УДК 517.9:519.6

В.М. Булавацький

ЗАМКНЕНА ФОРМА РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ГЕОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩ

Булавацький Володимир Михайлович

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
v_bulav@ukr.net

Створення сучасних геотехнологій, що мають на меті функціонування в складних гірничо-геологічних умовах, вимагає подальшого розвитку та уточнення існуючих математичних моделей і методів моделювання особливостей динаміки геоміграційних процесів. При цьому помітний прогрес у галузі математичного моделювання геоміграційних процесів за складних умов їхнього перебігу, пов'язаний із використанням формалізму інтегро-диференціювання дробового порядку. Зазвичай математичне моделювання динаміки геоміграційних процесів виконується за умов насиченості масивів геопористих середовищ чистою водою, однак у цей час, внаслідок зростання техногенного впливу на природу, особливу актуальність становлять дослідження в галузі моделювання динаміки зазначених процесів за умов насичення геопористого середовища сольовими розчинами. Це значною мірою обумовлено рядом проблем екології, зокрема задачами захисту ґрунтів та ґрунтових вод від забруднення токсичним вмістом поверхневих накопичувачів промислових та побутових стоків. У даній роботі одержано точні розв'язки деяких одновимірних крайових задач дробово-диференційної консолідаційної динаміки насичених сольовими розчинами глинистих геопористих середовищ за умов одночасного врахування як просторової, так і часової нелокальностей геоміграційного процесу. Зокрема представлено дробово-диференційну математичну модель динаміки нелокального у часі та просторі фільтраційно-консолідаційного процесу, яка містить похідні Капуто за часовою змінною та Рімана–Ліувілля — за геометричною змінною. У рамках зазначеної моделі наведено постановку та одержано точний розв'язок прямої задачі консолідаційної динаміки геопористого масиву скінченної потужності, насиченого сольовим розчином. Також розглянуто задачу консолідаційної динаміки масиву скінченної потужності в оберненій постановці щодо визначення невідомих функцій джерел, залежних лише від геометричної змінної, за відповідними додатковими (кінцевими) умовами. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач.

Ключові слова: консолідаційна динаміка, геопористі середовища, дробово-диференційні математичні моделі, похідні Капуто, крайові задачі, замкнені розв'язки.

Вступ

Задачі математичного моделювання динаміки геоміграційних процесів актуальні, зокрема, у зв'язку з проблемами створення нових геотехнологій для видобутку корисних копалин, а також у зв'язку з питаннями забезпечення умов екологічно безпечної експлуатації різноманітних гідроспоруд [1–5]. Створення сучасних геотехнологій, що мають на меті функціонування в складних гірничо-геологічних умовах, вимагає подальшого розвитку та уточнення існуючих математичних моделей і методів моделювання геоміграційних процесів. Слід зазначити, що суттєвий прогрес у галузі математичного моделювання складних геоміграційних процесів пов'язаний із використанням формалізму інтегро-диференціювання дробового порядку [6–11]. Зазвичай математичне моделювання динаміки геоміграційних процесів виконується за умов насиченості масивів геопористих середовищ чистою водою, однак у цей час особливу актуальність становлять дослідження в галузі моделювання динаміки зазначених процесів за умов насичення геосередовища сольовими розчинами [5, 12]. Це обумовлено значною мірою рядом проблем екології, зокрема задачами захисту ґрунтів та ґрунтових вод від забруднення токсичним вмістом поверхневих накопичувачів промислових та побутових стоків. У зв'язку з цим у роботі [13] побудовано та вивчено дробово-диференційну математичну модель нелокального у часі фільтраційно-консолідаційного процесу в геомасиві, насиченому сольовим розчином за ізотермічних умов перебігу міграційного процесу. Узагальнення зазначеної моделі на випадок часової нелокальності, описуваної дробово-диференційними рівняннями змінного порядку, виконано в [14]. Урахування неізотермічності умов перебігу геоміграційного процесу зроблено в [15], спроба наближеного урахування часової та просторової нелокальностей у консолідаційній моделі здійснена в [16]. У роботі [17] побудовано математичні моделі для дослідження динаміки ізотермічного фільтраційно-консолідаційного процесу (з урахуванням осмосу та ультрафільтрації) у насиченому сольовим розчином глинистому геопористому середовищі в умовах значної часової нелокальності, що базуються на системі дробово-диференційних рівнянь з похідними Капуто або Хільфера. У рамках цих моделей отримано аналітичні розв'язки відповідних одновимірних крайових задач з нелокальними граничними умовами для випадку фільтраційної консолідації насичених сольовими розчинами глинистих основ скінченної потужності.

