

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОГРАМОВАНИХ ТРАЄКТОРІЙ СТАБІЛІЗАЦІЇ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЗМІННОЇ СТРУКТУРИ

Тимченко Віктор Леонідович

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв
vl.timchenko58@gmail.com

Розглядаються оптимальні системи, що забезпечують для динамічних систем високі показники якості керування: швидкість, точність та низьку енерговитратність. Розвивається підхід до синтезу робастно-оптимальних систем на основі використання зворотних зв'язків зі змінною структурою та включає такі основні етапи: планування програмної оптимальної траєкторії; визначення моментів перемикання керуючих функцій у ланцюгах зворотного зв'язку об'єкта; синтез керуючих функцій у відповідних ланцюгах зворотного зв'язку багатовимірного об'єкта. Застосування запропонованого порядку синтезу систем зі змінною структурою для різних типів об'єктів на основі попередньої побудови оптимальних програмованих траєкторій стабілізації динамічних процесів дозволяє оптимізувати процеси стабілізації нелінійних нестационарних систем високого порядку. Оптимальні програмні траєкторії стабілізації формуються з відрізків, усталених відносно відповідної похідної координати руху, на основі поліноміальних форм для заданих граничних умов і критерію оптимальності з урахуванням обмежених значень керування і розв'язується для часу моментів перемикання керуючих впливів і часу закінчення перехідного процесу на основі системи алгебраїчних рівнянь. Синтез керування проводиться з урахуванням початкових значень на основі рівнянь балансу сил і моментів, що діють на рухомий об'єкт, та їх похідних. Оптимальні траєкторія та керування формуються таким чином, що задають при синтезі додаткового робастного контуру керування (зі зворотним зв'язком за виходом об'єкта) для компенсації неповної визначеності математичної моделі та неконтрольованих (невимірюваних) збурень і шумів, достатньо обмежені області зміни координат рухомого об'єкта відносно заданих значень. Це в подальшому дозволяє побудову достатньо ефективних та практичних в реалізації робастно-оптимальних систем керування, наприклад морськими рухомими об'єктами, квадрокоптерами, що функціонують в умовах неповної визначеності.

Ключові слова: рухомі об'єкти, нелінійні нестационарні моделі, оптимізація, програмовані траєкторії, критерії оптимальності.

Вступ

Перспективним та ефективним напрямком розвитку сучасних систем керування рухомими об'єктами різного призначення представляються методи синтезу робастно-оптимальних систем, основи яких закладені в [1, 2] та в публікаціях інших авторів і розвиваються в подальших роботах, наприклад, в [3–5]. Ці методи дозволяють розв'язувати дуальну задачу: оптимальне керування в умовах неповної визначеності. Вимоги оптимальності процесів керування визначаються насамперед необхідністю зниження енергетичних витрат за умов обмежених ресурсів керування чи максимальної швидкодії перехідних процесів у критичних режимах функціонування об'єкта керування. При цьому на першому етапі синтезується оптимальна система керування на основі сформованої максимально математично

точної динамічної моделі об'єкта та навколишнього середовища з урахуванням інформації розвинутої системи сенсорів та датчиків, що в повній мірі вимірюють координати об'єкта керування та параметри середовища. На другому етапі синтезується робастний контур, який компенсує неповну визначеність щодо параметрів моделі, шумів вимірювання та значень неконтрольованих зовнішніх збурень. При синтезі оптимального керування динамічними системами застосовуються методи, створені переважно на основі класичного варіаційного обчислення. Це призводить до необхідності формування багатовимірних крайових задач зі складно визначеними додатковими функціями Лагранжа та обчислювальними труднощами розв'язання у реальному часі систем вище третього порядку. Альтернативний шлях синтезу на основі використання рівняння Ріккатті застосовується для критерію мінімуму витрати енергії та обмежений квазістаціонарними рішеннями. При цьому класичні критерії оптимальності базуються на застосуванні матриць вагових коефіцієнтів, формалізація яких достатньо ускладнена, і в той же час значення вагових коефіцієнтів безпосередньо входять до виразів для синтезованого керування, що при некоректному завданні коефіцієнтів знижує ефективність процесу оптимізації [6]. Необхідно також відзначити застосування класичних методів управління в основному для лінійних стаціонарних динамічних систем, що істотно звужує клас можливих моделей об'єктів керування.

Складність синтезу керування багатовимірними об'єктами зумовила розробку підходу до формування бажаних траєкторій на основі розв'язання зворотних задач динаміки. Симетрія рішень моделювання руху та синтезу керування дозволила зосередитися на розробці програмованих траєкторій рухомих об'єктів на початковому етапі синтезу керування. Ці методи спрощують синтез оптимального керування, оскільки не вимагають вирішення рівнянь Ріккатті чи крайових задач. При формуванні відповідних вимог до керованого процесу і бажаних (оптимальних) траєкторій рухомого об'єкта синтез ґрунтується на розв'язанні зворотних задач динаміки з високою динамічною точністю та забезпеченням стійкості процесів [7–9].

Завдання синтезу оптимальних стабілізаційних систем для вихідних координат різних рухомих об'єктів, включаючи забезпечення додаткових показників якості перехідного процесу, вирішуються на основі алгебраїчних рівнянь матриці Ляпунова за квадратичним критерієм шляхом синтезу оптимальних контролерів у статичних і динамічних зворотних зв'язках. Слід зазначити, що обчислювальна складність аналітичного проектування субоптимальних контролерів значно зростає зі збільшенням порядку керованого об'єкта і ускладнює їх практичне застосування при синтезі систем керування [10, 11].

Використання принципів модального керування та формули Акермана передбачає евристичні припущення про оптимальність перехідного процесу та дозволяє формувати бажані траєкторії для різних розподілів параметрів для забезпечення відповідного типу перехідного процесу. До методів оптимізації процесів керування рухомими об'єктами також належать: підходи з використанням функцій Ляпунова; системи зі статичними зворотними зв'язками, що ґрунтуються на використанні лінійних матричних нерівностей; побудова обмеженого зворотного зв'язку із забезпеченням додаткових властивостей перехідних процесів; формування ковзних режимів; системи стабілізації на основі кількісної теорії зворотного зв'язку; H_∞ -синтезу та інших підходів [12–17]. При синтезі скалярного керування досить умовно надаються відповідні додаткові матриці параметрів. Також розроблені методи високої обчислювальної ефективності, засновані на H -оптимізації для динамічних систем високого порядку, але обмежені в основному лінійними системами.

Можливий підхід до синтезу робастно-оптимальних систем базується на використанні зворотних зв'язків зі змінною структурою та включає такі основні етапи: планування програмованої оптимальної траєкторії; визначення моментів перемикання керуючих функцій у ланцюгах зворотного зв'язку об'єкта; синтез керуючих функцій у відповідних ланцюгах зворотного зв'язку багатовимірного об'єкта. Основні особливості та методи побудови алгоритмічних процедур синтезу керування викладено для моделей морських рухомих об'єктів та квадрокоптерів в роботах [18–20], узагальнений підхід щодо рухомих об'єктів різного виду представлено в [21, 22].

