

**МОДЕЛІ ПЛОСКОГО РУХУ  
ДВОКОЛІСНОГО ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО  
БАЛАНСУЮЧОГО ЗРАЗКА**

**Кулік Анатолій Степанович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»,

*anatoly.kulik@gmail.com*

**Дергачов Костянтин Юрійович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»,

*k.dergachov@khai.edu*

**Пасічник Сергій Миколайович**

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»,

*s.pasichnyk@khai.edu*

Предметом вивчення в статті є процес формування моделей плоского руху двоколісного експериментального балансуемого зразка (ДЕБЗ). Метою є розробка підходу до формування моделей плоского руху ДЕБЗ як об'єкта управління. Поставлено наступні завдання. Сформувати фізичну модель ДЕБЗ. Розробити за допомогою лагранжового формалізму нелінійний математичний опис процесу поступального та кутового руху ДЕБЗ на площині. Отримати опис об'єкта управління в частотній області за допомогою перетворень Лапласа. Отримати лінеаризований математичний опис об'єкта управління в просторі станів. Сформувати графічні моделі ДЕБЗ як об'єкта управління за допомогою структурних схем у часовій та частотній областях. Сформувати умови використання математичних описів як математичних моделей об'єкта управління. Використовуваними методами є: метод Лагранжа, аналітичної лінеаризації, простору станів, перетворення Лапласа. Отримано наступні результати. Сформовано динамічні моделі механічних та електромеханічних процесів поступального та кутових рухів ДЕБЗ на площині. За допомогою лагранжового підходу розроблено нелінійну математичну модель руху ДЕБЗ. Із використанням методу аналітичної лінеаризації отримано математичну модель лінійного наближення у формі диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Сформовано математичні моделі локальних рухів у частотній області у формі передавальних функцій. Сформовано структурну схему перетворювальних процесів у ДЕБЗ. Показано можливість побудови математичних моделей у просторі станів як у векторно-матричній формі, так і у графічній — у вигляді структурних схем для вирішення конкретних завдань аналізу й синтезу. Висновок: наукова новизна полягає у формуванні підходу щодо отримання моделей поступального та кутового рухів ДЕБЗ на площині, що відрізняється від відомих повнотою обліку діючих сил і моментів.

**Ключові слова:** двоколісний експериментальний балансуєчий зразок (ДЕБЗ), електропривод, об'єкт управління, математичні моделі, передавальна функція, простір станів.

### Вступ

У низці класів літальних апаратів використовується властивість нестійких кутових рухів відносно центра мас. Так, для забезпечення маневреності винищувачів при конструюванні центр аеродинамічних сил розміщують перед центром мас. Так само вчиняють і при проектуванні пасажирських і транспортних широкофюзеляжних літаків з метою забезпечення більш високих показників експлуатації. На ракетах-носіях властивість нестійкості проявляється на початковому етапі польоту, коли діє перекидний момент аеродинамічних сил. У космічному польоті на літальні апарати в умовах відсутності демпфуючого середовища діє цілий ряд збурних впливів, що зумовлюють нестійкі кутові рухи відносно центра мас [1–3].

Найпростішими динамічно-подібними фізичними моделями нестійких кутових рухів є різні пристрої типу «зворотний маятник» [4]. Використовуючи маятникові пристрої, можна перенести вивчення властивості нестійкості кутових рухів літальних апаратів на більш прості ідеалізовані математичні моделі з метою глибшого розуміння цього фізичного явища та вибору інструментальних засобів його парирования.

Маятниковий пристрій, що є автономним двоколісним транспортним засобом пересування, привернув увагу ряду дослідників особливістю завдання стабілізації кутових положень відносно вертикальної осі [5–8].

