

УДК 629.78

В.В. Волосов, В.М. Шевченко

СИНТЕЗ УПРАВЛІННЯ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ ГЕОСТАЦІОНАРНОГО СУПУТНИКА У ТОЧЦІ СТОЯННЯ

Волосов Віктор Вікторович

Інститут космічних досліджень НАН України та ДКА України, м. Київ,

wolosov@mail.ru

Шевченко Володимир Миколайович

Інститут космічних досліджень НАН України та ДКА України, м. Київ,

vovan_16@ukr.net

Розроблено методи та алгоритми балістичного забезпечення управління стабілізацією довготи точки стояння геостационарного супутника (ГСС). Еволюція поточних координат ГСС моделювалася диференціальними рівняннями руху матеріальної точки у центральному гравітаційному полі з урахуванням обмежених структурно-параметричних збурень відомої інтенсивності, викликаних загальним впливом Сонця, Місяця, відмінністю гравітаційного поля Землі від центрального тощо. Конкретне математичне моделювання цих збурень не розглядалося, використовувалися лише властивості їх загальної обмеженості за нормою. Для синтезу управління застосовувався відомий в теорії керування орієнтацією (кутовим положенням космічного апарата) аналог — метод декомпозиції загальної задачі синтезу на кінематичну і динамічну. Для їх вирішення використовувалися відомі узагальнення прямого методу Ляпунова дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь на дослідження стійкості замкнених обмежених множин (конкретно багатовимірних еліпсоїдів) у їх фазових просторах. Поряд із методом синтезу управління стабілізацією довготи точки стояння ГСС запропоновано методи еліпсоїдального оцінювання, викликані впливом згаданих збурень помилок стабілізації, що встановилися. Методи засновані на побудові зовнішніх еліпсоїдальних оцінок множин досяжності та граничних множин у фазових просторах динамічних систем з обмеженими структурно-параметричними збуреннями. Запропоновано також метод отримання гарантованих інтервальних оцінок помилок стабілізації, що встановилися, по кожній з координат. Ефективність запропонованих методів керування ілюструється результатами комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: управління, геостационарний супутник, метод Ляпунова, множини досяжності, граничні множини.

Вступ

Запропоновано математичну модель керованого руху космічного апарата (КА) в центральному гравітаційному полі Землі (ГПЗ). Модель запропонована у класі

лінійних диференціальних рівнянь (диференціальних включень) під впливом обмежених структурно-параметричних зовнішніх збурень. Запропоновано метод синтезу управління стабілізацією КА у заданій точці стояння (ТС) на геостаціонарній орбіті (ГСО). Метод заснований на узагальненні відомої в управлінні орієнтацією декомпозиції загальної задачі на кінематичну та динамічну задачі управління орієнтацією і на розв'язанні задачі управління рухом центру мас. Поряд із алгоритмом розв'язання задачі синтезу стабілізуючого управління запропоновано методи гарантованого оцінювання точності стабілізації. Методи засновано на гарантованому підході до управління в умовах обмеженої невизначеності, що розвивається протягом останніх кількох десятиків років, і на раніше відомому в класичній теорії розділі стійкості при постійно діючих обмежених збуреннях. Ефективність одержаних рішень ілюструється результатами комп'ютерного моделювання.

Математична модель керованого руху матеріальної точки у центральному гравітаційному полі

Рівняння керованого руху твердого тіла, що розглядається як матеріальна точка (МТ), у центральному гравітаційному полі Землі має вигляд

$$\ddot{\mathbf{r}} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{u}, \quad (1)$$

де \mathbf{r} — її поточний радіус-вектор МТ, r — відстань від притягуючого центру до МТ $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mu = 396600,4 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравітаційна стала Землі, \mathbf{u} — вектор керуючих прискорень [1, 2].

Для розв'язання задач стабілізації геостаціонарного супутника (ГСС) запишемо рівняння руху (1) у гринвічській системі координат (ГСК), тобто в правій системі координат (СК), початок якої знаходиться в центрі Землі (точці O). Вісь Oz спрямована по осі добового обертання Землі з позитивним напрямом на Північний полюс, вісь Ox збігається з лінією перетину площини екватора та гринвічського меридіана [3].

Введемо для цього такі позначення:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де ε — кутова швидкість добового обертання Землі $\varepsilon = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$. Скориставшись (2) та відомими правилами диференціювання векторів у системах координат, що обертаються [4], отримаємо рівняння:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r} = \frac{\mu}{\rho^3}\mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

У скалярній формі рівняння (3), (4) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\varepsilon\dot{y} - \varepsilon^2x &= -\frac{\mu}{\rho^3}x + u_x \\ \ddot{y} + 2\varepsilon\dot{x} - \varepsilon^2y &= -\frac{\mu}{\rho^3}y + u_y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho^3}z + u_z \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Тут x, y, z — поточні координати МТ у ГСК (нагадаємо, що під ГСК розуміється права геоцентрична СК із початком у точці O , вісь Oz збігається з віссю добового обертання Землі, вісь Ox розташована у площині гринвічського меридіана); u_x, u_y, u_z — проєкції прискорення на осі ГСК, обумовленого тягою маршевих двигунів. При цьому [5] $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = m^{-1}P$, де m — поточна маса МТ, P — тяга двигуна, що дроселюється і реверсується. Неважко показати, що орбітальна кутова швидкість, тобто кутова швидкість обертання ГСС навколо Землі, що дорівнює кутовій швидкості обертання Землі, визначається формулою $\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu}{r_S^3}}$, де

$$r_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = 42164 \text{ км}, \quad x_S, y_S, z_S = 0 \text{ — координати ТС.}$$