Принципи формування програмованих траєкторій стабілізації

Програмовані (оптимальні) траєкторії стабілізації рухомого об'єкта можуть бути сформовані з використанням поліноміальних або експоненціальних форм, між якими існує тісний зв'язок, бо звичайно експоненту можна представити як нескінченний поліноміальний ряд. Але саме обмежене першими членами ряду поліноміальне представлення значно спрощує процес формування програмованих траєкторій, як відрізків усталених відносно відповідної похідної координати рухомого об'єкта, та подальший синтез керування, що забезпечує рух за сформованими бажаними (оптимальними) траєкторіями. Формалізація виду поліноміальної траєкторії визначається вимогами до оптимальності процесу керування, його типу та значеннями граничних умов, а також обмеженнями на керуючий вплив. При цьому поліноміальна форма траєкторій має такі переваги:

- можливість точної побудови оптимальних траєкторій у вигляді відрізків усталеного руху щодо різних похідних змінних координат рухомого об'єкта, що забезпечується відповідним балансом сил і моментів, що діють на об'єкт, та їх похідних;
- незалежне формування траєкторій з кожної координати для розширених багатовимірних нелінійних нестационарних моделей рухомих об'єктів;
- знаходження точок переходу між відрізками усталених траєкторій на основі рішення системи алгебраїчних рівнянь з урахуванням заданих граничних умов;
- синтез оптимального керування здійснюється для прямих умов оптимальності, які характеризуються мінімальним часом стабілізації, або витрат кінетичної енергії (витрата потенційної енергії для просторового руху рухомого об'єкта визначається значенням заданої вертикальної координати об'єкта);
- урахування максимальних/мінімальних обмежень на керування відбувається безпосередньо при формуванні програмованих траєкторій.

Траєкторії стабілізації рухомих об'єктів визначаються граничними умовами, при цьому найбільш універсальним способом їхнього завдання будуть точки фазових траєкторій (або значення змінних стану) для різних видів керування: переміщення в задану точку тривимірного простору, послідовність точок заданої траєкторії або сукупність точок допустимої області тощо. Можна вважати, що для кожної конкретної задачі стабілізації відповідним чином задаються граничні умови, але порядок формування траєкторії базується на переміщенні в задану сукупність кінцевих точок координат рухомого об'єкта.

Розглянемо просторовий рух об'єкта без урахувань зовнішніх збурень, які розділяються на вимірювані (контрольовані) та невимірювані (неконтрольовані), та в свою чергу вимірювані складові можуть враховуватися при синтезі програмного керування, а невимірювані — при синтезі робастного. Систему рівнянь для узагальненої нелінійної нестационарної моделі керованого рухомого об'єкта у векторно-матричній формі запишемо у змінних стану

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{X}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_{\mathbf{X}}(t)\mathbf{U}(t), \quad (1)$$

де \mathbf{X} — вектор, розмірністю (12*1) керованих координат; \mathbf{U} — вектор, розмірністю (12*1) керувань; $\mathbf{A}_{\mathbf{X}}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{X}}$ — матриці, розмірністю (12*12) параметрів рухомого об'єкта, що залежать від керованих координат та часу.

Матриця $\mathbf{A}_{\mathbf{X}}$ формується з демпфуючої складової, що враховує сили тертя, пружності та аерогідродинамічного опору $\mathbf{A}'_{\mathbf{X}}$, а також складової \mathbf{A}'' , що визначає зв'язок між змінними стану. Для узагальненої моделі врахуємо тільки сили аерогідродинамічного опору, і тоді робота при русі об'єкта (за відсутності зовнішніх збурень) за траєкторіями стабілізації виконується керуючими та демпфуючими силами. Для оцінки витрат енергії через демпфуючі сили необхідно ввести дисипативну функцію Релея у вигляді інтегралу квадратичної форми

$$D(\dot{\mathbf{X}}_j) = -0,5 \int_0^T \dot{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{A}'_{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}_j dt, \quad (2)$$

де $\dot{\mathbf{X}}_j$ — фізичні швидкості руху об'єкта керування за кожен j -ю координату ($j = 1, \dots, 6$).

Для оптимізації задачі мінімальних енерговитрат на основі рівнянь (1), (2) сформуємо функціонал, що мінімізується, у вигляді функції Лагранжа:

$$L = -0,5 \dot{\mathbf{X}}_j^T \mathbf{A}'_{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}}_j + 0,5 \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U} + \lambda^T (\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{A}_{\mathbf{X}} \mathbf{X} - \mathbf{B}_{\mathbf{X}} \mathbf{U}). \quad (3)$$

Знаходження екстремуму для функції Лагранжа (3) моделі нелінійного нестационарного об'єкта — достатньо складна задача, тому для ілюстрації отримання відповідного розв'язання у вигляді поліноміальних траєкторій стабілізації об'єкта керування розглянемо лінійну стаціонарну систему спочатку при русі без аерогідродинамічного опору (класична задача керування у космічному просторі; при цьому $\mathbf{A}'_{\mathbf{X}}$ — нульова матриця):

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}'' \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \mathbf{U}(t) \quad (4)$$

та запишемо для функції Лагранжа

$$L = 0,5 \mathbf{U}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{U}(t) + \lambda^T(t) [\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{A}'' \mathbf{X}(t) - \mathbf{B} \mathbf{U}(t)]. \quad (5)$$

Екстремум функціонала (5) визначається рівнянням Ейлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{X}}(t)} = -(\mathbf{A}'')^T \lambda(t) - \dot{\lambda}(t) = 0 \quad (6)$$

та для керування —

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}(t)} = \mathbf{Q} \mathbf{U}(t) - \mathbf{B}^T \lambda(t) = 0. \quad (7)$$

З рівняння (7) оптимальне керування можна записати наступним чином:

$$\mathbf{U}_{\text{opt}}(t) = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda(t). \quad (8)$$

Матриці \mathbf{A}'' та $(\mathbf{A}'')^T$ матимуть вигляд для системи шостого порядку (аналогічні вирази будуть і для повної моделі рухомого об'єкта):

$$\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{A}'')^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси та з рівняння (6) матимо розв'язання для λ_i наступного виду:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{X}}(t)} = -(\mathbf{A}'')^T \boldsymbol{\lambda}(t) - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = 0 \quad \text{для } i = 1, 3, 5;$$

$$\lambda_i(t) = -C_i t + C_j \quad \text{для } i = 2, 4, 6,$$

де C_i, C_j — постійні часу, що визначаються на основі заданих граничних умов і часу керування. Це дає відповідні поліноміальні вирази для керування після підстановки в рівняння (8) та далі для рівнянь (4) оптимальних траєкторій

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}'' \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(t). \quad (9)$$

Для більш повної задачі керування рухомим об'єктом, якщо матриця $\mathbf{A}'_{\mathbf{X}}$ не буде нульовою, отримуємо для багатовимірною лінійного стаціонарного об'єкта складну для розв'язання крайову задачу. Для уникнення значного ускладнення задачі синтезу оптимального керування та оптимальних траєкторій пропонується на першому етапі визначити оптимальні траєкторії, використовуючи їх поліноміальний вигляд, для прямих умов оптимальності та з урахуванням заданих граничних умов.

Представимо траєкторії об'єкта, який здійснює рівномірний (щодо швидкості з нульовим прискоренням) або рівномірно прискорений (щодо прискорення з нульовою третьою похідною), або усталений відносно третьої похідної (з нульовою четвертою похідною) і далі, усталене для $(m-1)$ -ї похідної (нульової m -ї похідної), рух.