У відомих моделях двоколісних балансуєчих транспортних засобів враховуються лише частинні рухи, що зумовлюють нестабільність кутового положення корпусу. Урахування особливостей плоского руху з балансуєчим положенням корпусу двоколісного засобу дозволило б отримати більш повну нелінійну модель руху для подальшого аналітичного вирішення завдань стійкого управління плоским рухом із заданим кутовим положенням корпусу як динамічно подібного прототипу для дослідження нестійких кутових рухів літальних апаратів.

У статті наведено результати досліджень з розробки динамічних, математичних та графічних моделей плоского руху двоколісного експериментального балансуєчого зразка.

### Динамічні моделі двоколісного балансуєчого експериментального зразка

Для вивчення нестійких кутових рухів відносно центра мас на кафедрі систем управління літальних апаратів використовуються різні маятникові пристрої. На рис. 1 представлено двоколісний експериментальний балансуєчий зразок (ДЕБЗ).

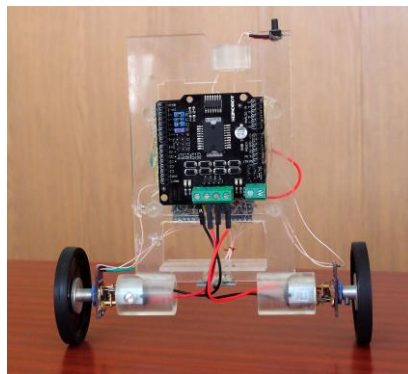


Рис. 1

Динамічну модель плоского руху зразка наведено на рис. 2.

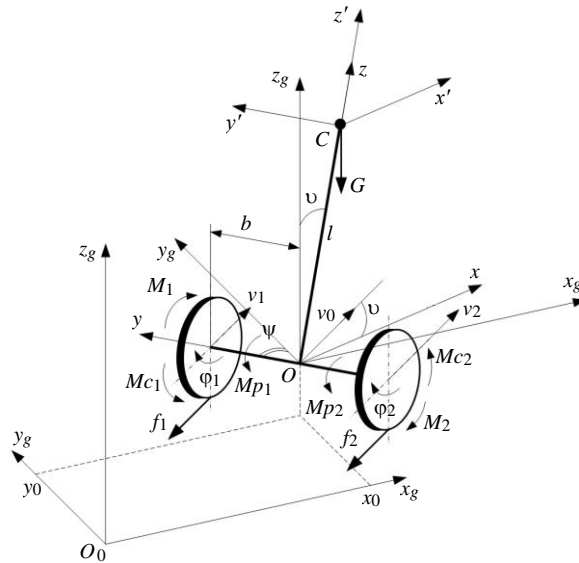


Рис. 2

Для опису динамічних процесів у ДЕБЗ використовуються стартова система координат  $O_0x_gy_gz_g$  та зв'язана система координат  $Oxyz$ . На ДЕБЗ діють сила ваги  $G$ , сили тертя першого та другого коліс  $f_1$  та  $f_2$ , рушійні моменти коліс  $M_1$  та  $M_2$ , статичні моменти тертя у шарнірах коліс  $M_{c1}$  та  $M_{c2}$ , реактивні моменти електродвигунів з редукторами  $M_{p1}$  та  $M_{p2}$ , моменти тертя коліс  $M_{f1}$  та  $M_{f2}$ .

Динамічну модель електроприводу зображено на рис. 3.

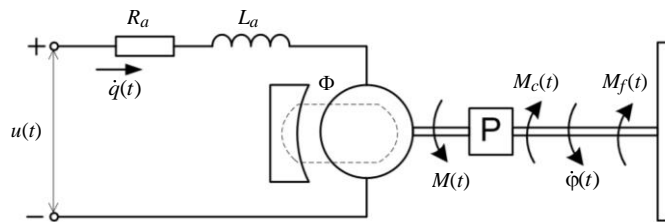


Рис. 3

У моделі використано такі позначення:  $u(t)$  — керуюча напруга;  $\dot{i}(t)$  — струм якоря;  $R_a$ ,  $L_a$  — опір та індуктивність обмотки якоря;  $\Phi$  — потік збудження постійного магніту;  $P$  — редуктор;  $\dot{\varphi}(t)$  — кутова швидкість обертання колеса.