Отримаємо рівняння еволюції відхилень координат x, y, z МТ від її відповідних координат $x_S, y_S, z_S = 0$ на ГСО. З рівнянь (5) для точки стояння $x(t) \equiv x_S, y(t) \equiv y_S, z(t) \equiv z_S = 0$ безпосередньо випливає

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_S - 2\varepsilon \dot{y}_S - \varepsilon^2 x_S &= -\frac{\mu}{r_S^3} x_S \\ \ddot{y}_S + 2\varepsilon \dot{x}_S - \varepsilon^2 y_S &= -\frac{\mu}{r_S^3} y_S \\ \ddot{z}_S &= -\frac{\mu}{r_S^3} z_S \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Опускаючи громіздкі викладки, пов'язані з отриманням системи лінійного наближення рівнянь (5) навколо ТС $x(t) \equiv x_S, y(t) \equiv y_S, z(t) \equiv z_S = 0$ та відніманням від (6), отримуємо систему лінійного наближення рівнянь руху МТ у відхиленнях від координат ТС, записаних у формі Коші

$$\dot{Z} = AZ + BU, \quad (7)$$

де $Z^T = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)$, $z_1 = x - x_S, z_2 = y - y_S, z_3 = z - z_S, z_4 = \dot{x} - \dot{x}_S, z_5 = \dot{y} - \dot{y}_S, z_6 = \dot{z} - \dot{z}_S$,

$$A = \begin{pmatrix} O_3 & I_3 \\ \tilde{A} & \underline{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_3 & \vdots & I_3 \\ \dots & \vdots & \dots \\ \tilde{A} & \vdots & \underline{A} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = 3 \frac{\mu}{r_S^5} \begin{pmatrix} x_S^2 & x_S y_S & x_S z_S \\ y_S x_S & y_S^2 & y_S z_S \\ z_S x_S & z_S y_S & z_S^2 - \frac{r_S^2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} & \underline{a}_{13} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} & \underline{a}_{23} \\ \underline{a}_{31} & \underline{a}_{32} & \underline{a}_{33} \end{pmatrix} = 2 \sqrt{\frac{\mu}{r_S^3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} O_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}.$$

Обчисливши визначник матриці керованості $(AB:B)$, розклавши його за елементами першого рядка [6], знаходимо, що визначник $\det(AB:B)=1$. Тому пара AB є керованою, а система (7) стабілізується.

**Синтез алгоритмів стабілізації ГСС у точці стояння.
Метод декомпозиції**

Нагадаємо, що компоненти вектора стану $Z(t)$ в (7) — це поточні відхилення координат ГСС та його швидкостей від необхідних значень, заданих у гринвічській СК $z_1 = x - x_S$, $z_2 = y - y_S$, $z_3 = z - z_S$, $z_4 = \dot{x} - \dot{x}_S$, $z_5 = \dot{y} - \dot{y}_S$, $z_6 = \dot{z} - \dot{z}_S$. З урахуванням сказаного поставимо завдання синтезу прискорень, що управляють $U = U(Z)$, із умови стійкості тривіального рішення $Z(t), \|Z(t)\| \equiv 0$, рівняння (7). Нагадаємо також, що в системі рівнянь (7) координата z_S ТЗ визначення ГСО дорівнює нулю $z_S(t) \equiv 0$. Для вирішення задачі синтезу управління рухом центра мас ГСС скористаємося аналогом методу синтезу управління рухом КА щодо центра мас. А саме, аналогом методу декомпозиції на кінематичну та динамічну задачі управління орієнтацією, запропонованого для синтезу управління орієнтацією космічних апаратів у [7] і розвинутого в [8, 9]. Для цього представимо систему рівнянь (7) у вигляді підсистем кінематичних та динамічних рівнянь. Ввівши позначення

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = C_1^T Z, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} = C_2^T Z, \quad (8)$$

$$\text{де } C_1^T = (I_3, O_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2^T = (O_3, I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

запишемо систему рівнянь (7) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= V, \\ \dot{V} &= \tilde{A}X + \underline{A}V + U \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Дотримуючись [7–9], виберемо «кінематичну» функцію Ляпунова (ФЛ)

$$w_C = \frac{1}{2} X^T X. \quad (10)$$

Відповідно до рівнянь (9) похідна ФЛ (10) має вигляд

$$\dot{w}_C = X^T \dot{X} = X^T V. \quad (11)$$

Вважаючи в (11) швидкість V управління, виберемо «управління»

$$V = V_C = -SX, \quad (12)$$

де матриця $S = S^T > 0$, наприклад $S = \text{diag}\{s_{11}, s_{22}, s_{33}\}$. При цьому похідна ФЛ (12) $\dot{w}_C = -X^T SX < 0$, і тому норма вектора відхилення від заданої ТЗ буде монотонно зменшуватися $\|X(t)\| \rightarrow 0$. Далі для завершення розв'язання задачі синтезу стабілізуючого управління виберемо «динамічну» ФЛ у вигляді

$$w_d = \frac{1}{2} (V - V_C)^T (V - V_C). \quad (13)$$

Похідна ФЛ (13) в силу другого із системи рівнянь (9) має вигляд $\dot{w}_d = (V - V_C)^T (\dot{V} - \dot{V}_C) = (V - V_C)^T (\tilde{A}X + \underline{A}V + U - \dot{V}_C)$.