У даній роботі одержано точні розв'язки деяких одновимірних крайових задач дробово-диференційної консолідаційної динаміки насичених сольовими розчинами глинистих геопористих середовищ за умов одночасного врахування як просторової, так і часової нелокальностей геоміграційного процесу. Розглянуто задачі у прямій та оберненій постановках щодо визначення невідомих функцій джерел, залежних лише від геометричної змінної, за відповідними додатковими (кінцевими) умовами.

Дробово-диференційна математична модель динаміки нелокального у часі та просторі фільтраційно-консолідаційного процесу. Пряма задача консолідаційної динаміки масиву, насиченого сольовим розчином

Загальновідома математична модель для опису динаміки фільтраційно-консолідаційного процесу (з урахуванням хімічного осмосу та ультрафільтрації) у насиченій сольовим розчином геопористій глинистій основі базується на наступній системі рівнянь [18]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_\upsilon \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{1}$$

ISSN 2786-6491

$$\sigma\frac{\partial C}{\partial t}=d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\gamma d_u\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{2}$$

де $H=p/\gamma$ — надлишковий напір; p — поровий тиск; γ — питома вага рідини; C — концентрація солей у рідкій фазі; C_υ — коефіцієнт консолідації геопористого середовища [19]; σ — пористість; $\mu=\frac{\nu C_\upsilon}{k}$, k — коефіцієнт фільтрації; ν — коефіцієнт хімічного осмосу; d — коефіцієнт конвективної дифузії; d_u — коефіцієнт ультрафільтрації.

Узагальнення даної моделі в напрямку урахування ефектів пам'яті (часової нелокальності процесу) виконано в [13, 17], і відповідна модельна система рівнянь при цьому записується у вигляді

$$D_t^{(\alpha)}H=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_\upsilon H-\mu C), \tag{3}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)}C=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(dC-\gamma d_u H), \tag{4}$$

де введено наступне позначення: $D_t^{(\alpha)}$ — оператор регуляризованої дробової похідної Капуто–Герасимова [6–8] порядку α $(0<\alpha\le 1)$ за змінною t.

Розповсюджуючи модельну систему рівнянь з пам'яттю (3), (4) на випадок урахування не лише часової нелокальності процесу, а і його просторової нелокальності, одержуємо наступну модельну систему:

$$D_t^{(\alpha)}H=D_x^{\beta}(C_\upsilon H-\mu C), \tag{5}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)}C=D_x^{\beta}(dC-\gamma d_u H), \tag{6}$$

де D_x^{β} — оператор дробової похідної Рімана–Ліувілля [6–8] порядку β $(1<\beta\le 2)$ за змінною x. При цьому слід зазначити, що при $\alpha\to 1, \beta\to 2$ з рівнянь модельної системи (5), (6) безпосередньо отримуємо систему рівнянь (1), (2) для опису динаміки розглядуваного геоміграційного процесу в рамках класичної математичної моделі [18].

За припущень дробово-диференційної математичної моделі, визначеної модельною системою рівнянь (5), (6), нижче розглянемо одновимірну задачу моделювання динаміки нелокального у просторі та часі фільтраційно-консолідаційного процесу в насиченому сольовим розчином глинистому геосередовищі у випадку масиву середовища скінченної (одиничної) потужності з обома проникними гранями. Відповідна крайова задача зводиться до відшукання в області $\Omega=\{(x,t):(0,1)\times(0,+\infty)\}$ розв'язку системи рівнянь (5), (6) за наявності наступних крайових умов:

$$H(0,t)=0,\ H(1,t)=0, \tag{7}$$

$$C(0,t)=g_0,\ C(1,t)=0, \tag{8}$$

$$H(x,0)=h(x),\ C(x,0)=0, \tag{9}$$

де $h(x)$ — відома функція початкового надлишкового напору в масиві; g_0 — задане значення концентрації солей на вході фільтраційного потоку.