Рух ДЕБЗ розглядається в умовах відсутності ковзання та відриву коліс від поверхні.

### Нелінійна математична модель

Для формалізації процесів руху ДЕБЗ використано лагранжовий підхід [9] у наступному вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} = Q_{\lambda_i}; \quad i = \overline{1, 5}, \quad (1)$$

де  $T$  — кінетична енергія зразка;  $\lambda_i$  — узагальнена координата;  $Q_{\lambda_i}$  — узагальнена сила, що діє вздовж узагальненої координати  $\lambda_i$ .

Рух ДЕБЗ характеризується п'ятьма ступенями свободи і такими узагальненими координатами: кутовим положенням корпусу —  $\upsilon = \lambda_1$ ; кутом повороту першого колеса —  $\phi_1 = \lambda_2$ ; кутом повороту другого колеса —  $\phi_2 = \lambda_3$ ; величиною електричного заряду першого електродвигуна —  $q_1 = \lambda_4$  та величиною електричного заряду другого електродвигуна —  $q_2 = \lambda_5$ .

Кінетична енергія ДЕБЗ описується наступним виразом:

$$T = T_f + T_r + T_{rs} + T_e,$$

де  $T_f$  — кінетична енергія поступального руху;  $T_r$  — кінетична енергія обертального руху;  $T_{rs}$  — сумарна кінетична енергія обертального руху роторів електродвигунів, редукторів та коліс;  $T_e$  — сумарна електрична кінетична енергія обмоток електродвигунів.

Кінетична енергія поступального руху така:

$$T_f = \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (2)$$

де  $m$  — маса ДЕБЗ;  $v_c$  — абсолютна швидкість центра мас ДЕБЗ — точки  $C$ .

Для визначення абсолютної швидкості скористаємося кінематичними співвідношеннями

$$x_c = x_o + l S_\upsilon C_\psi; \quad y_c = y_o + l S_\upsilon S_\psi; \quad z_c = z_o + l C_\upsilon, \quad (3)$$

де  $x_c, y_c, z_c$  — координати центра мас у стартовій системі координат;  $x_o, y_o, z_o$  — координати геометричного центра осі коліс у стартовій системі координат (точка  $O$ );  $l$  — відстань від осі коліс до центра мас ДЕБЗ;  $\upsilon$  — кут тангажа;  $\psi$  — кут ристання;  $S$  —  $\sin$ ;  $C$  —  $\cos$ .

Продиференціюємо вирази (3). Тоді

$$\dot{x}_c = \dot{x}_o + l C_\upsilon C_\psi \dot{\phi} - l S_\upsilon S_\psi \dot{\psi};$$

$$\dot{y}_c = \dot{y}_o + l C_\upsilon S_\psi \dot{\phi} + l S_\upsilon C_\psi \dot{\psi};$$

$$\dot{z}_c = -l S_\upsilon \dot{\upsilon}.$$

З урахуванням прийнятих припущень про особливості руху ДЕБЗ, тобто відсутності руху за кутом крену, можна записати

$$v_o = \frac{r_w}{2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2); \quad v_o^2 = \dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2.$$

Тоді вираз для квадрата швидкості центра мас набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} v_c^2 &= \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 = v_o^2 + l^2 \dot{\upsilon}^2 + l^2 S_\upsilon^2 \dot{\psi}^2 + 2l C_\upsilon v_o \dot{\upsilon} = \\ &= \frac{r_w^2}{4} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + l^2 \dot{\upsilon}^2 + \frac{l^2 r_w^2}{4b^2} S_\upsilon^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + l r_w C_\upsilon (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \dot{\upsilon}. \end{aligned}$$