Динамічне рівняння руху лінійного стаціонарного об'єкта на основі (9) на відрізку траєкторії, обмеженої часом $0 \div T$, прийме вигляд для нульової m -ї похідної

$$\left[\dot{\mathbf{X}}_0 + \ddot{\mathbf{X}}_0 T + \dots + \frac{\mathbf{X}_0^{(m)}}{(m-1)!} \right] = \mathbf{A} \left[\mathbf{X}_0 + \dot{\mathbf{X}}_0 T + \dots + \frac{\mathbf{X}_0^{(m)}}{(m)!} \right] + \mathbf{B} \mathbf{U}(t), \quad (10)$$

де $\mathbf{X}_0^{(i)}$ — початкові значення керованих координат та їх похідних, $i = 0, \dots, m$.

При цьому з рівняння (10) отримуємо для керування, що забезпечує рух на заданому відрізку траєкторії, вираз

$$\mathbf{U}(T) = \sum_{i=0}^{m-2} \mathbf{U}_0^{(i)} \frac{T^i}{i!}, \quad (11)$$

де порядок m та значення $\mathbf{U}_0^{(i)}$ обмежені фізичними можливостями компонентів рушіїв керування.

Траекторія стабілізації рухомого об'єкта з початкового відрізка на заданий відрізок траекторії в момент часу перемикання t_i^s за умови, що керуючий вплив (11) обмежений тільки здатністю його реалізації, описується системою таких векторних рівнянь:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_i^s) &= \mathbf{X}(t_{i-1}^s) + \dots + \mathbf{X}^{(m-1)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^{m-1}}{(m-1)!} \pm \mathbf{X}^{(m)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^m}{m!}, \\ \dot{\mathbf{X}}(t_i^s) &= \dot{\mathbf{X}}(t_{i-1}^s) + \dots + \mathbf{X}^{(m-1)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^{m-2}}{(m-2)!} \pm \mathbf{X}^{(m)}(t_{i-1}^s) \frac{(t_i^s - t_{i-1}^s)^{m-1}}{(m-1)!}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathbf{X}^{(m-1)}(t_i^s) &= \mathbf{X}^{(m-1)}(t_{i-1}^s) \pm \mathbf{X}^{(m)}(t_{i-1}^s)(t_i^s - t_{i-1}^s), \end{aligned} \quad (12)$$

де $\mathbf{X}(t_i^s)$ — вектор змінних стану рухомого об'єкта; t_i^s — моменти перемикання керуючих функцій на i -му відрізку траекторії.

Завдання визначення необхідного часу $(t_i^s - t_{i-1}^s)$ руху на кожному відрізку траекторії розв'язується з урахуванням рішення системи алгебраїчних рівнянь (12) для заданих граничних умов.

Прямі умови оптимальності траекторій

При формуванні критеріїв оптимальності процесів керування рухомими об'єктами можна спиратися на розділення функціональних вимог: мінімальні енерговитрати в робочих (технологічних) режимах керування рухомим об'єктом (з урахуванням витрат енергії на стабілізацію літального об'єкта на заданій висоті) та максимальну швидкість при критичних, екстремальних режимах роботи.

Для першого визначеного завдання оптимального керування формуються вимоги забезпечення оптимальної траекторії $\mathbf{X}_{\text{opt}}(t)$ стабілізації динамічної системи за всіма заданими керованими координатами з виконанням оптимального критерію мінімальної витрати енергії управління $\mathbf{U}(t)$

$$J = \int_0^T Q(\mathbf{X}, \mathbf{U}) dt = \min. \quad (13)$$

Друге завдання визначає задачу максимальної швидкодії перехідних процесів у динамічних системах та забезпечує мінімальний інтервал часу перехідного процесу

$$J = \int_0^T dt = \min. \quad (14)$$

Для формування умов оптимальності траекторій на основі оцінки витрат кінетичної енергії у горизонтальній площині й рівних граничних умовах розглянемо процес стабілізації рухомого об'єкта на двох можливих траекторіях, які описуються наступними рівняннями:

$$\mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(0) + \dot{\mathbf{X}}(0)T_1 + \dots + \mathbf{X}^{(l)}(0) \frac{T_1^l}{l!}, \quad (15)$$

$$\mathbf{X}(T_2) = \mathbf{X}(0) + \dot{\mathbf{X}}(0)T_2 + \dots + \overset{(r)}{\mathbf{X}}(0) \frac{T_2^r}{r!}, \quad (16)$$

де $\mathbf{X}(0)$, $\mathbf{X}(T_1) = \mathbf{X}(T_2)$ — вектори початкових і кінцевих координат стану; T_1, T_2 — час руху за кожною траєкторією; $l > r$ — порядок вищих похідних вектора координат.

Зміна кінетичної енергії рухомого об'єкта для траєкторії (15) матиме вигляд

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{X}}^T(T_1) \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}(T_1) - \dot{\mathbf{X}}^T(0) \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}(0)],$$

де $\dot{\mathbf{X}}(T_1) = \dot{\mathbf{X}}(0) + \ddot{\mathbf{X}}(0)T_1 + \dots + \overset{(l)}{\mathbf{X}}(0) \frac{T_1^{l-1}}{(l-1)!}$; \mathbf{M} — матриця мас і моментів інерції об'єкта; для траєкторії (16) —

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{X}}^T(T_2) \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}(T_2) - \dot{\mathbf{X}}^T(0) \mathbf{M} \dot{\mathbf{X}}(0)],$$

де $\dot{\mathbf{X}}(T_2) = \dot{\mathbf{X}}(0) + \ddot{\mathbf{X}}(0)T_2 + \dots + \overset{(r)}{\mathbf{X}}(0) \frac{T_2^{r-1}}{(r-1)!}$.

Для оцінки енергії, необхідної для переходу об'єкта керування з початкового стану у заданий кінцевий стан за траєкторією (15), отримаємо з урахуванням представлення квадратичної форми

$$\begin{aligned} \Delta E_1 &= E_{1T} - E_{10} = \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(T_1) \dot{x}_k(T_1) - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \left[\dot{x}_i(0) + \dots + \frac{\overset{(l)}{x}_i(0) T_1^{l-1}}{(l-1)!} \right] \left[\dot{x}_k(0) + \dots + \frac{\overset{(l)}{x}_k(0) T_1^{l-1}}{(l-1)!} \right] - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0). \end{aligned}$$

Для траєкторії (16) маємо

$$\begin{aligned} \Delta E_2 &= E_{2T} - E_{20} = \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(T_2) \dot{x}_k(T_2) - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \left[\dot{x}_i(0) + \dots + \frac{\overset{(r)}{x}_i(0) T_2^{r-1}}{(r-1)!} \right] \left[\dot{x}_k(0) + \dots + \frac{\overset{(r)}{x}_k(0) T_2^{r-1}}{(r-1)!} \right] - \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{x}_i(0) \dot{x}_k(0). \end{aligned}$$

Припустимо, $\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2 > 0$. Для доказу даного твердження за умови $x_i(0) > 0$, а також прийняття $l = r + 1$ досить розглянути позитивність виразів виду $[m_{ik} \dot{x}_i(T_1) - m_{ik} \dot{x}_i(T_2)]$; $[m_{ik} \dot{x}_k(T_1) - m_{ik} \dot{x}_k(T_2)]$; $[m_{ik} \dot{x}_i(T_1) \dot{x}_k(T_1) - m_{ik} \dot{x}_i(T_2) \dot{x}_k(T_2)]$, або, що тотожно, виду $[\dot{x}_i(T_1) - \dot{x}_i(T_2)] > 0$, $[\dot{x}_k(T_1) - \dot{x}_k(T_2)] > 0$.