Домножаючи (6) на невизначений дійсний коефіцієнт $r \neq 0$ та додаючи одержаний результат до (5), маємо

$$D_t^{(\alpha)}(H + rC) = D_x^{\beta}((C_\upsilon - \gamma r d_u) H + (rd - \mu) C). \tag{10}$$

Покладаючи в (10)

$$\frac{rd - \mu}{C_\upsilon - \gamma r d_u} = r,$$

одержуємо для визначення величини r квадратне рівняння вигляду

$$\gamma d_u r^2 + (d - C_\upsilon) r - \mu = 0.$$

Звідси

$$r_{1,2} = \frac{1}{2\gamma d_u}(C_\upsilon - d \pm \sqrt{\Delta}), \; \Delta = (C_\upsilon - d)^2 + 4\mu\gamma d_u > 0. \tag{11}$$

Покладемо

$$\psi_i(x, t) = H(x, t) + r_i C(x, t) \; (i = 1, 2). \tag{12}$$

Тоді з урахуванням (10), (12) маємо для відшукання невідомих функцій ψ_i $(i = 1, 2)$ сукупність рівнянь вигляду

$$D_t^{(\alpha)} \psi_i(x, t) = \kappa_i D_x^{\beta} \psi_i(x, t) \; (i = 1, 2), \tag{13}$$

де $\kappa_i = C_\upsilon - \gamma d_u r_i$ $(i = 1, 2)$.

Відповідні (13) крайові умови, з урахуванням (7)–(9), набувають вигляду

$$\psi_i(0, t) = g_0 r_i, \; \psi_i(1, t) = 0, \; \psi_i(x, 0) = h(x) \; (i = 1, 2). \tag{14}$$

(Зауважимо, що для фізичної коректності задачі (13), (14) необхідне виконання умов $\kappa_i > 0 \; (i = 1, 2)$, які мають місце при $\nu\gamma d_u < kd$.)

Зведемо неоднорідні граничні умови в точці $x = 0$ до відповідних однорідних умов за допомогою підстановки

$$u^{(i)}(x, t) = \psi_i(x, t) - g_0 r_i (1 - x) \; (i = 1, 2). \tag{15}$$

Тоді задача (13), (14) перепишеться у вигляді

$$D_t^{(\alpha)} u^{(i)}(x, t) = \kappa_i D_x^{\beta} u^{(i)}(x, t) + f_i(x) \; (i = 1, 2), \tag{16}$$

$$u^{(i)}(0, t) = 0, \;\; u_i(1, t) = 0 \; (t \geq 0, \, i = 1, 2), \tag{17}$$

$$u^{(i)}(x, 0) = \eta^{(i)}(x) \; (x \in [0, 1], \, i = 1, 2), \tag{18}$$

де

$$\eta^{(i)}(x) = h(x) - g_0 r_i (1 - x), \; f_i(x) = g_0 r_i \frac{x^{\beta}}{\Gamma(1 - \beta)} \left(1 - \frac{x}{1 - \beta}\right) \;\; (i = 1, 2), \tag{19}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера [8].

Розв’язок крайових задач (16)–(19) шукатимемо у вигляді рядів

$$u^{(i)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(i)}(t)\, \omega_n(x) \; (i = 1, 2) \;\; (x, t) \in \Omega, \tag{20}$$

де $\omega_n(x) = x^{\beta - 1} E_{\beta,\beta}(\lambda_n x^{\beta})$ — власні функції задачі Штурма–Ліувілля вигляду

 ISSN 2786-6491

$$D_x^{\beta}\omega(x)=\lambda\omega(x),\ \omega(0)=\omega(1)=0,\ x\in(0,1), \tag{21}$$

$E_{\beta,\beta}(z)$ — двопараметрична функція Міттаг–Леффлера [7, 8, 20].

