenko@ukr.net

Задача оптимізації трактується як вибір такого поєднання аргументів (незалежних змінних), яке при заданих зовнішніх впливах та обмеженнях породжує екстремум цільової функції. Цільова функція відбиває поняття критерію оптимізації. За наявності кількох критеріїв цільова функція має сенс скалярної згортки критеріїв. Сутність поняття оптимізації полягає у екстремізації цільової функції. Це стосується і задач прийняття рішень, і задач керування, і інших предметних областей. Запропоновано нелокальний метод математичного програмування, який дає змогу зменшити кількість необхідних обчислень цільової функції. При оптимальному проектуванні, особливо багатокритеріальному, цільові функції розраховуються на складних алгоритмах, що вимагають великих обчислювальних ресурсів і обчислювального часу. Запропонований метод дуального програмування актуальний для комп'ютерної оптимізації складних систем.

Ключові слова: нелокальний метод, дуальне програмування, обчислювальний експеримент, комп'ютерна оптимізація, складні системи.

Для задач оптимізації фундаментальним є поняття математичної моделі об'єкта та інформація, якою володіє дослідник для побудови моделі. Спектр широкій — від повного знання (детермінована модель) до повної невизначеності («чорна скринька»). Між цими інформаційними полюсами є ймовірносний рівень невизначеності. Наявність достатньої інформації про механізми фізичних, хімічних, інформаційних, економічних та інших процесів, що відбуваються в об'єкті, дозволяє скласти детерміновану модель у вигляді диференціальних, алгебраїчних та інших рівнянь. При їх виведенні використовуються встановлені в предметних областях матеріальний і тепловий баланси, кінематичні співвідношення тощо. Аналітичне вивчення відносно простих детермінованих математичних моделей є предметом класичної теорії оптимізації. Коли механізм протікання в об'єкті процесів невідомий, для створення математичної моделі оптимізації застосовують експериментальні або експериментально-статистичні методи (теорія планування експериментів).

Аналіз показує [1], що зі зростанням складності завдань звужується можливість їх суто аналітичного вирішення. Вирішити сьогоденню складну оптимізаційну задачу, навіть маючи детальний математичний опис, можна лише чисельно. Тому, як не парадоксально, але і при повному знанні механізмів, і при повній відсутності інформації про них (крайнощі зустрічаються!) без експериментальних процедур не обійтись. Тільки в першому випадку це буде обчислювальний експери-

мент із застосуванням моделювання, а другий вимагає організації серії польових експериментів безпосередньо на об'єкті.

Як при комп'ютерному експерименті, так і при оптимізації на об'єкті для пошуку екстремуму необхідно виконати ряд розрахунків (або експериментальних визначень) цільової функції. При оптимальному проектуванні, особливо багатокритеріальному, цільові функції розраховуються за складними алгоритмами, що вимагають великих обчислювальних ресурсів і обчислювального часу. Польове дослідження з проведенням кожного експериментального випробування може супроводжуватися значними витратами матеріалів, часу та інших ресурсів. Крім того, звичайною практикою під час експериментів є робота персоналу та обладнання в умовах, близьких до максимально допустимих. Все це свідчить про надзвичайну бажаність розробки таких ефективних процедур оптимізації, які дозволили б отримати бажані результати з мінімальною кількістю необхідних природних або обчислювальних експериментів. Таким чином, якщо складність визначення цільової функції велика [2], зменшення необхідної кількості таких визначень стає домінуючим критерієм ефективності оптимізаційного алгоритму. Слід віддавати перевагу алгоритмам, на кожному кроці яких витягується і використовується максимально можлива кількість інформації про цільову функцію. Ціною за це стає деяке ускладнення алгоритму та програми.

Нині в обчислювальній математиці в основному використовуються різні варіанти градієнтних методів. Суть їх полягає в заміні складної задачі оптимізації на послідовність простих локальних завдань, які не потребують апріорної інформації про природу цільової функції. Спочатку в малому околі початкової точки в просторі аргументів ставиться серія експериментів. Отримані дані використовуються для представлення локальної моделі цільової функції в околі початкової точки поліномом першого ступеня. Рух організовується з деяким кроком поверхнею цільової функції в напрямку градієнта лінійного наближення для досягнення умовного екстремуму. В отриманій точці виконується нове лінійне наближення, яке продовжується до тих пір, поки поточна точка не потрапляє в ту малу область простору аргументів, де знаходиться шуканий екстремум. Градієнтні методи засновані на локальній (поблизу поточної точки) моделі цільової функції і тому недостатньо ефективні. Застосування локальних властивостей змушує часто змінювати напрямок пошуку, що призводить до неефективної обчислювальної процедури. Для більшості градієнтних методів характерна необхідність евристичної специфікації початкової точки та кроку пошуку, що додає до процедури оптимізації елементи суб'єктивності та значно впливає на ефективність.