Тоді, наприклад, для i -ї координати об'єкта запишемо

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i(0)T_1 + \dots + x_i(0) \frac{T_1^r}{(r)!} - \dot{x}_i(0)T_2 - \dots - x_i(0) \frac{T_2^{r-1}}{(r-1)!} = \\ &= \dot{x}_i(0)(T_1 - T_2) + \dots + x_i(0) \frac{T_1^r - T_2^r}{(r)!} + x_i(0) \frac{T_2^r}{(r)!} = S_i + x_i(0) \frac{T_2^r}{(r)!} > 0, \quad (17) \end{aligned}$$

де $S_i = \dot{x}_i(0)(T_1 - T_2) + \dots + x_i(0) \frac{T_1^r - T_2^r}{r!}$.

У той же час за умови $x_i(T_1) = x_i(T_2)$ можна записати

$$\begin{aligned} x_i(0) + \dot{x}_i(0)T_1 + \dots + x_i(0) \frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} - x_i(0) - \dot{x}_i(0)T_2 - \dots - x_i(0) \frac{T_2^r}{r!} = \\ = S_i + x_i(0) \frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Оскільки $x_i(0) \frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} > 0$, то з (18) слідує $S_i < 0$, що можливо при $T_1 < T_2$.

Таким чином, траєкторія (15) описує рух з більшою швидкістю порівняно з траєкторією (16).

Одержавши з рівняння (18) проміжну суму S_i , підставляємо її у (17) і для умови $\Delta E > 0$ маємо вираз

$$x_i(0) \frac{T_2^r}{(r)!} - x_i(0) \frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!} > 0.$$

З урахуванням $T_2 > T_1$ запишемо

$$x_i(0) \frac{T_2^r}{(r)!} > x_i(0) \frac{T_1^r}{(r)!},$$

а також, прийнявши для траєкторій руху досліджуваних динамічних об'єктів умови

$$x_i(0) \frac{T_1^r}{(r)!} > x_i(0) \frac{T_1^{r+1}}{(r+1)!},$$

одержимо нерівність (17).

Робота при русі об'єкта (за відсутності зовнішніх збурень) на траєкторіях виду (15) і (16) обумовлена зміною кінетичної енергії, відповідно, ΔE_1 і ΔE_2 , що створюється керуючими й демпфуючими (аерогідродинамічного опору) силами. Для оцінки енергетичних витрат, обумовлених силами демпфірування, використаємо дисипативну функцію Релея (2). Порівняльний аналіз дисипативних функцій демпфірування для траєкторій (15) і (16), проведений аналогічно розглянутому аналізу загальних витрат кінетичної енергії, показує виконання умови $D(\dot{\mathbf{X}}(T_1)) > D(\dot{\mathbf{X}}(T_2))$ для $[\dot{x}_i(T_1) - \dot{x}_i(T_2)] > 0$, $[\dot{x}_k(T_1) - \dot{x}_k(T_2)] > 0$, що при виконанні (17) означає для траєкторії (15) порівняно більші із траєкторією (16) витрати енергії на керуючий вплив.

Приведені дослідження дозволяють зробити висновок щодо прямих умов оптимальності для практичної побудови траєкторій динамічного об'єкта при позитивних значеннях похідних вектора координат. Траєкторія для заданих граничних умов буде оптимальна за критерієм максимальної швидкодії (14), кількістю та значеннями похідних відповідної координати, з урахуванням обмежень на керуючий вплив: $T = \min \rightarrow x_{i\text{opt}}^{(k)}(t)$ для заданих $x_i^{(k)}(t_0)$; $x_i^{(k)}(T)$ при

$$\max_k \max_{x_i(t_0)}^{(k)} \left\{ \dot{x}_i [x_i(t_0), t] \right\} \quad (19)$$

та умові $x_i(t_0) = f\{x_i(t_0), u_{i \max}\}^{(k)}$.

Для траєкторії з мінімумом витраченої енергії матимемо умови оптимальності (які на відміну від критерію (13) не потребують визначення вагової матриці):

$$E = \min \rightarrow x_{i \text{opt}}(t) \text{ для заданих значень } x_i(t_0); x_i(T) \text{ при}$$

$$\min_k \min_{x_i(t_0)}^{(k)} \left\{ \dot{x}_i [x_i(t_0), t] \right\}. \quad (20)$$

Наведені результати ілюструють для системи четвертого порядку порівняльний аналіз траєкторій переміщень (рис. 1), швидкостей (рис. 2) та керувань (рис. 3) (за відсутності дій демфуючих сил), сформованих за критерієм максимальної швидкодії (безперервна лінія, змінні визначені індексом *A*, витрати енергії керування — 27,8 у.о.) та мінімальних витрат енергії керування (переривчаста лінія змінні визначені індексом *B*, витрати енергії — 22,25 у.о.).