Припускаючи

$$U = -\tilde{A}X - \underline{A}V + \dot{V}_C - \frac{1}{2\tau}(V - V_C), \quad (14)$$

отримуємо

$$\dot{w}_d = -\frac{1}{2\tau}(V - V_C)^T (V - V_C) = -\frac{1}{\tau}w_d, \quad \tau \dot{w}_d + w_d = 0. \quad (15)$$

Зі співвідношення (15) випливає, що ФЛ w_d є експоненційно спадною функцією і в результаті відхилення МТ від ТС буде спадати: $\|X(t)\| \rightarrow 0$. З рівняння (12) з урахуванням (9) випливає

$$\dot{V}_C = -S\dot{X} = -SV. \quad (16)$$

Підставивши в (14) значення V_C і \dot{V}_C з (12), (16), послідовно отримуємо

$$U = -\tilde{A}X - \underline{A}V - SV - \frac{1}{2\tau}V - \frac{1}{2\tau}SX,$$

$$U = -\tilde{A}X - \frac{1}{2\tau}SX - \underline{A}V - SV - \frac{1}{2\tau}V,$$

$$U = -(\tilde{A} + \frac{1}{2\tau}S)X - (\underline{A} + S + \frac{1}{2\tau}I_3)V. \quad (17)$$

Підставивши в (17) значення X і V з (8), отримаємо

$$U = C^T Z, \quad C^T = -[(\tilde{A} + 0,5\tau^{-1}S)C_1^T + (\underline{A} + S + 0,5\tau^{-1}I_3)C_2^T]. \quad (18)$$

При управлінні U , що визначається формулою (18), отримуємо такі рівняння замкнутої системи:

$$\dot{Z} = A_C Z, \quad A_C = (A + BC^T), \quad Z^T = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6), \quad (19)$$

де

$$A_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5\tau^{-1}s_{11} & 0 & 0 & -(s_{11} + 0,5\tau^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & -0,5\tau^{-1}s_{22} & 0 & 0 & -(s_{22} + 0,5\tau^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & -0,5\tau^{-1}s_{33} & 0 & 0 & -(s_{33} + 0,5\tau^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що, нехтуючи у формулі для управління (14) доданком \dot{V}_C , з рівнянь (9) отримуємо рівняння стійкої аперіодичної ланки

$$T\dot{V} + V = V_C, \quad T = 2\tau. \quad (20)$$

Рівняння виду (20) використовувалося в алгоритмі управління кутовим рухом (орієнтацією) пілотованого орбітального комплексу «Мир», в якому замість вектора лінійних швидкостей V був вектор кутової швидкості [10].

Результати обчислювальних експериментів

Для ілюстрації працездатності та ефективності отриманих алгоритмів розроблено комп'ютерну програму та виконано ряд обчислювальних експериментів. Нижче наведено результати дослідження характеристик перехідних процесів (ПП) стабілізації ГСС заданої точки стояння. Координати точки стояння вважалися наступними: $x_S = r_S \cos 0,25\pi$, $y_S = r_S \sin 0,25\pi$, $z_S = 0$, $r_S = 42164$ км, що відповідає довготі точки стояння $\lambda_S = 45^\circ$. Для врахування невизначеності в інформації про параметри системи керування вибиралося у вигляді

$$U = -\alpha \tilde{A}X - \alpha \underline{A}V + \dot{V}_C - \frac{1}{2\tau}(V - V_C), \quad \alpha \in [0,8;1,2], \quad (21)$$

що збігається з (14) при $\alpha = 1$.

Згідно з (21) у вихідних змінних управління та рівняння замкнутої системи мають вигляд

$$U = C^T(\alpha)Z, \quad C^T(\alpha) = -[(\alpha \tilde{A} + 0,5\tau^{-1}S)C_1^T + (\alpha \underline{A} + S + 0,5\tau^{-1}I_3)C_2^T], \quad (22)$$

$$\dot{Z} = A_C(\alpha)Z, \quad A_C(\alpha) = [A + BC^T(\alpha)], \quad A_C(1) = A_C. \quad (23)$$

Перехідні процеси за початкових відхилень від точки стояння $Z_0^T = (100, 200, 300, 0, 0, 0)$, параметри алгоритму управління $S = 10^{-4} \times \text{diag}\{5;2;1,5\}$, $\tau = 2,5 \cdot 10^3$ при $\alpha = 1$ показано на рис. 1–4 (відповідно ПП стабілізації координат $z_J(t)$, ПП відносних швидкостей $z_j(t)$, $\delta_Z(t) = \|Z(t)\|^2$, $\delta_U(t) = \|U(t)\|^2$).