Підставимо у формулу (2) отриманий вираз квадрата швидкості  $v_c^2$  та запишемо вираз кінетичної енергії поступального руху:

$$T_f = \frac{1}{2} m \left( \frac{r_w^2}{4} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + l^2 \dot{v}^2 + \frac{l^2 r_w^2}{4b^2} S_v^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + l r_w C_v (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \dot{v} \right). \quad (4)$$

Кінетична енергія обертального руху така:

$$T_r = \frac{1}{2} I_v \omega_v^2,$$

де  $I_v$  — момент інерції ДЕБЗ відносно миттєвої осі обертання;  $\omega_v$  — кутова швидкість обертання ДЕБЗ відносно миттєвої осі обертання  $v$ .

Миттєва вісь обертання проходить через точку  $O$  осі коліс у площині  $Oy z_g$  (рис. 4).

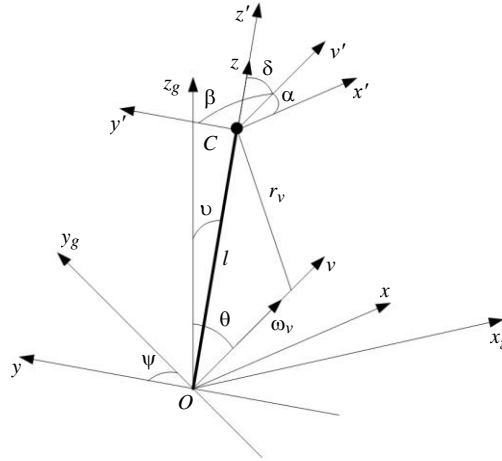


Рис. 4

Для знаходження  $I_v$  скористаємося теоремою Штейнера [9]:

$$I_v = I_{v'} + m r_v^2, \quad (5)$$

де  $I_{v'}$  — момент інерції ДЕБЗ відносно осі  $Cv'$ , що проходить через центр мас паралельно миттєвій осі обертання  $Ov$ ;  $r_v$  — відстань між осями  $Ov$  та  $Cv'$ .

Момент інерції  $I_{v'}$  представимо так:

$$I_{v'} = I_{x'} C_\alpha^2 + I_{y'} C_\beta^2 + I_{z'} C_\delta^2, \quad (6)$$

де  $I_{x'}$ ,  $I_{y'}$ ,  $I_{z'}$  — центральні моменти інерції ДЕБЗ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  — кути між віссю  $Cv'$  й осями  $Cx'$ ,  $Cy'$  та  $Cz'$  відповідно.

Вирази для напрямних косинусів у рівнянні (6) відповідно до рис. 2 матимуть такий вигляд:

$$C_\alpha = -S_v C_\theta; \quad C_\beta = -S_\theta; \quad C_\delta = C_v C_\theta; \quad (7)$$

$$C_\theta = \frac{\omega_{vz}}{\omega_v}; \quad S_\theta = \frac{\sqrt{\omega_{vx}^2 + \omega_{vy}^2}}{\omega_v}. \quad (8)$$

Квадрат відстані між осями  $Ov$  та  $Cv'$  дорівнюватиме

$$r_v^2 = (1 - C_v^2 C_\theta^2) l^2. \quad (9)$$

Компоненти миттєвої кутової швидкості  $\omega_{vx}$ ,  $\omega_{vy}$ ,  $\omega_{vz}$  у стартовій системі координат визначимо за допомогою матриці напрямних косинусів переходу від зв'язаної системи координат до стартової при  $\gamma = 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{vx} \\ \omega_{vy} \\ \omega_{vz} \end{bmatrix} &= M_{cm}^{36} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\upsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\psi}C_{\upsilon} & S_{\psi}C_{\upsilon} - C_{\psi}S_{\upsilon} & S_{\psi} \\ S_{\upsilon} & C_{\upsilon} & 0 \\ -S_{\psi}C_{\upsilon} & S_{\psi}S_{\upsilon} & C_{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\upsilon} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} C_{\psi}C_{\upsilon} & S_{\psi-\upsilon} & S_{\psi} \\ S_{\upsilon} & C_{\upsilon} & 0 \\ -S_{\psi}C_{\upsilon} & S_{\psi}S_{\upsilon} & C_{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\upsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\psi-\upsilon}\dot{\psi} + S_{\psi}\dot{\upsilon} \\ C_{\upsilon}\dot{\psi} \\ S_{\psi}S_{\upsilon}\dot{\psi} + C_{\psi}\dot{\upsilon} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $[0 \ \dot{\psi} \ \dot{\upsilon}]^T$  — вектор проєкцій  $\omega_v$  на осі зв'язаної системи координат.