Задача (21) вивчалась, зокрема, в роботах [6, 21–24], в яких показано, що лише для власних значень λ_n, які є нулями двопараметричної функції Міттаг–Леффлера $E_{\beta,\beta}(\lambda)$, існують зазначені вище власні функції $\omega_n(x)$. У роботі [23] показано, що система функцій $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ утворює в $L^2(0,1)$ неортогональний базис. При цьому система власних функцій задачі, спряженої до задачі (21), визначається таким чином [22]:

$$\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}=\{(1-x)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(\lambda_n(1-x)^{\beta})\}_{n=1}^{\infty}.$$

Відомо, що означені вище системи функцій $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють біортогональну систему функцій [24–26].

Записуючи розвинення функцій початкових умов $\eta^{(i)}(x)$ та функцій джерела $f_i(x)$ у ряди за власними функціями задачі (21) у вигляді

$$\eta^{(i)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^{(i)}\omega_n(x),\ f_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(i)}\omega_n(x)\quad (i=1,2), \tag{22}$$

де $\eta_n^{(i)}=(\eta^{(i)}(x),z_n(x))_{L^2(0,1)},\ f_n^{(i)}=(f_i(x),z_n(x))_{L^2(0,1)}$, одержуємо з співвідношень (16)–(19) для знаходження невідомих функцій $u_n^{(i)}(t)$ $(t>0,\ n\in N,\ i=1,2)$ наступну послідовність задач Коші:

$$D_t^{(\alpha)}u_n^{(i)}(t)-\kappa_i\lambda_n u_n^{(i)}(t)=f_n^{(i)},\ u_n^{(i)}(0)=\eta_n^{(i)}\ (n\in N,\ i=1,2). \tag{23}$$

Розв’язки задач (23) запишемо у вигляді

$$u_n^{(i)}(t)=\eta_n^{(i)}E_{\alpha}(\kappa_i\lambda_n t^{\alpha})+f_n^{(i)}t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_i\lambda_n t^{\alpha})\ (n\in N,\ i=1,2), \tag{24}$$

де $E_{\alpha}(z),\ E_{\alpha,\alpha+1}(z)$ — відповідно одно- та двопараметрична функції Міттаг–Леффлера [7, 8, 20].

Наступним кроком щодо розв’язання розглядуваної задачі є здійснення переходу до функцій напору та концентрацій. На основі співвідношень (12) одержуємо, що вказаний перехід здійснюється за формулами

$$H(x,t)=\frac{r_1u^{(2)}(x,t)-r_2u^{(1)}(x,t)}{r_1-r_2},\ C(x,t)=\frac{u^{(1)}(x,t)-u^{(2)}(x,t)}{r_1-r_2}+g_0(1-x), \tag{25}$$

де $u^{(i)}(x,t)\ (i=1,2)$ даються співвідношеннями (20), (24).

Таким чином, співвідношення (25), (20), (24) визначають формальний розв’язок поставленої задачі. Можна показати, що за деяких додаткових умов цей розв’язок — регулярний. Для цього припустимо, що визначені згідно (22) функції $\eta^{(i)}(x)$, $f_i(x)$ задовольняють наступним умовам: $\eta^{(i)}(x)\in C^2[0,1]$, $\eta^{(i)}(0)=\eta^{(i)}(1)=\eta^{(i)\prime}(1)=0$, $f_i(x)\in C[0,1]\ (i=1,2)$. Тоді, з урахуванням відомої нерівності [20]

$$\left|E_{\alpha,\alpha}(z)\right|\le\frac{C_1}{1+|z|}\quad (z\in\mathbb{C},\ C_1>0),$$

$$\left(1<\alpha<2,\ \alpha\in R,\ \mu\le\left|\arg(z)\right|\le\pi,\ \mu\in\left(\frac{\pi\alpha}{2},\ \min\{\alpha\pi,\ \pi\}\right)\right)$$