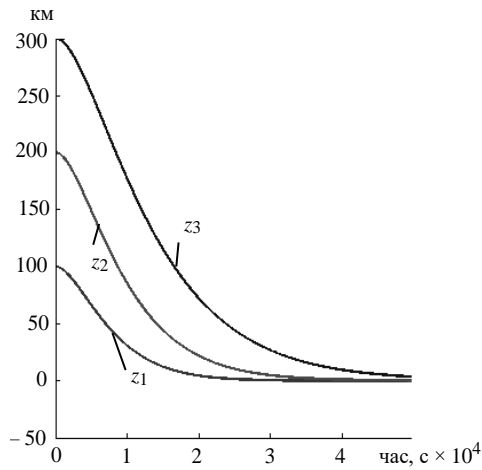


Рис. 1

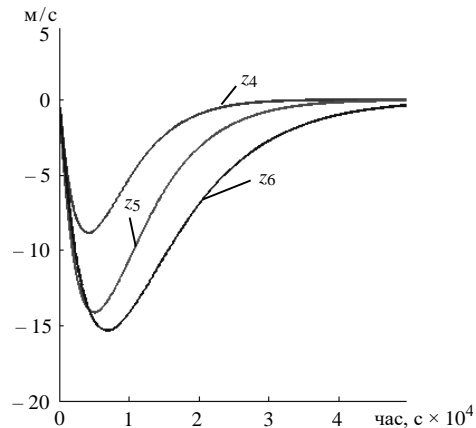


Рис. 2

Графіки перехідних процесів, побудовані за різних значень $\alpha \in [0,8;1,2]$, у співвідношеннях (22), (23) несуттєво відрізнялися від вищенаведених. Інакше кажучи, результати обчислювальних експериментів ілюструють властивість грубості запропонованого алгоритму управління (18) у плані Андронова–Понтрягіна [11] або властивість робастності в сучасній «західній» термінології.

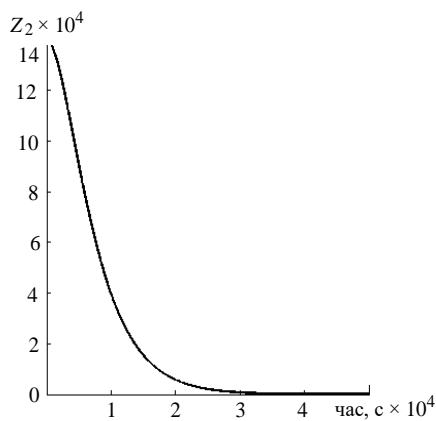


Рис. 3

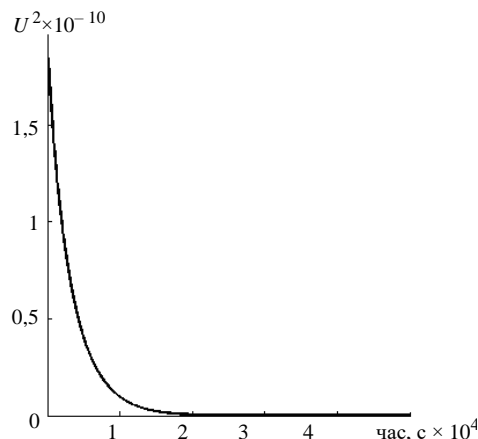


Рис. 4

Гарантоване оцінювання точності стабілізації точки стояння ГСС

1. Постановка задачі. Вище в результаті розв'язання задачі синтезу стабілізації ГСС в ТЗ отримані рівняння динаміки замкнутої системи управління в класі лінійних диференціальних рівнянь (див., наприклад, рівняння (19)). При розв'язанні задачі синтезу не враховувались такі збурюючі фактори, як відмінність ГПЗ від центрального гравітаційного поля, збурення, викликані Місяцем, Сонцем та ін. Очевидно, що таке отримане рішення задачі синтезу ідеалізоване, хоча б тому, що не дозволяє отримати оцінки точності стабілізації в режимі, що встановився. Під таким режимом розуміється широкий клас коливальних процесів, фазові траєкторії яких належать деякій обмеженій множині фазового простору. Конкретними реалізаціями таких процесів можуть бути періодичні або майже періодичні процеси, рекурентні рухи, хаотичні процеси [12–14]. Конкретне врахування впливу навіть окремих з перерахованих збурюючих факторів суттєво ускладнює математичну модель ГСС, а саме рівняння руху МТ. Наприклад, врахування впливу лише реального (нецентрального) ГПЗ потребувало б включення до рівняння руху МТ кількох гармонік з існуючих його математичних моделей як досить громіздких розкладів за сферичними функціями (див., наприклад, [15]). У той же час у сучасній теорії управління та теорії стійкості, на наш погляд, існують методи та розділи, що дозволяють отримувати ефективне вирішення задачі гарантованого оцінювання точності стабілізації ТС менш складними обчислювальними методами.