Виконаємо перетворення та перепишемо вираз (5) з урахуванням співвідношень (6)–(10). У результаті отримаємо:

$$T_r = \frac{1}{2}((I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2)C_{\upsilon}^2)\omega_{vz}^2 + (I_{y'} + ml^2)\omega_v^2), \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_{vz}^2 &= S_{\psi}^2 S_{\upsilon}^2 \dot{\psi}^2 + S_{2\psi} S_{\upsilon} \dot{\psi} \dot{\upsilon} + C_{\psi}^2 \dot{\upsilon}^2; \\ \omega_v^2 &= (S_{\psi-\upsilon}^2 - C_{\psi}^2 S_{\upsilon}^2 + 1)\dot{\psi}^2 + (2S_{\psi-\upsilon} S_{\psi} + S_{2\psi} S_{\upsilon})\dot{\psi} \dot{\upsilon} + \dot{\upsilon}^2. \end{aligned}$$

Сумарна кінетична енергія обертального руху роторів електродвигунів із редукторами та колесами описується таким виразом:

$$T_{rs} = T_{rs1} + T_{rs2} = \frac{1}{2} I_{rw} \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{rw} \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_{rw} \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} I_{rw} \dot{\phi}_2^2, \quad (12)$$

де  $I_{rw} = (i_{red}^2 + 1)I_a + \frac{1}{2} m_w r_w^2$  — приведений до осі колеса момент інерції якоря електродвигуна з редуктором та колесом;  $i_{red}$  — передатне відношення редуктора;  $I_a$  — момент інерції якоря електродвигуна;  $m_w$  — маса колеса;  $r_w$  — радіус колеса.

Сумарна електрична кінетична енергія обмоток електродвигунів така:

$$T_e = T_{e1} + T_{e2} = \frac{1}{2} L_a i_1^2 + \frac{1}{2} L_a i_2^2 = \frac{1}{2} L_a \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} L_a \dot{q}_2^2. \quad (13)$$

Після підстановки отриманих виразів для частинних рухів (4), (11)–(13) отримаємо опис кінетичної енергії ДЕБЗ у такому вигляді:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left( \frac{r_w^2}{4} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)^2 + l^2 \dot{\upsilon}^2 + l^2 S_{\upsilon}^2 \dot{\psi}^2 + l r_w C_{\upsilon} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \dot{\upsilon} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} ((I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2)C_{\upsilon}^2)\omega_{vz}^2 + (I_{y'} + ml^2)\omega_v^2) + \\ &+ \frac{1}{2} I_{rw} (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) + \frac{1}{2} L_a (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Відповідно до ступенів свободи на ДЕБЗ діють такі узагальнені сили:

$$Q_U = mglS_U - \frac{1}{2}mlr_w C_U (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) - M_{p_1} - M_{p_2} - M_{c_1} - M_{c_2}; \quad (15)$$

$$Q_{\phi_1} = M_1 - f_1 r_w - M_{c_1}; \quad (16)$$

$$Q_{\phi_2} = M_2 - f_2 r_w - M_{c_2}; \quad (17)$$

$$Q_{q_1} = u_1 - R_1 \dot{q}_1 - e_1; \quad (18)$$

$$Q_{q_2} = u_2 - R_2 \dot{q}_2 - e_2, \quad (19)$$

де  $M_i = i_{red} c_m \Phi \dot{q}_i = i_{red} \kappa_m \dot{q}_i$ ;  $e_i = c_e \Phi \dot{\phi}_{ai} = i_{red} \kappa_e \dot{\phi}_i$ ;  $M_{p_i} = M_i$ ;  $\dot{\phi}_{ai}$  — кутова швидкість обертання якоря електродвигуна;  $\kappa_m$  та  $\kappa_e$  — коефіцієнти перетворення.