Нелокальний підхід передбачає апроксимацію цільової функції моделлю не в околі певної точки, а в усій області визначення. Чим краще нелокальна модель описує цільову функцію, тим ближче екстремум розрахунку до дійсного. Але у відомих версіях методики нелокальної апроксимації не мають великого практичного значення, оскільки алгоритми оптимізації критеріїв якості та алгоритми апроксимації суттєво відрізняються. Дійсно, в апроксимаційній задачі апроксимація може стосуватися всієї заданої області аргументів, а оптимізаційна — лише в околі шуканої точки екстремуму. Доцільно врахувати особливості розглянутих підходів і розробити більш ефективний метод оптимізації, позбавлений цих недоліків.

Постановка проблеми

Припустимо, дано компактну підмножину X (область аргументів оптимізації) скінченновимірному евклідовому простору E^n , ($n \geq 1$), що складається з елементів $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, на якій визначено обмежену знизу цільову функцію $f(x)$, що належать до деякого класу функцій: $f(x) \in \Phi$.

Необхідно, використовуючи кінцеву кількість оцінок функції $f(x)$, оцінити значення

$$f^*(x) = f(x^*) = \inf_{x \in X} f(x)$$

і знайти точку $x^* \in X$, в якій реалізується ця оцінка.

До оптимізаційних проблем належать ті, про які заздалегідь відомо, що

$$\inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x),$$

тобто в області X є єдиний мінімум функції $f(x)$. Якщо, використовуючи цю інформацію, визначити Φ як клас неперервних в околі екстремуму унімодальних за X функцій $f(x)$, а також зосередитися на ефективності обчислювального процесу, то задачу можна сформулювати так: використовуючи найменш можливе число обчислень функції $f(x)$, знайти

$$x^* = \arg \min_{x \in X} f(x).$$

Враховуючи, що визначення x^* можна задовольнити лише приблизно, мова йде про знаходження точки множини

$$X_\varepsilon = \{x \in X: \rho(x, x^*) \leq \varepsilon\}, \quad X_\varepsilon \subset X,$$

де ρ — метрика на X ; ε — допустима помилка в аргументі. Розглянута постановка досить загальна. Задачу максимізації отримуюємо заміною f на $-f$.

Спосіб розв'язання

Звертаючись до потенційно більш ефективного нелокального підходу, намагаємося позбутися його недоліків. Апроксимуємо функцію $f(x)$ на множині аргументів X деякою апроксимуючою функцією $F(x, a)$, відомою з точністю до вектора констант (коефіцієнтів) $a = \{a_j\}_{j=1}^m$. Форма функції $F(x, a)$ визначається наявною у дослідника інформацією про механізми процесів і явищ в оптимізованому об'єкті. Така інформація може значно покращити якість апроксимації. В ідеалі функція $F(x, a)$ настільки добре описує цільову функцію $f(x)$, що їхні екстремуми збігаються. На практиці цього не відбувається, тому вирішити задачу оптимізації відразу зазвичай неможливо.

Розглянемо декомпозицію складної задачі оптимізації на ітераційну послідовність більш простих нелокальних задач, причому кожна наступна задача розв'язується в меншій області аргументів, ніж попередня. Таким чином зменшується суперечність між алгоритмами апроксимації критеріїв якості та алгоритмами оптимізації, тому використовуємо переваги нелокального підходу. До нелокальної моделі $F(x, a)$ пред'являються вимоги унімодальності у відкритій області аргументів $x \in E^n$ і їх диференційованості. Апроксимаційній моделі $F(x, a)$ надається властивість адаптації шляхом вибору коефіцієнтів a на кожній ітерації, в області аргументів меншій, ніж на попередній ітерації.

Основна ідея побудови алгоритму полягає в наступному. На першій ітерації виконується апроксимація функції $f(x)$ нелокальною моделлю $F(x, a)$ у всьому початковому наборі аргументів X . У цій області виконуємо N обчислень функції $f(x)$ у різних точках (вузлах апроксимації), як компоненти базисних точок $S^{(0)}$. З отриманих даних розраховуємо початковий набір коефіцієнтів $a^{(0)}$, що дозволяє змінити модель $F(x, a)$ на вираз $F^{(0)}(x)$. Далі, виходячи з вимоги унімодальності апроксимуючої моделі у відкритій області, використовуємо необхідну умову функції

$$\partial F^{(0)}(x) / \partial x_i = 0, \quad i \in [1, n]$$

і знаходимо першу оцінку $x^{(1)}$ шуканого набору аргументів як розв'язання цієї системи рівнянь. Дискретна система базових точок $S^{(0)}$ є гомеоморфним відображенням початкової неперервної області X . Отримана нова точка $x^{(1)}$ вводиться в базову систему точок замість старої (зазвичай у ній $f(x)$ максимальна). Далі обчислення повторюється, щоб таким чином отримати нову систему базових точок $S^{(1)}$.

За властивістю гомеоморфізму

$$X^{(i+1)} \subset X^{(i)}, i = I, II, \dots$$

у тому сенсі, що гіпероб'єм, який займає компактна підмножина $X^{(i+1)}$ у просторі E^n , менший за гіпероб'єм, що відповідає підмножині $X^{(i)}$ (зазначені підмножини не обов'язково вкладені). Оскільки у меншій області функція $F(x, a)$ точніше описує функцію $f(x)$, отримуємо послідовність удосконалених нелокальних моделей з коефіцієнтами $a^{(0)}, a^{(I)}, a^{(II)}, \dots$. Звідси послідовність оцінок $x^{(I)}, x^{(II)}, x^{(III)}, \dots$, що сходяться, в принципі, до точки x^* істинного мінімуму функції $f(x)$.