У теорії управління це методи, засновані на так званому гарантованому (синоніми теоретико-множинному чи ігровому) підході до математичної інтерпретації невизначеності в рівняннях об'єктів управління. Основи цього напрямку закладено авторами монографій, збірників, статей [16–22].

У теорії стійкості, яку також можна інтерпретувати як найважливіший розділ загальної теорії управління, до цих розділів належить прямий метод Ляпунова для дослідження стійкості динамічних систем при постійно діючих обмежених збуреннях [23].

У цих методах для отримання ефективного розв'язання згаданої задачі використовуються структурно збурені лінійні моделі, які з урахуванням введених вище позначень та специфіки задачі можна представити у адаптованому вигляді

$$\dot{Z} = A_C Z + f(Z, X_S, t), \quad (24)$$

де $Z \in R^n$, A_C — гурвицева $(n \times n)$ -матриця, $f(Z, X_S, t)$ — неконтрольоване обмежене за нормою збурення $\|f(Z, X_S, t)\| = \|f\| \leq q \forall Z \in R^n, t \geq 0$, q і X_S — задані константа та вектор параметрів. Тут і далі для визначеності покладемо $n = 6$. При цьому під вектором X_S розуміються координати точки ГСС, а збуренням обмеженої інтенсивності $\|f(Z, X_S, t)\| \leq q$ інтерпретується відмінність ГПЗ від центрального поля, вплив гравітаційних полів Сонця, Місяця та інші збурення. Очевидно, що система (24) дисипативна і в ній при $t > t_*$, де t_* — деяке досить велике число, можуть існувати згадані вище обмежені за деякою нормою процеси, що встановилися $\|Z(t)\| \leq \mu$. При цьому константою μ визначається величина помилки стабілізації.

2. Алгоритм еліпсоїдного оцінювання множин досяжності. Розглянемо спочатку спосіб, заснований на еліпсоїдальній апроксимації множин досяжності (МД) динамічних систем (ДС), схильних до впливу обмежених збурень. Нагадаємо, що під МД ДС у довільний момент часу (безперервного або дискретного) розуміється множина фазового простору, в яку можуть потрапити в даний момент кінці її траєкторій, «стартуючих» з деякої заданої початкової множини при всіх можливих значеннях обмежених зовнішніх збурень. МД є важливою характеристикою ДС та використовуються при вирішенні багатьох фундаментальних та прикладних завдань управління ними. Проте МД мають досить складну структуру навіть лінійних систем. Тому використовуються їх зовнішні оцінки множинами простішої структури, а саме, опуклими багатогранниками та еліпсоїдами. Існує досить велика кількість робіт, присвячених задачам еліпсоїдальної апроксимації МД систем виду (24) (по суті диференціального включення), а також роботи з урахуванням обмежених параметричних збурень матриці A_C та інших обмежень. Вкажемо кілька робіт, зміст яких найкраще відповідає особливостям аналізованої постановки завдання оцінювання зверху норми $\|Z(t)\|$ рішень (24) при $t \rightarrow \infty$ [24–31]. Припустимо, що вектор-функція збурення $f(\cdot)$ задовольняє єдиному обмеженню

$$f^T(\cdot)f(\cdot) = \|f\|^2 \leq q^2 \quad (25)$$

при всіх значеннях її аргументів, і розглянемо еліпсоїди виду

$$E(t) = E[\hat{Z}(t), H(t)] = \{Z \in R^n : \sigma[\hat{Z}(t), H(t)] \leq 1\}, \quad (26)$$

де $\sigma[\hat{Z}(t), H(t)] = [Z - \hat{Z}(t)]^T H^{-1}(t)[Z - \hat{Z}(t)]$, $H = H^T \succ 0$. При цьому має місце твердження [31], адаптоване до позначень і специфіки задачі, що розглядається.

Твердження. Оцінка зверху МД динамічної системи (24), (25) еліпсоїдами $E[\hat{Z}(t), H(t)]$ виду (26) визначається рішеннями задачі Коші для диференціальних рівнянь

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = A_C \hat{Z}, \quad (27)$$

$$\frac{dH}{dt} = A_C H + H A_C^T + q \left[\sqrt{\frac{6}{SpH}} H + \sqrt{\frac{SpH}{6}} I_6 \right] \quad (28)$$

при заданому початковому еліпсоїді $E[\widehat{Z}(t_0), H(t_0)]$, такому що $Z(t_0) \in E[\widehat{Z}(t_0), H(t_0)]$. Для гурвицевої матриці A_C асимптотичний еліпсоїд $E_\infty = E[0, H_\infty] = E[\widehat{Z}(t), H(t)]$ при $t \rightarrow \infty$ визначає гарантовану оцінку точності системи, що встановилася [31].

Наведений у твердженні алгоритм дозволяє будувати як поточні гарантовані множинні оцінки зверху точності стабілізації ТС у вигляді розв'язку диференціальних рівнянь (27), (28), так і оцінку зверху точності, що встановилася, тобто, інакше висловлюючись, дозволяє будувати поточні еліпсоїдальні оцінки МД системи (24), (25), сукупність яких утворює у її фазовому просторі зовнішню апроксимацію інтегральних воронки чи трубок траєкторій [20, 29, 31].