та оцінки для власних функцій $\omega_n(x)$ вигляду [22–26]

$$\left|\omega_n(x)\right|\le\frac{M_1}{\left|\lambda_n\right|x}\ \ (M_1>0,\ x>0,\ n\in N),\tag{26}$$

одержуємо на основі (24) наступні оцінки для членів ряду (20):

$$\left|u_n^{(i)}(t)\,\omega_n(x)\right|\le\frac{M^+}{\left|\lambda_n\right|^3x}\ \ (M^+>0,\ t>0,\ x>0,\ n\in N,\ i=1,2).\tag{27}$$

Оскільки власні значення λ_n задачі (21) при $\operatorname{Im}(\lambda_n)>0$ мають властивості [24–26]

а) $\left|\lambda_k\right|<\left|\lambda_{k+1}\right|$ для $k\ge1$,

б) для достатньо великих n та $\arg(\lambda_n)>\frac{\beta\pi}{2}$ маємо $\left|e^{\lambda_n t}\right|<1$, $\left|\lambda_n\right|\sim O(n^{\beta})$ $(1<\beta<2)$,

враховуючи (27), одержуємо, що мажоруючим для рядів (20) є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3\beta}}\ \ (1<\beta\le2).$$

Таким чином, на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса ряди (20) є рівномірно збіжними на множині $\Omega_\varepsilon:=[0,1]\times[\varepsilon,+\infty)$ $(\varepsilon>0)$ і являють собою неперервні функції на цій множині $u^{(1)}(x,t),u^{(2)}(x,t)\in C(\Omega_\varepsilon)$. Аналогічно доводиться, що при $t>0$ ряди (20), (24) являють собою функції, диференційовні почленно один раз за змінною t і два рази — за змінною x. Існування регулярного розв'язку задачі встановлено.

Обернена задача консолідаційної динаміки для масиву скінченної потужності

Обернену крайову задачу консолідації для функцій джерела, що залежать лише від геометричної змінної x, сформулюємо як задачу відшукання в області $Q:=(0,1)\times(0,T)$ пар функцій $\{H(x,t),P(x)\}$, $\{C(x,t),\Phi(x)\}$ на основі розв'язку наступної крайової задачі:

$$D_t^{(\alpha)}H=D_x^{\beta}(C_\upsilon H-\mu C)+P(x),\tag{28}$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)}C=D_x^{\beta}(dC-\gamma d_uH)+\Phi(x),\tag{29}$$

$$H(0,t)=0,\ H(1,t)=0,\tag{30}$$

$$C(0,t)=g_0,\ C(1,t)=0,\tag{31}$$

$$H(x,0)=h(x),\ H(x,T)=\rho(x),\tag{32}$$

$$C(x,0)=0,\ C(x,T)=\theta(x),\tag{33}$$

де $\rho(x),\theta(x)$ — задані функції кінцевих умов (умов перевизначення); $P(x)$, $\Phi(x)\in C[0,1]$, $H(x,t),C(x,t)\in C(Q_\varepsilon)$, $Q_\varepsilon:=[0,1]\times[\varepsilon,T]$, $\forall\varepsilon>0$.

 ISSN 2786-6491

Застосовуючи методику, використану вище, при розв'язанні прямої задачі, перепишемо розглядувану задачу (28)–(33) у вигляді

$$D_t^{(\alpha)}\psi_i(x,t)=\kappa_i D_x^{\beta}\psi_i(x,t)+F^{(i)}(x)\ (i=1,2), \tag{34}$$

$$\psi_i(0,t)=g_0 r_i,\ \psi_i(1,t)=0\ (i=1,2), \tag{35}$$

$$\psi_i(x,0)=h(x)\ (i=1,2), \tag{36}$$

$$\psi_i(x,T)=\rho(x)+r_i\theta(x)\ (i=1,2), \tag{37}$$

де $F^{(i)}(x)=P(x)+r_i\Phi(x)$ — шукані функції джерел; r_i $(i=1,2)$ — величини, визначені згідно співвідношень (11).