Фактично, метод заснований на ітераційній побудові «пливучої» разом з системою базових точок $S^{(i)}$, уточненої за результатами експерименту нелокальної моделі $F(x, a^{(i)})$, причому сукупність опорних точок стискається і стягується до точки бажаного екстремуму («шагренева шкіра»). Таким чином, на кожній ітерації виконується одночасно і взаємозалежно як уточнення нашого розуміння цільової функції в області екстремуму, так і визначення такої оцінки аргументів екстремуму, що є адекватною рівню цих уявлень на цій ітерації. За даною ознакою описаний вище метод оптимізації відноситься до класу дуальних і може бути названий методом дуального програмування.

Ефективність описаного підходу, порівняно, наприклад, з градієнтними методами, пояснюється властивостями ітераційного уточнення нелокальних апроксимаційних моделей цільової функції, оскільки області аргументів стискаються, стягуючись до шуканої точки екстремуму. Тим самим усувається вищезгадане протиріччя між оптимізацією критеріїв якості та алгоритмами апроксимації.

Характерною особливістю запропонованого методу є те, що він не вимагає ні суб'єктивного встановлення початкової точки пошуку, ні будь-яких кроків пошуку — достатньо вказати область X , в якій знаходиться мінімум функції $f(x)$. Однак це не усуває можливість включити до вихідної базисної системи $S^{(0)}$ таку точку, яка з будь-яких причин здається перспективною. Але, як правило, дослідник повинен назвати лише розмір інтервалу (у багатовимірному випадку паралелепіпеда) невизначеності, який відповідає рівню його усвідомлення локалізації шуканого екстремуму.

Часто область X може бути визначена аналітично, наприклад, шляхом розрахунку області стабільності за методом D -декомпозиції з подальшою оптимізацією в отриманій області. Інший приклад — обчислення області Парето з подальшою оптимізацією в ній векторного критерію. У разі повної відсутності інформації інтервал невизначеності збігається з усією областю визначення параметрів оптимізації. І навпаки, якщо є достовірна інформація про розташування точки екстремуму, інтервал невизначеності вироджується до цієї точки, і необхідність у розв'язанні задачі оптимізації відпадає. У проміжних випадках значення інтервалу невизначеності, що надається дослідником, органічно відображає його усвідомлення до початку оптимізації. А потім описана формалізована процедура ітераційно усуває початкову область невизначеності.

Це характерно для дуальних методів, де процес визначення шуканої оцінки збігається з процесом вивчення цільової функції. Ефективність вищезазначеного

підходу до вирішення складних задач оптимізації ілюструється аналогією з біологічної еволюції. Якщо найпростіші істоти під час життєдіяльності використовують властивість тропізму (еквівалент руху за градієнтом), то вже кільчасті черв'яки для досягнення своїх цілей користуються навіть примітивними, але нелокальними моделями середовища. Властивість уточнення моделей при прийнятті рішень характерна для вищих організмів.

Жоден із методів оптимізації не можна назвати універсальним. Мистецтво дослідника [3] полягає у виборі методу, адекватного проблемі. Але для цього його інструментарій має бути достатньо повним. Запропонованим методам у багатьох випадках можна віддати перевагу і, у будь-якому випадку, вони розширюють можливості дослідників вирішити задачі прийняття рішень та оптимізації складних систем [4]. Запропонований метод дуального програмування актуальний для комп'ютерної оптимізації складних систем.

A. Voronin, A. Savchenko

THE DUAL METHOD OF PROGRAMMING

Albert Voronin

National Aviation University, Kyiv,
alnv@ukr.net

Alina Savchenko

National Aviation University, Kyiv,
a.s.savchenko@ukr.net

The optimization problem is interpreted as the choice of such a combination of arguments (independent variables) that, under given external influences and constraints, delivers an extremum of the objective function. The objective function reflects the concept of optimization criterion. With several criteria, the objective function has the meaning of a scalar convolution of the criteria. The essence of the concept of optimization is the extremization of the objective function. This applies to decision-making problems, and to management problems, and to other subject areas. A non-local method of mathematical programming is proposed, which makes it possible to reduce the number of necessary calculations of the objective function. In the optimal design, especially multi-criteria, objective functions are calculated on complex algorithms that require large computing resources and computing time. The proposed method of dual programming is relevant for computer optimization of complex systems.

Keywords: non-local method, dual programming, computational experiment, computer optimization, complex systems.

1. Воронин А.Н., Зиятдинов Ю.К., Ку克林ский М.В. Многокритериальные решения: модели и методы. Киев: НАУ, 2010. 348 с.
2. Albert Voronin. Multi-Criteria Decision Making for the Management of Complex Systems. USA: IGI Global, 2017. 201 p.
3. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979. 200 с.
4. Фишберн Р. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978. 352 с.

Отримано 25.05.2022