3. Алгоритм оцінювання граничної множини прямим методом Ляпунова.

Розглянемо спосіб отримання оцінки точності стабілізації ТС ГСС, заснований на відомих узагальненнях [23, 32, 33] прямого методу Ляпунова дослідження стійкості рішень диференціальних рівнянь на дослідження властивостей стійкості обмежених множин у їх фазовому просторі і безпосередньо на властивість стійкості такої множини для лінійної структурно збуреної системи (24), (25). При цьому як оцінка точності може використовуватися гранична множина системи. Нагадаємо, що під граничною множиною ДС розуміється множина у її фазовому просторі, в якій потрапляють (або до якого необмежено наближаються) всі її фазові траєкторії (дисипативність в цілому) або їх певної області, що стартують (дисипативність в області). Однак граничні множини, як і МД, можуть мати досить складну структуру. Тому використовуються їх апроксимації зверху деякими опуклими множинами, наприклад поверхнями рівнів функцій Ляпунова (ФЛ). При найчастіше використовуваних ФЛ у вигляді квадратичної форми фазових координат апроксимаціями граничних множин ДС, як і МД, будуть еліпсоїди в їх фазових просторах. Розглянемо саме задачу отримання еліпсоїдальної оцінки зверху μ граничної множини M системи (24), для якої $Z(t) \in M \forall t \geq t_*$ при $Z(t_*) \in M$. Для її вирішення скористаємося відомими узагальненнями [23, 32, 33] прямого методу Ляпунова на дослідження стійкості граничних множин і виберемо ФЛ

$$v = Z^T P Z, \quad (29)$$

де P — симетрична позитивно визначена $n \times n$ -матриця $P = P^T > 0$. При цьому похідна від функції Ляпунова (29) в силу рівняння (24) має вигляд

$$\dot{v}(Z) = Z^T (A_C^T P + P A_C) Z + 2f^T(\cdot) P Z. \quad (30)$$

Оскільки матриця A_C гурвицева, то з (30) отримуємо матричне рівняння Ляпунова

$$A_C^T X + X A_C = -C, \quad (31)$$

яке має рішення $X = X^T = P = P(C) > 0$ за будь-якої матриці $C = C^T > 0$. Для отримання рішення можна скористатися, наприклад, методом [34]. З урахуванням (31) та вищесказаного похідну функцію Ляпунова (30) запишемо

$$\dot{v}(x) \leq -Z^T C Z + 2f^T(\bullet) P(C) Z. \quad (32)$$

З (32) отримуємо оцінку

$$\dot{v}(Z) \leq -\lambda_m(C) \|Z\|^2 + 2q \|P(C)\| \|Z\|, \quad (33)$$

де $\lambda_m(C) > 0$ — мінімальне власне значення матриці C . Знайдемо множину, на якій оцінка (33) менша нуля:

$$\dot{v}(Z) \leq [-\lambda_m(C)\|Z\| + 2q\|P(C)\|]\|Z\| < 0. \quad (34)$$

Співвідношенням (34) визначається множина

$$N = \{Z \in R^6 : \|Z\| \leq \rho(C) = 2q\lambda_m^{-1}(C)\|P(C)\|\}, \quad (35)$$

така що $\dot{v}(Z) < 0$ при $\|Z\| \geq \rho(C)$, тобто при $Z \notin N$. Очевидно, множину (35) можна подати у вигляді еліпсоїда

$$E_N = \{Z \in R^6 : Z^T H_N^{-1} Z \leq 1\}, \quad (36)$$

де матриця $H_N = \rho^2(C)I_6$. Еліпсоїд (36) повністю визначається своєю опорною функцією [21]

$$\delta(l|E_N) = \sqrt{l^T H_N l} \quad (37)$$

та співвідношеннями $l^T Z \leq \delta(l|E_N) \quad \forall l \in R^6$.

Для отримання оцінки граничної множини знайдемо еліпсоїд, обмежений поверхнею рівня функції $Z^T P(C)Z \leq \mu$. Цей еліпсоїд можна подати у вигляді

$$E_M = \{Z \in R^6 : Z^T H_M^{-1} Z \leq 1\}, \quad H_M = \mu P^{-1}(C), \quad (38)$$

з опорною функцією $\delta(l|E_M) = \sqrt{l^T H_M l}$, аналогічною (37). З [32, 33] випливає, що еліпсоїд E_M у вигляді (38) буде оцінкою зверху граничної множини M системи (24), якщо матиме місце включення $E_N \subset E_M$. Згідно з [35, 36] необхідною та достатньою умовою справедливості цього включення є виконання умови для опорних функцій:

$$\delta(l|E_M) = \sqrt{l^T H_M l} > \delta(l|E_N) = \sqrt{l^T H_N l} \quad \forall l \in R^6. \quad (39)$$

З (39) безпосередньо випливає нерівність

$$l^T (H_M - H_N) l = l^T [\mu P^{-1}(C) - \rho^2(C)I_6] l = l^T R(\mu, C) l > 0,$$

де $R(\mu, C) = R^T(\mu, C) > 0$ — позитивно визначена матриця $R = R(\mu, C) = \mu P^{-1}(C) - \rho^2(C)I_6 = \mu P^{-1}(C) - 4q^2 \lambda_m^{-2}(C) \|P(C)\|^2 I_6$.