Після виконання перетворень виразу кінетичної енергії (14) відповідно до рівняння Лагранжа другого роду (1) та використання відповідних узагальнених сил (15)–(19) для кожної узагальненої координати отримано систему з п'яти нелінійних диференціальних рівнянь наступного виду:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{2}m(2l^2\ddot{v} - lr_w S_U (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)\dot{v} + lr_w C_U (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2)) - \frac{1}{2}(I_{z'} - I_{x'} - ml^2) \times \\ & \times \left( \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} S_U S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)\dot{v} + 2C_{\psi}^2 S_{2v} \dot{v}^2 \right) + \frac{1}{2}(I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2)C_U^2) \times \\ & \times \left( \frac{r_w^2}{2b^2} C_{2\psi} S_U (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 - \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} (2 - C_U) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)\dot{v} + \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} S_U (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) + 2C_{\psi}^2 \ddot{v} \right) + \\ & + \frac{1}{2}(I_{y'} + ml^2) \left( \frac{r_w}{2b} (2S_{\psi-v} S_{\psi} + S_{2\psi} S_U) (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) + 2\ddot{v} \right) + \\ & + \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) (C_{\psi-v} S_{\psi} + S_{\psi-v} C_{\psi} + C_{2\psi} S_U) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + \\ & + \frac{r_w}{4b} (I_{y'} + ml^2) (S_{2\psi} C_U - 2C_{\psi-v} S_{\psi}) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)\dot{v} - \\ & - \frac{1}{2}m \left( \frac{l^2 r_w^2}{4b^2} S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 - lr_w S_U (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)\dot{v} \right) + \frac{1}{2}(I_{z'} - I_{x'} - ml^2) S_{2v} \omega_{vz}^2 - \\ & - \frac{1}{2}(I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2)C_U^2) \left( \frac{r_w^2}{4b^2} S_{\psi}^2 S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} C_U \dot{v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \right) - \\ & - \frac{r_w^2}{8b^2} (I_{y'} + ml^2) (-S_{2(\psi-v)} - C_{\psi}^2 S_{2v}) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 - \frac{r_w}{4b} (I_{y'} + ml^2) (-2C_{\psi-v} S_{\psi} + S_{2\psi} C_U) \dot{v} \times \\ & \times (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) = mglS_U - \frac{1}{2}mlr_w C_U (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) - i_{red} \kappa_m \dot{q}_1 - i_{red} \kappa_m \dot{q}_2 - M_{c_1} - M_{c_2}; \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2) \frac{1}{2} m \left( \frac{r_w^2}{2} (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) - \frac{l^2 r_w^2}{2b^2} S_{2v}^2 (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) - \frac{l^2 r_w^2}{2b^2} S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} - l r_w S_{2v} \dot{v}^2 + l r_w C_{2v} \ddot{v} \right) - \\
& \quad - \frac{r_w}{4b} (I_{z'} - I_{x'} - ml^2) \left( -\frac{r_w}{b} S_{\psi}^2 S_{2v}^2 S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} - S_{2\psi} S_{2v} S_{2v} \dot{v}^2 \right) + \\
& \quad + \frac{r_w}{4b} (I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2) C_{2v}^2) \left( -\frac{r_w^2}{2b^2} S_{2\psi} S_{2v}^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 - \frac{r_w}{b} S_{\psi}^2 S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{r_w}{b} S_{\psi}^2 S_{2v}^2 (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) - \frac{r_w}{b} C_{2\psi} S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} - S_{2\psi} C_{2v} \dot{v}^2 - S_{2\psi} S_{2v} \ddot{v} \right) - \\