Використовуючи підстановки виду (15), зведемо крайові задачі (34)–(37) до відповідних задач з однорідними граничними умовами

$$D_t^{(\alpha)}u^{(i)}(x,t)=\kappa_i D_x^{\beta}u^{(i)}(x,t)+\kappa_i f_i(x)+F^{(i)}(x)\ (i=1,2), \tag{38}$$

$$u^{(i)}(0,t)=0,\ \ u_i(1,t)=0\ (t\ge 0,\ i=1,2), \tag{39}$$

$$u^{(i)}(x,0)=\eta^{(i)}(x),\ u^{(i)}(x,T)=\varsigma^{(i)}(x)\ (x\in[0,1],\ i=1,2), \tag{40}$$

де $\varsigma^{(i)}(x)=\rho(x)+r_i\theta(x)-g_0 r_i(1-x)\ (i=1,2)$, а функції $\eta^{(i)}(x)$, $f_i(x)$ $(i=1,2)$ визначаються на основі (19).

Розв'язки задач (38)–(40) шукатимемо у вигляді розвинення в ряди за власними функціями задачі Штурма–Ліувілля (21):

$$u^{(i)}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{(i)}(t)\,\omega_n(x),\ F^{(i)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(i)}\omega_n(x)\ (i=1,2)\ \ (x,t)\in\Omega. \tag{41}$$

Записуючи розвинення функцій початкових і кінцевих умов $\eta^{(i)}(x)$, $\varsigma^{(i)}(x)$ та функцій джерела $f_i(x)$ в ряди за власними функціями задачі (21) у вигляді

$$\eta^{(i)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^{(i)}\omega_n(x),\ \varsigma^{(i)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varsigma_n^{(i)}\omega_n(x),\ f_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(i)}\omega_n(x)\ \ (i=1,2), \tag{42}$$

де $\eta_n^{(i)}=(\eta^{(i)}(x),z_n(x))_{L^2(0,1)}$, $\varsigma_n^{(i)}=(\varsigma^{(i)}(x),z_n(x))_{L^2(0,1)}$, $f_n^{(i)}=(f_i(x),z_n(x))_{L^2(0,1)}$,

одержуємо з співвідношень (38)–(40) для знаходження невідомих функцій $u_n^{(i)}(t)$ $(t>0,\ n\in N,\ i=1,2)$ наступні послідовності задач Коші:

$$D_t^{(\alpha)}u_n^{(i)}(t)-\kappa_i\lambda_n u_n^{(i)}(t)=\kappa_i f_n^{(i)}+F_n^{(i)},\ u_n^{(i)}(0)=\eta_n^{(i)}\ (n\in N,\ i=1,2). \tag{43}$$

Розв'язки задач (43) запишуться у вигляді

$$u_n^{(i)}(t)=\eta_n^{(i)}E_\alpha(\kappa_i\lambda_n t^\alpha)+t^\alpha(\kappa_i f_n^{(i)}+F_n^{(i)})\,E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_i\lambda_n t^\alpha)\ (n\in N,\ i=1,2), \tag{44}$$

де $E_\alpha(z)$, $E_{\alpha,\alpha+1}(z)$ — відповідно одно- та двопараметрична функції Міттаг–Лефлера [7, 8, 20].

З урахуванням (41), (42) та другої з умов (40) одержуємо співвідношення

$$u_n^{(i)}(T)=\varsigma_n^{(i)}\ (n\in N,\ i=1,2). \tag{45}$$

Беручи до уваги співвідношення (44), на основі (45) маємо

$$F_n^{(i)} = \frac{\varsigma_n^{(i)} - \eta_n^{(i)} E_\alpha(\kappa_i \lambda_n T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_i \lambda_n T^\alpha)} - \kappa_i f_n^{(i)} \ (n \in N, i = 1, 2). \quad (46)$$

Таким чином, формальний розв'язок задачі (38)–(40) визначається співвідношеннями (41), (44), (46). Далі функції напору і концентрації визначаються за формулами (25), де $u^{(i)}(x, t)\ (i = 1, 2)$ даються співвідношеннями (41), (44). При цьому шукані функції джерел P, Φ визначаються наступним чином:

$$P = \frac{r_1 F^{(2)} - r_2 F^{(1)}}{r_1 - r_2}, \ \Phi = \frac{F^{(1)} - F^{(2)}}{r_1 - r_2}.$$

Покажемо, що за певних обмежень одержаний розв'язок оберненої задачі є класичним, а знайдені функції джерела — неперервними.