Як критерій оптимальності вибору оцінки зверху граничної множини M можна вибрати, наприклад, багатовимірний об'єм V_M еліпсоїда E_M , пропорційний визначнику матриці $H_M = \mu P^{-1}(C)$ [21]. При цьому оптимальне значення параметра оцінки μ_* при позитивній визначеності матриці $R(\mu, C) > 0$ визначиться як розв'язання задачі

$$\mu_* = \arg \min_{R>0} \det H_M = \arg \min_{R>0} \det [\mu P^{-1}(C)]. \quad (40)$$

З метою спрощення за аналогією з [37] можна розглядати задачу

$$\mu_* = \arg \min_{R>0} Sp H_M = \arg \min_{R>0} Sp [\mu P^{-1}(C)]. \quad (41)$$

Зміст вищенаведених міркувань геометрично наочно наведено у рис. 5, де ілюструється оцінювання граничної множини M .

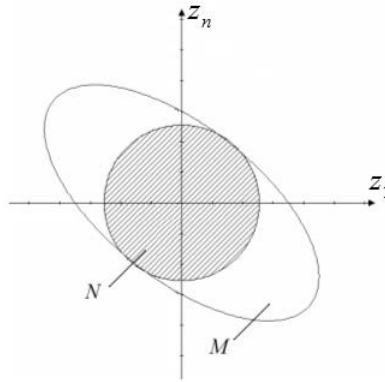


Рис. 5

Для вирішення оптимізаційних задач (40), (41) можна скористатися методами з [38–41].

Вказано також простий конструктивний алгоритм проектування еліпсоїдів виду (26) у просторі R^n на його довільний підпростір [42]. Алгоритм дозволяє отримувати інтервальні оцінки точності стабілізації за будь-яким компонентом вектора Z і, зокрема, щодо компонентів $z_1 = x - x_S$, $z_2 = y - y_S$, $z_3 = z - z_S$, $x_S = r_S \cos \lambda_S$, $y_S = r_S \sin \lambda_S$, $z_S = 0$, де r_S і λ_S — радіус ГСО та задана довгота ТС. Інтервальні оцінки дозволяють безпосередньо отримати рішення розглянутої в [43] задачі оцінювання досяжної точності стабілізації ТС ГСС.

Висновок

Запропоновано нові методи управління стабілізацією довготи точки стояння геостационарного супутника. Вони засновані на використанні розвинутого формалізму побудови зовнішніх еліпсоїдальних оцінок множин досяжності та граничних множин лінійних динамічних систем, структурно збурених дією немодельованих обмежених впливів довкілля. На відміну від відомих методів вони дозволяють поряд із синтезом власне керуючих впливів отримувати оцінку відхилення супутника від заданих координат точки стояння в режимі, що встановився. Ці відмінності спричинені сумарним впливом немодельованих зовнішніх збурень: відмінністю гравітаційного поля Землі від центрального, гравітаційних збурень з боку Місяця, Сонця тощо. Вказано також простий конструктивний алгоритм проектування отриманих еліпсоїдних оцінок у просторі R^n на його довільний підпростір [42]. Зокрема, алгоритм дозволяє отримувати гарантовані інтервальні оцінки точності за будь-яким компонентом вектора стану Z . Інтервальні оцінки дозволяють безпосередньо отримати рішення розглянутої в [43] задачі оцінювання досяжної точності стабілізації ТС ГСС.

V. Volosov, V. Shevchenko

SYNTHESIS OF GEOSTATIONARY SATELLITE STABILIZATION CONTROL AT THE STANDING POINT

Victor Volosov

Space Research Institute NAS of Ukraine and SSA of Ukraine, Kyiv,
wolosov@mail.ru

Volodymyr Shevchenko

Space Research Institute NAS of Ukraine and SSA of Ukraine, Kyiv,
vovan_16@ukr.net

Methods and algorithms for ballistic support of the longitude stabilization control of the geostationary satellite (GSS) orbital position have been developed. The evolution of current GSS coordinates was modeled by differential equations of motion of a material point in the central gravitational field, taking into account limited structural-parametric perturbations of known intensity, caused by the general influence of the Sun, Moon, and the difference between the Earth's gravitational field and the central one. Specific mathematical modeling of these perturbations was not considered, only the properties of their general norm boundedness were used. For control synthesis, we applied an analogue of the method of decomposition of a general synthesis problem into kinematic and dynamic control problems. They were solved with the help of well-known generalizations of Lyapunov's direct method of studying the stability of solutions of differential equations to studying the stability of closed bounded sets (specifically, multidimensional ellipsoids) in their phase spaces. Along with the method for synthesis of stabilization control of the orbital position longitude, methods for ellipsoidal estimation of stabilization errors caused by the influence of the mentioned disturbances are proposed. The methods are based on the construction of external ellipsoidal estimates of reachability sets and limit sets in phase spaces of dynamical systems with limited structural perturbations. A method is also proposed for obtaining guaranteed interval estimates of steady-state stabilization errors for each of the coordinates. The effectiveness of the proposed control methods is illustrated by the results of computer simulation.