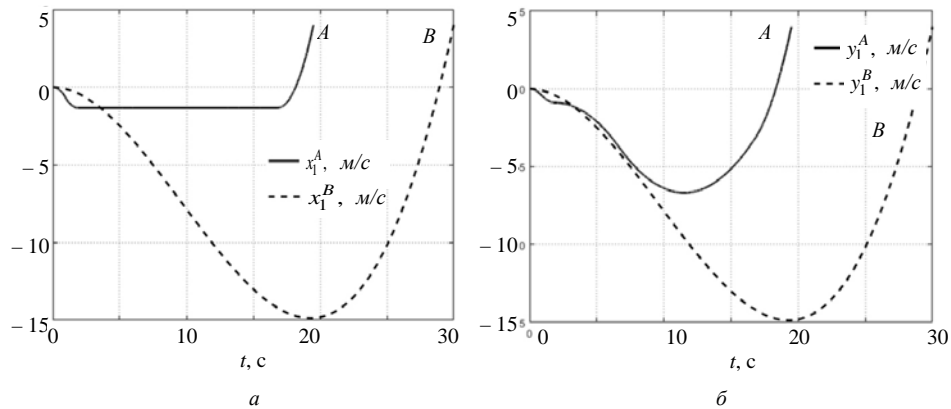


Рис. 1

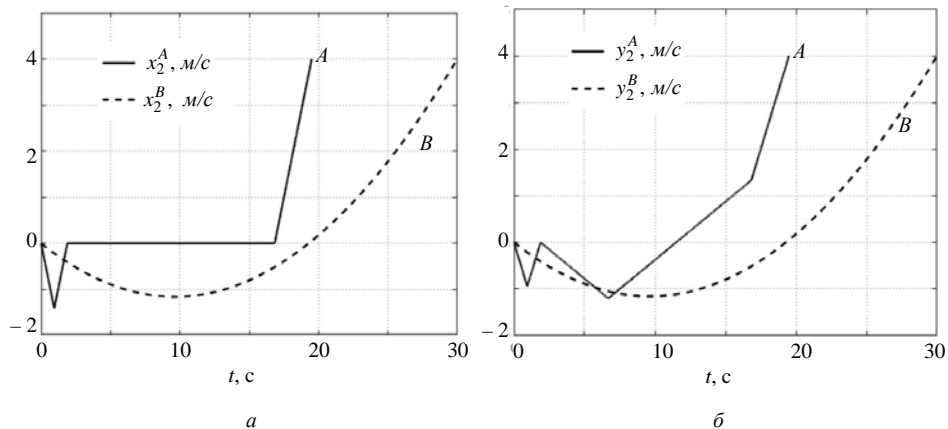


Рис. 2

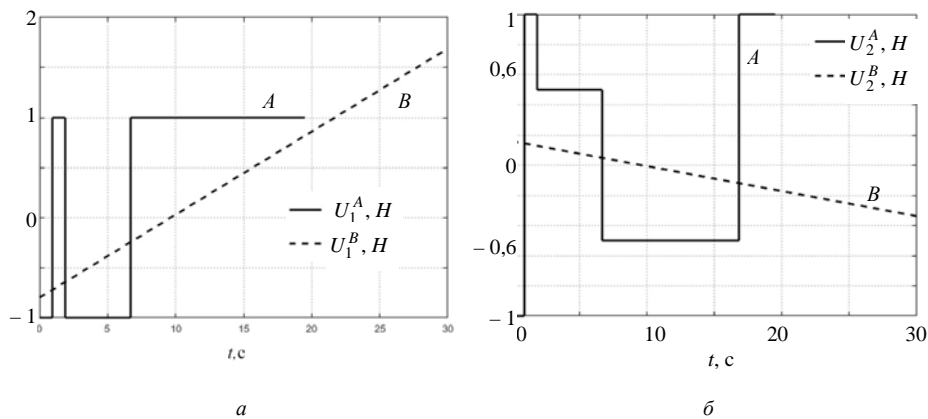


Рис. 3

Алгоритми визначення моментів перемикання керуючих впливів

Аналіз існуючих та перспективних завдань керування рухомими об'єктами показує можливість обмежити кількість оптимізованих керованих координат трьома основними. Для надводного морського рухомого об'єкта (судна) — це стабілізація в горизонтальній площині для поздовжнього і поперечного лінійного переміщення, а також обертового руху (нишпорення) навколо осі, що проходить через центр тяжіння та визначається кутом курсу. Інші види качання практично некеровані — бічна, що характеризується кутом крену (частково керована для дуже обмеженого типу суден з активними заспокійниками качання), кільова, яка визначається кутом диференту, та вертикального переміщення (качки) судна.

Автоматичні режими керування просторовими рухомими об'єктами (підводні об'єкти, квадрокоптерні безпілотні літальні апарати) характеризуються, з точки зору оптимального керування, трьома основними координатами: лінійними швидкостями (чи переміщеннями), при цьому кутові змінні, що визначають орієнтацію квадрокоптера, мають відносно незначні амплітуди та достатньо ефективно керуються ПД-регуляторами. Наприклад, для квадрокоптерів малі змінні крену і тангажу забезпечують переміщення об'єкта за лінійними координатами, а ниспорення повинно утримуватися в межах нульових значень.

Таким чином, для спрощення найбільш загального завдання оптимального керування рухомими об'єктами можна виділити в ієрархії керованих координат три старші, що визначають основне завдання керування, і три молодші (допоміжні). Відповідно для основних завдань оптимального керування рухомими об'єктами старших змінних стану буде загалом шість (наприклад, лінійні переміщення та швидкості для квадрокоптера).

Зазначимо також, що застосування запропонованого підходу дозволяє використовувати диференційні рівняння для синтезу керування рухомого об'єкта у формі відносно швидкостей руху, а переміщення та кути визначаються за допомогою алгебраїчної системи траєкторій руху виду (12) для відповідних граничних умов, на відміну від класичних методів, де саме динамічна система розширюється за рахунок змінних стану, бо потребує розв'язання для всіх граничних умов, включаючи переміщення (кути) та швидкості.

Розглянемо завдання керування для критерію максимальної швидкодії перехідних процесів (19) в динамічних системах, що виражається в забезпеченні мінімального інтервалу часу $0 \div T$. Тоді для загальної задачі керування траєкторію рухомого об'єкта в перехідному режимі для кожної з трьох старших координат можна подати у вигляді відрізків «розгону» та «гальмування», кількість яких визначається кількістю (порядком) керованих координат. Оскільки час перехідного

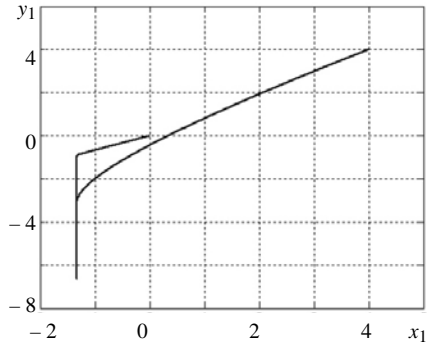
процесу за кожною керованою координатою у загальному випадку буде різним, виникає необхідність при досягненні заданих (чи розрахованих) контрольних значень за якоюсь координатою (назвемо її провідною, що має порівняно більш потужне керування) її подальше фіксування в контрольній точці до досягнення іншими координатами своїх заданих контрольних значень. Друга за швидкістю координата зі старших буде супровідною, а третя, що найповільніше змінюється, буде веденою. Провідна, супровідна і ведена координати визначаються на основі розрахунку часу перехідного процесу для кожної керованої координати відповідно до заданого кінцевого стану рухомого об'єкта.

Врахування обмежень на керуючий вплив фізичних рушіїв обмежує кількість можливих керованих похідних координати та їх значення, що впливає на форму оптимальної траєкторії та враховується при її розрахунку. Розроблено алгоритми для багатомірної системи при заданих граничних умовах і значеннях похідних вектора координат об'єкта з урахуванням керуючих обмежень. Ці алгоритми базуються на розв'язуванні систем алгебраїчних рівнянь у формі (12) і включають вибір провідної, супровідної та веденої координати, формування оптимальних траєкторій та визначення відповідної послідовності моментів перемикаць керуючих функцій у зворотних зв'язках керованого об'єкта.

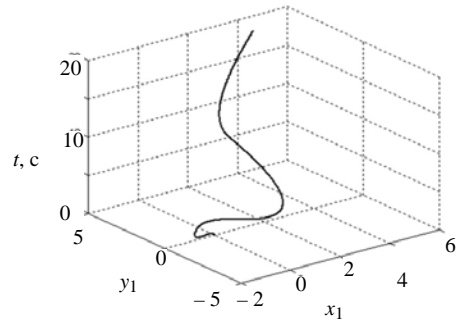
Для побудови оптимальної траєкторії за максимальною швидкістю (19) та визначення моментів перемикаць з урахуванням максимальних обмежень на керуючу дію формується алгоритм, наприклад, для системи шостого порядку:

- розрахунок необхідного часу для переходу в задане значення для кожної керованої координати розв'язанням системи рівнянь руху (12), складених на основі виду оптимальних траєкторій з урахуванням обмежень на керуючий вплив, необхідних умов оптимальності та заданих граничних умов;
- розрахунок кількості та координат контрольних точок, через які повинні проходити траєкторії керованих координат для попадання в задану кінцеву точку;
- визначення провідної, супровідної та веденої координат, при цьому провідна координата визначається за найменшим необхідним часом переходу в контрольну точку, а супровідною буде координата, у якій необхідний час для переходу в контрольну точку більший, ніж у провідної, але менший веденої;
- переведення провідної координати в контрольну точку (при цьому супровідна та ведена координати переміщуються у довільні точки), фіксація провідної координати та розрахунок проміжних значень супровідної та веденої координат;
- визначення траєкторії переведення та фіксація супровідна координати в контрольній точці (при цьому ведена координата переміщується у довільну точку) з урахуванням додаткових обмежень на керуючий вплив, які викликані необхідністю фіксації провідної координати;
- визначення траєкторії переходу веденої координати в контрольну точку з урахуванням додаткових обмежень на керуючий вплив, що визначаються необхідністю фіксації провідної та супровідної координат, та перехід веденої координати;
- переведення всіх координат у заданий кінцевий стан.