Нехай функції $\rho(x), \theta(x), h(x)$ задовольняють умовам $\rho(x), \theta(x), h(x) \in \in C^1[0, 1]$, $\rho(0) = 0, \theta(0) = g_0, h(0) = g_0$. Тоді, враховуючи оцінку для власних функцій $\omega_n(x)$ вигляду (26), одержуємо на основі (46) наступну оцінку:

$$\left| F_n^{(i)} \omega_n(x) \right| \le \frac{C_1}{\left| \lambda_n \right|^2 x} \ (C_1 > 0, x > 0, n \in N, i = 1, 2). \quad (47)$$

Із урахуванням зазначених вище властивостей власних значень λ_n задачі (21) одержуємо на основі (47), що мажоруючим для рядів $\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(i)} \omega_n(x)\ \ (i = 1, 2)$ є збіжний узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\beta}} \ (1 < \beta \le 2).$$

Отже, на основі мажорантної ознаки Вейєрштраса дані ряди є рівномірно збіжними на відрізку $[0, 1]$ та їхні суми є неперервними функціями на цьому відрізку:

$$F^{(i)}(x) \in C[0, 1]\ (i = 1, 2).$$

Аналогічно зі співвідношень (44) одержуємо наступні оцінки:

$$\left| u_n^{(i)}(t)\, \omega_n(x) \right| \le \frac{C_2}{\left| \lambda_n \right|^3 x} \ \ (C_2 > 0, x > 0, t > 0, n \in N, i = 1, 2).$$

Звідси маємо, що рівномірна збіжність рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(i)}(t)\, \omega_n(x)\ \ (i = 1, 2)$ в області Q_ε є наслідком того, що мажоруючим для них рядом є збіжний узагальнений гармонічний ряд, визначений вище у прямій задачі. Тоді $u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t) \in \in C(Q_\varepsilon)$.

Слід також зазначити, що з використанням методики робіт [24–26] легко встановлюється єдиність розв'язку даної задачі.

ISSN 2786-6491

Висновок

У роботі одержано точні розв'язки деяких одновимірних крайових задач дробово-диференційної консолідаційної динаміки насичених сольовими розчинами глинистих геопористих середовищ за умов одночасного врахування як просторової, так і часової нелокальностей геоміграційного процесу. Постановки відповідних крайових задач виконано в рамках математичної моделі, що містить похідні Капуто за часовою змінною та Рімана–Ліувілля — за геометричною змінною.

Розглянуто задачі у прямій та оберненій постановках щодо визначення невідомих функцій джерел, залежних лише від геометричної змінної, за відповідними додатковими (кінцевими) умовами. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач.