Keywords: control, geostationary satellite, Lyapunov method, reachability sets, limit sets.

REFERENCES

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч.1 М. : Наука, 1965. 468 с.
2. Бутенин Н.Н., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 11. М. : Наука, 1979. 544 с.
3. Куликов К.А. Курс сферической астрономии. М. : Наука, 1969. 216 с.
4. Остославский И.В., Стражева И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1969. 499 с.
5. Новоселов В.С., Королев В.С. Аналитическая механика управляемой системы. Изд-во С. Петерб. ун-та, 2005. 298 с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1968. 431 с.
7. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
8. Волосов В.В. Об управлении ориентацией космического аппарата в орбитальной системе координат с использованием эллипсоидальных оценок его вектора состояния. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 1998. № 5. С. 31–41.
9. Волосов В.В., Шевченко В.Н. Синтез алгоритмов управления ориентацией космического аппарата на основе обобщений прямого метода Ляпунова. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 5. С. 106–117.
10. Математическое моделирование эйлеровых разворотов орбитального комплекса «Мир» гидродинами / В.А. Сарычев, М.Ю. Беляев, С.Г. Зайков, В.В. Сазонов, Б.П. Тесленко *Космические исследования*. 1991. Т. 29, вып. 4. С. 532–543.
11. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. *Доклады Академии Наук СССР*. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
12. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Ленинград : Изд. Ленинград. ун-та, 1983. 344 с.
13. Биркгоф Д. Динамические системы. Изд. дом «Удмуртский ун-т», 1999. 408с.
14. Белецкий В.В. Регулярные и хаотические движения в задаче ориентации спутника, Препринт № 53. М. : ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1990.
15. Дубошин Г.Р. Небесная механика. Основные задачи и методы. М. : Наука, 1968. 800 с.
16. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 475 с.
17. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1968. Vol. AC-13, N 1. P. 22–28.
18. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
19. Избранные труды А. Б. Куржанского. М. : Изд-во МГУ, 2009. 756 с.

20. A.B. Kurzhanski and I. Vdlyi. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston : Birkhauser, 1997.
21. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М. : Наука, 1988. 320 с.
22. Bounding approaches to system identification (Edited by Mario Milanese, John Norton, Helene Piet-Lahanier, Eric Walter). New York : Plenum Press, 1996. 565p.
23. Красовский Н.Н. Обобщение теорем второго метода Ляпунова. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. С. 463–467.
24. Баландин Д.В., Коган М.М. Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости. *Автоматика и телемеханика*. 2020. Вып. 8. С. 8–28.
25. Шориков А.Ф., Булаев В.В., Горанов А.Ю., Калев В.И. Аппроксимация областей достижимости нелинейных дифференциальных управляемых динамических систем. *Вестник ЮУрГУ. Сер. «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. 2018. Т. 18, № 3. С. 39–50.
26. Гусев М.И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем. *Труды ИММ УрО РАН*. 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.
27. Филиппова Т.Ф. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы. *Труды ИММ УрО РАН*. 2010. Т. 16, № 1. С. 223–232.
28. Филиппова Т. Ф. Внешние оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью и комбинированной нелинейностью. *Труды ИММ УрО РАН*. 2017. Т. 23, № 1. С. 262–274.
29. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений. *Вестн. Удмуртского ун-та*. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
30. Малышев В.В., Тычинский Ю.Д. Построение множеств достижимости и оптимизации маневров искусственного спутника Земли с двигателями малой тяги в сильном гравитационном поле. *Теория и системы управления*. 2005. № 4. С. 124–132.
31. Бабий Н.А., Волосов В.В., Шевченко В.Н. Внешние эллипсоидальные аппроксимации множеств достижимости динамических систем. *Кибернетика и вычислительная техника*. 2014. Вып. 177. С. 16–27.
32. Зубов В.И. Устойчивость движения. М. : Высшая школа, 1973. 272 с.
33. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М. : Наука, 1978. 400 с.
34. Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А. Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2017. № 1. С. 3–20.
35. Рокафелар Р. Выпуклый анализ. М. : Мир, 1972. 470 с.
36. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физматлит, 2004. 416 с.
37. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. URSS. 2014. 560с.
38. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М. : Наука, 1984. 320 с.
39. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1980. 520 с.
40. Бахвалов Н.С., Жидков Н. П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. : Наука, 1987. 600 с.
41. Варфоломеев А. Г. О производной скалярной функции по симметричному матричному аргументу. *Труды ПГУ. Математика*. 1995. Вып. 2. С. 3–10.
42. Волосов В.В., Калита А.С. Исследование алгоритма одновременного оценивания фазового состояния и параметров дискретного динамического объекта. *Кибернетика и вычислительная техника*. 1988. Вып.79. С. 23–28.
43. Жодзинский А.И., Махненко Ю.Ю. Оценки достижимой точности удержания спутников связи на геостационарной орбите. *Электросвязь*. 2002. № 8. С. 18–21.

Отримано 11.10.2022