Результати моделювання (див. рис. 4–6) демонструють траєкторії стабілізації рухомого об'єкта четвертого порядку, реалізовані на основі наведеного вище алгоритму (шляхом його спрощення для двох керованих координат — провідної: переміщення x_1 і швидкості x_2 та веденої: переміщення y_1 і швидкості y_2); графіки керувань (рис. 7) за відсутності дії демфуючих сил (при нульовій матриці $\mathbf{A}'_{\dot{x}}$) та керувань (рис. 8) для траєкторій виду (див. рис. 2–4) при дії демфуючих сил (ненульовій матриці $\mathbf{A}'_{\dot{x}}$) (див. рис. 8).

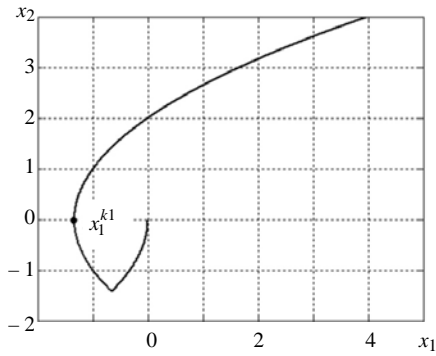


a

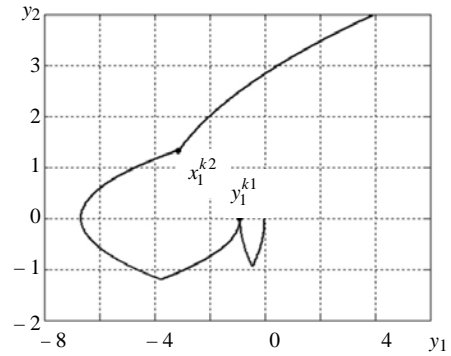


б

Рис. 4

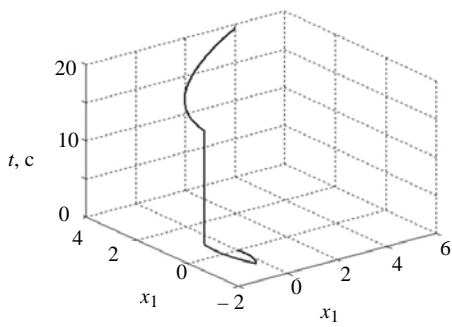


a

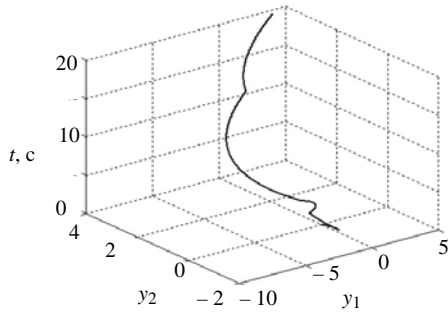


б

Рис. 5



a



б

Рис. 6

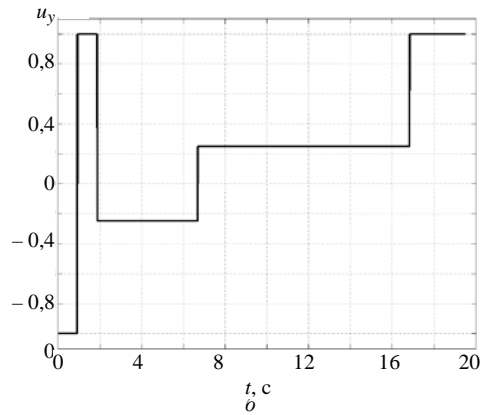
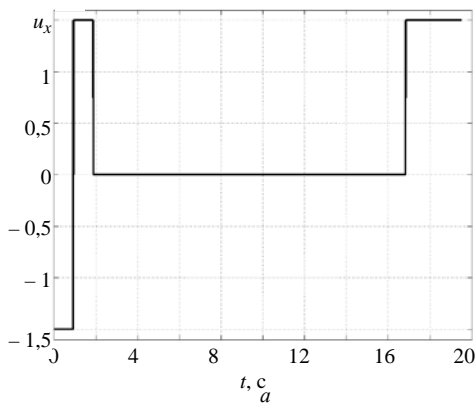


Рис. 7

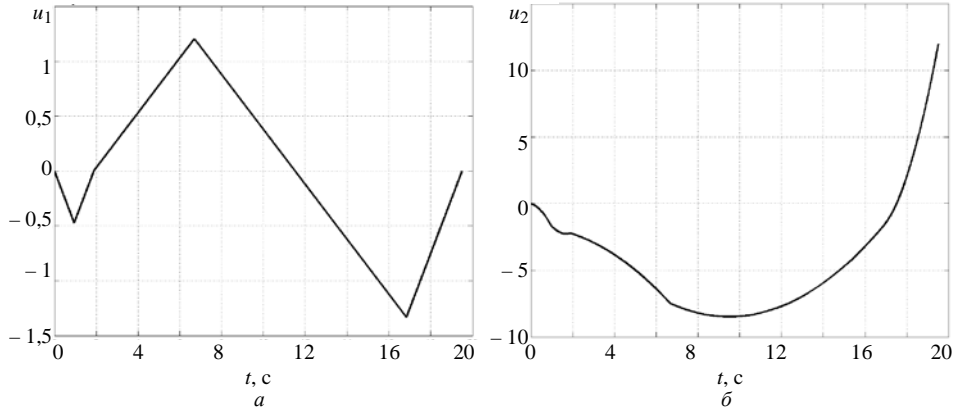


Рис. 8

Синтез керування, що забезпечує рух за оптимальними траєкторіями

Представимо відрізки траєкторії стабілізації нелінійного нестационарного рухомого об'єкта щодо відповідної усталеної координати як баланс сил і моментів, що діють на рухомий об'єкт, та їх похідних. Після диференціального перетворення рівняння (1) отримаємо:

- для нульової першої похідної $\dot{\mathbf{X}}(t) = 0$

$$\mathbf{A}_X \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_X \mathbf{U}(t) = 0; \quad (21)$$

- для нульової другої похідної $\ddot{\mathbf{X}}(t) = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{X}(t) + \mathbf{A}_X \dot{\mathbf{X}}(t) + \dot{\mathbf{B}}_X \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}_X \dot{\mathbf{U}}(t) = \\ = (\dot{\mathbf{A}}_X + \mathbf{A}_X^2) \mathbf{X}(t) + (\mathbf{A}_X \mathbf{B}_X + \dot{\mathbf{B}}_X) \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}_X \dot{\mathbf{U}}(t) = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