V. Bulavatsky

CLOSED FORM SOLUTIONS OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL CONSOLIDATION DYNAMICS OF GEOPOROUS MEDIA

Volodymyr Bulavatsky

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,

v_bulav@ukr.net

The modern geotechnologies that aimed to operate in complex mining and geological conditions requires further development and refinement of existing mathematical models and methods for modeling the dynamics of geomigration processes. At the same time, significant progress in the field of mathematical modeling of geomigration processes under difficult conditions of their course associated with the use of the formalism of integro-differentiation of the fractional order. Usually, the mathematical modeling of the dynamics of geomigration processes performed under conditions of geoporous media saturation with pure water, but currently, due to the growing man-made impact on the nature, research in modeling of the dynamics of these processes when the geoporous media saturated by saline solutions is particularly actual. This is largely due to a number of ecological problems, including the protection of soils and groundwater from contamination by toxic contents of surface storage of industrial and domestic effluents. In this paper, exact solutions of some one-dimensional boundary value problems of fractional-differential consolidation dynamics of saline solutions of clay geoporous media saturated with salt solutions are obtained under conditions of simultaneous consideration of both space and time non-locality of the geomigration process. Particularly a fractional-differential mathematical model of the dynamics of non-local in time and space of the filtration-consolidation process is presented, which contains the derivatives of the Caputo time variable and the Riemann–Liouville geometric variable. Within the framework of this model, the formulation is given and the exact solution of the direct consolidation dynamics problem of a geoporous finite thickness massif saturated with saline solution is obtained. The problem of consolidation dynamics of a finite thickness massif in the inverse formulation with respect to the definition of unknown source functions that depend only on the geometric variable under the corresponding additional (final) conditions is also considered. The conditions for the existence of regular solutions of the considered problems are given.

Keywords: consolidation dynamic, geoporous media, fractional differential mathematical models, Caputo derivatives, boundary value problems, closed form solutions.

1. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. М. : Наука, 1969. 414 с.
2. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев : Наук. думка, 1991. 264 с.
3. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М. : Недра, 1970. 339 с.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М. : Недра, 1984. 211 с.
5. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ : Наук. думка, 2005. 283 с.
6. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М. : Физматлит, 2003. 272 с.
7. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam : Elsevier, 2006. 523 p.
8. Podlubny I. Fractional differential equations. New York : Academic Press, 1999. 341 p.
9. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008. 512 с.
10. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland : Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29614-8.
11. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport. *Physics Reports*. 2002. **371**. P. 461–580.
12. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. 211 с.
13. Bulavatsky V.M. Some mathematical models of geoinformatics for describing mass transfer processes under time-nonlocal conditions. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2011. **43**, N 6. P. 49–59. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v43.i6.50.
14. Bulavatsky V.M., Kryvonos Yu.G. On one geoinformation fractional differential model of the variable order. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2012. **44**, N 6. P. 1–7. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i6.10.
15. Bulavatsky V.M. Nonclassical mathematical model in geoinformatics to solve dynamic problems for nonequilibrium nonisothermal seepage fields. *Cybernetics and systems analysis*. 2011. **47**, N 6. P. 899–906. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9369-4.
16. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modeling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality. *Cybernetics and systems analysis*. 2012. **48**, N 4. P. 539–546. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9432-9.
17. Bulavatsky V.M. Fractional differential mathematical models of the dynamics of nonequilibrium geomigration processes and problems with nonlocal boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**, N 1. P. 81–89. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9594-8.
18. Kaczmarek M., Huekel T. Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem. *Transport in porous media*. 1998. **32**. P. 49–74.
19. Ширинкулов Т.Ш., Зарецкий Ю.К. Ползучесть и консолидация грунтов. Ташкент : Фан, 1986. 390 с.
20. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. Berlin : Springer Verlag, 2014. 454 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61550-8.
21. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
22. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential operator of fractional order. *Journal of Mathematical Science*. 2013. **194**, N 5. P. 499–512. https://doi.org/10.1007/s10958- 013-1543-y.
23. Хасамбиев М.В., Алероев Т.С. Краевая задача для одномерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии. *Вестник Московского государственного строительного университета.* 2014. № 6. С. 71–76.
24. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition. *Electronic Journal of Differential Equations.* 2013. **270**. P. 1–16. http://ejde.math.unt.edu ftp ejde.math.txstate.edu.
25. Ali M., Aziz S., Malik S.A. Inverse problem for a space-time fractional diffusion equation: application of fractional Sturm–Liouville operator. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2018. **41**. P. 2733–2744. https://doi.org/10.1002/mma.4776.
26. Ali M., Aziz S., Malik S.A. Inverse source problem for a space-time fractional diffusion equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 2018. **21**. P. 844–863. https://doi.org/10.1515/fca-2018-0045.

Отримано 02.06.2022