- для нульової третьої похідної $\dddot{\mathbf{X}}(t) = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{A}}_X \mathbf{X}(t) + \dot{\mathbf{A}}_X \dot{\mathbf{X}}(t) + \dot{\mathbf{A}}_X \dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{A}_X \ddot{\mathbf{X}}(t) + \ddot{\mathbf{B}}_X \mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{B}}_X \dot{\mathbf{U}}(t) + \dot{\mathbf{B}}_X \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{B}_X \ddot{\mathbf{U}}(t) = \\ = (\ddot{\mathbf{A}}_X + 2\dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_X \dot{\mathbf{A}}_X + \mathbf{A}_X^3) \mathbf{X}(t) + (2\dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{B}_X + \mathbf{A}_X^2 \mathbf{B}_X + \mathbf{A}_X \dot{\mathbf{B}}_X + \ddot{\mathbf{B}}_X) \mathbf{U}(t) + \\ + (\mathbf{A}_X \mathbf{B}_X + 2\dot{\mathbf{B}}_X) \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{B}_X \ddot{\mathbf{U}}(t) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Рівняння (21)–(23) дозволяють отримати вирази для керування, що реалізуються у зворотних зв'язках системи керування рухомим об'єктом з урахуванням обмежень на керуючий вплив, забезпечують нульові значення відповідних похідних вектора координат та, таким чином, практично можливі траєкторії стабілізації об'єкта у такій формі, відповідно:

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{B}_X^{-1} \mathbf{A}_X(t) \mathbf{X}(t),$$

$$(\mathbf{A}_X \mathbf{B}_X + \dot{\mathbf{B}}_X) \mathbf{U}(t) + \mathbf{B}_X \dot{\mathbf{U}}(t) = -(\dot{\mathbf{A}}_X + \mathbf{A}_X^2) \mathbf{X}(t), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (2\dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{B}_X + \mathbf{A}_X^2 \mathbf{B}_X + \mathbf{A}_X \dot{\mathbf{B}}_X + \ddot{\mathbf{B}}_X) \mathbf{U}(t) + (\mathbf{A}_X \mathbf{B}_X + 2\dot{\mathbf{B}}_X) \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{B}_X \ddot{\mathbf{U}}(t) = \\ = -(\ddot{\mathbf{A}}_X + 2\dot{\mathbf{A}}_X \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_X \dot{\mathbf{A}}_X + \mathbf{A}_X^3) \mathbf{X}(t). \end{aligned}$$

Необхідною умовою розв'язання рівнянь (24) є визначення початкових умов для керування в момент часу при переході з i -го відрізка траєкторії з початковими координатами $\mathbf{X}(t^s)$, $\dot{\mathbf{X}}(t^s)$, $\ddot{\mathbf{X}}(t^s)$ на наступний $(i + 1)$ -й відрізок:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t^s) &= \mathbf{B}_X^{-1}(t^s)[\dot{\mathbf{X}}(t^s) - \mathbf{A}_X(t^s)\mathbf{X}(t^s)], \\ \dot{\mathbf{U}}(t^s) &= \mathbf{B}_X^{-1}(t^s)[\ddot{\mathbf{X}}(t^s) - \mathbf{A}_X(t^s)\dot{\mathbf{X}}(t^s)], \\ \ddot{\mathbf{U}}(t^s) &= \mathbf{B}_X^{-1}(t^s)[\dddot{\mathbf{X}}(t^s) - \mathbf{A}_X(t^s)\ddot{\mathbf{X}}(t^s)]. \end{aligned}$$

Узагальнена схема, що реалізує оптимальні програмовані траєкторії стабілізації рухомого об'єкта, зображена на рис. 9 (БКП — блок ключів перемикавання; БФПЗК — блок формування початкових значень керування; t_{ij}^s — момент перемикавання на i -му відрізку траєкторії для j -ї координати).

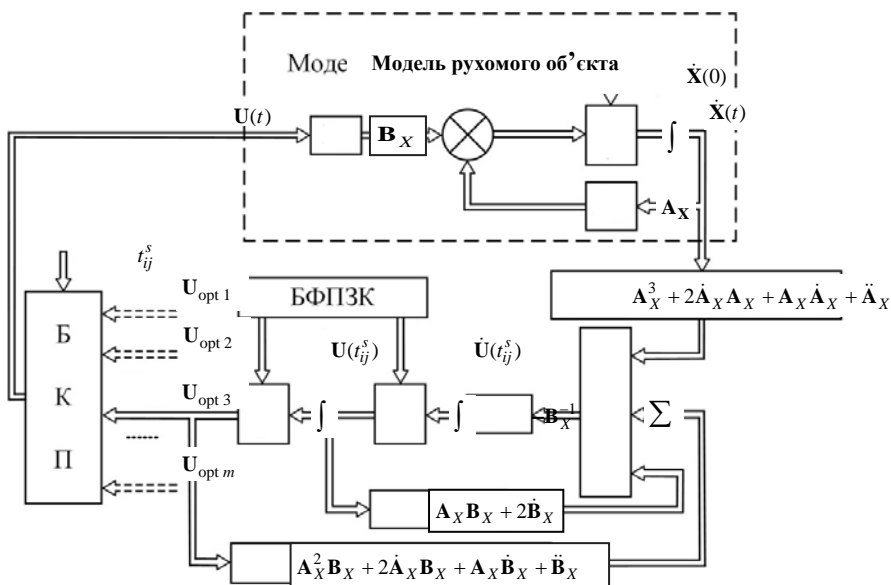


Рис. 9

Висновок

Оптимальні системи дозволяють забезпечити для динамічних систем найбільш високі показники якості керування: швидкодії, точності і мінімальні витрати енергії. При цьому для багатовимірних нелінійних систем виникають значні обмеження застосування класичних методів оптимального керування, пов'язані з обчислювальними труднощами вирішення крайових завдань, коректністю формування вагових матриць критеріїв оптимальності тощо. Застосування запропонованого порядку синтезу систем зі змінною структурою для різноманітних об'єктів на основі попередньої побудови оптимальних програмованих траєкторій стабілізації динамічних процесів дозволяє оптимізувати процеси стабілізації нелінійних систем високого порядку. Оптимальні програмовані траєкторії стабілізації формуються на основі поліноміальних форм для заданих граничних умов та критерію оптимальності з урахуванням обмежених значень керування та розв'язуються для часу моментів перемикавання керуючих впливів та закінчення перехідного процесу на основі системи алгебраїчних рівнянь. Синтез керувань, що забезпечує стабілізацію за визначеними оптимальними траєкторіями, здійснюється на основі диференційного перетворення системи рівнянь об'єкта та формування керуючих впливів у зворотних зв'язках керуваної системи.

Оптимальні траєкторія та керування формуються таким чином, що задають при синтезі додаткового робастного контуру керування (зі зворотним зв'язком за

виходом об'єкта) для компенсації неповної визначеності математичної моделі та неконтрольованих (невимірюваних) збурень і шумів достатньо обмежені області зміни координат рухомого об'єкта відносно заданих значень. Оскільки рухомі об'єкти при проектуванні та створенні достатньо вивчені, з точки зору формування математичної моделі, а параметри зовнішніх збурень відомі на основі тривалих у часі статистичних спостережень (таким чином, невизначені в обмеженому інтервалі), це потребує значно менших витрат енергії та підвищену точність керування рухомими об'єктами порівняно з підходами синтезу безпосередньо (без оптимізації) адаптивних та робастних систем (до яких можна віднести і широко розповсюджені автопілоти на основі ПД-регуляторів).

V. Timchenko

OPTIMIZATION OF PROGRAMMED TRAJECTORIES OF MOVING OBJECT'S STABILIZATION BASED ON CONTROL SYSTEMS OF VARIABLE STRUCTURE

Victor Timchenko

National University Shipbuilding Named Admiral Makarov, Mikolayev,
vl.timchenko58@gmail.com

The article considers optimal systems that provide dynamic systems with high control quality indicators: speed, accuracy, and low energy consumption. An approach to the synthesis of robust-optimal systems based on the use of feedback with a variable structure is being developed and includes the following main stages: planning of the programmed optimal trajectory; determination of moments of switching of control functions in feedback loops of the object; synthesis of control functions in the corresponding feedback loops of a multidimensional object. The application of the proposed order of synthesis of systems with a variable structure for various types of objects based on the preliminary construction of optimal programmed trajectories of stabilization of dynamic processes allows optimizing the stabilization processes of nonlinear non-stationary systems of high order. Optimal programmed stabilization trajectories are formed from segments established relative to the corresponding derivative of the motion coordinate, based on polynomial forms for given boundary conditions and the optimality criterion, taking into account limited control values, and are solved for the time of moments of switching of control and the time of the end of the transition process based on a system of algebraic equations. Control synthesis is carried out taking into account the initial values based on the equations of the balance of forces and moments efforts on the moving object and their derivatives. The optimal trajectory and control are formed in such a way that, during the synthesis of an additional robust control circuit (with feedback from the output of the object) to compensate for the incomplete certainty of the mathematical model and uncontrolled (unmeasured) disturbances and noises, sufficiently limited areas of changing the coordinates of the moving object relative to given values. In the future, this allows the construction of sufficiently effective and practical in the implementation of robust-optimal control systems, for example, marine mobile objects, quadcopters, that function in conditions of considerable uncertainty.

Keywords: moving objects, non-linear non-stationary models, optimization, programmed trajectories, optimality criterion.

1. Feldbaum, A.A.: theory of optimal systems. M.: Phizmathlit, 1963 (in Russian).
2. Kuntsevich V.M., Synthesis of robust optimal adaptive control systems for nonstationary objects under bounded disturbances. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2004, **36**, N 3. P. 14–24. DOI 10.1615/JAutomatInfScien.v36.i3.20.

3. Kuntsevich V.M. et al (Eds). Control Systems. *Theory and Applications. Series in Automation, Control and Robotics*. River Publishers, Gistrup, Delft, 2018.
4. Kondratenko Y.P., Kuntsevich V.M., Chikrii A.A., Gubarev V.F. (eds): Advanced control systems: *Theory and Applications. Series in Automation, Control and Robotics*. River Publishers, Gistrup, 2021.
5. Kondratenko Y.P., Chikrii A.A., Gubarev V.F., Kacprzyk J. (eds). Advanced control techniques in complex engineering systems: *Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control*, **203**. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019.
6. Larin V.B. On inversion of the problem of analytical designing the controllers. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2004, **36**, N 1. P. 11–18. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v36.i1.20.
7. Boychuk L.M. Method of structural synthesis of nonlinear automatic control systems. M.: Energia, 1971 (in Russian).
8. Galiulin A.S. Methods for solving inverse problems of dynamics, M.: Nauka. 1986 (in Russian).
9. Krutko, P.D.: Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control. M.: Mashinostroenie. 2004 (in Russian).
10. Gabasov R., Kirillova, F.M., Ruzhitskay, E.A. Implementation of bounded feedback in a nonlinear control problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. N 1. P. 108–116. (in Russian) [https://doi: 10.1007/s10559-009-9075-7](https://doi.org/10.1007/s10559-009-9075-7).
11. Balashevich N.V., Gabasov R., Kalinin A.I. and Kirillova F.M. Optimal Control of Nonlinear Systems. *Comput. Math. Math. Phys.* 2002. **42**, N 7. P. 931–956. <http://www.mathnet.ru/links/a1861bea804edd2f4ca0e8b6c8a11738/zvmmf1165.pdf>.
12. Horowitz I.M. Survey of quantitative feedback theory (QFT). *Journal of Robust and Non-Linear Control*. 2001. **11**, N 10. P. 887–921. [https://doi: 10.1002/rnc.637](https://doi.org/10.1002/rnc.637).
13. Gharib M. R., and Moavenian M. Full dynamics and control of a quadrotor using quantitative feedback theory. *J. Numer. Model.* 2017. **29**. P. 501–519. [https://doi:10.1002/jnm.2101](https://doi.org/10.1002/jnm.2101).
14. Shtessel Y.B., Moreno J.A., Fridman L.M.: Twisting sliding mode control with adaptation: Lyapunov design, methodology and application. *Automatica*. 2017. **75**. P. 229–235. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.09.004>
15. Yaesh I., Boyarski S., Shaked U. Probability-guaranteed robust H_∞ performance analysis and state-feedback design. *Systems & Control Letters*. 2003. **48**, N 5. P. 351–364. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00289-X](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00289-X).
16. Chesnov V.N. Synthesis of H_∞ - controllers for Multidimensional Systems of Given Accuracy and Stability. *Autom. Remote Control*. 2011. **72**, N 10. P. 2161–2175. <https://doi.org/10.1134/S0005117911100134>.
17. Satici A.C., Poonawala H., Spong M.W.: Robust Optimal Control of Quadrotor UAVs. *IEEE Access*. 2013. **1**. P. 79–93. [https://doi: 10.1109/ACCESS.2013.2260794](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2013.2260794).
18. Kondratenko Y.P., Timchenko V.L. Robust stabilization of marine mobile objects on the basis of systems with variable structure of feedbacks. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2011. **43**, N 6. P. 16–29. [https://doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v43.i6.20](https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v43.i6.20)
19. Timchenko V.L., Ukhin O.A. and Lebedev D.O. Optimization of nonlinear systems of variable structure for control of marine moving vehicles. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. **49**, N 7. P. 33–47. [https://doi 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i7.30](https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i7.30).
20. Timchenko V.L., Lebedev D.O. Optimization of Processes of Robust Control of Quadcopter for Monitoring of Sea Waters. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. **51**, N. 2. P. 1–10. [https://doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i2.10](https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i2.10).
21. Timchenko V.L., Lebedev D.O. Robust-optimal stabilization of nonlinear dynamic systems. *Computer Science, Control*. 2019. N 3. P. 185–197. [https://doi 10.18372/1990-5548.53.12140](https://doi.org/10.18372/1990-5548.53.12140).
22. Timchenko O.A. and Lebedev D.O. Algorithmic procedures synthesis of robust-optimal control for moving objects. *Control Systems: Recent Developments in Automatic Control Systems*. River Publishers, 2022. P. 289–323.

Отримано 02.09.2022