& \quad - \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) (S_{\psi-v}^2 - C_{\psi}^2 S_{2v}^2 + 1) (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) - \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) \times \\
& \quad \times \left( S_{2(\psi-v)} \left( \frac{r_w}{2b} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - \dot{v} \right) + \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} S_{2v}^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - C_{\psi}^2 S_{2v} \dot{v} \right) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - \frac{r_w}{4b} (I_{y'} + ml^2) \times \\
& \quad \times (2S_{\psi-v} S_{\psi} + S_{2\psi} S_{2v}) \ddot{v} - \frac{r_w}{4b} (I_{y'} + ml^2) \left( 2C_{\psi-v} S_{\psi} \left( \frac{r_w}{2b} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - \dot{v} \right) \dot{v} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{r_w}{b} S_{\psi-v} C_{\psi} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} + C_{2\psi} S_{2v} \frac{r_w}{b} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} + S_{2\psi} C_{2v} \dot{v}^2 \right) + \\
& \quad + I_{rw} \ddot{\phi}_1 - \frac{1}{2} (I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2) C_{2v}^2) \times \\
& \quad \times \left( -\frac{r_w^3}{2b^3} S_{2\psi} S_{2v}^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 - \frac{r_w^2}{2b^2} C_{2\psi} S_{2v} \dot{v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) + \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} \dot{v}^2 \right) + \frac{r_w^3}{16b^3} (I_{y'} + ml^2) \times \\
& \quad \times (S_{2(\psi-v)} + S_{2\psi} S_{2v}^2) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) (C_{\psi-v} S_{\psi} + S_{\psi-v} C_{\psi} + 2C_{2\psi} S_{2v}) \dot{v} \times \\
& \quad \times (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) = i_{red} \kappa_m \dot{q}_1 - f_1 r_w - M_{c1}; \tag{21} \\
& 3) \frac{1}{2} m \left( \frac{r_w^2}{2} (\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) + \frac{l^2 r_w^2}{2b^2} S_{2v}^2 (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) + \frac{l^2 r_w^2}{2b^2} S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} - l r_w S_{2v} \dot{v}^2 + l r_w C_{2v} \ddot{v} \right) - \\
& \quad - \frac{r_w}{4b} (I_{z'} - I_{x'} - ml^2) \left( \frac{r_w}{b} S_{\psi}^2 S_{2v}^2 S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} + S_{2\psi} S_{2v} S_{2v} \dot{v}^2 \right) + \\
& \quad + \frac{r_w}{4b} (I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2) C_{2v}^2) \left( \frac{r_w^2}{2b^2} S_{2\psi} S_{2v}^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + \frac{r_w}{b} S_{\psi}^2 S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{r_w}{b} S_{\psi}^2 S_{2v}^2 (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) + \frac{r_w}{b} C_{2\psi} S_{2v} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{v} + S_{2\psi} C_{2v} \dot{v}^2 + S_{2\psi} S_{2v} \ddot{v} \right) + \\
& \quad + \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) (S_{\psi-v}^2 - C_{\psi}^2 S_{2v}^2 + 1) (\ddot{\phi}_2 - \ddot{\phi}_1) + \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) \times
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \left( S_{2(\psi-\nu)} \left( \frac{r_w}{2b} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - \dot{\nu} \right) + \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} S_{\nu}^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - C_{\psi}^2 S_{2\nu} \dot{\nu} \right) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) + \\
& \quad + \frac{r_w}{4b} (I_{y'} + ml^2) (2S_{\psi-\nu} S_{\psi} + S_{2\psi} S_{\nu}) \ddot{\nu} + \frac{r_w}{4b} (I_{y'} + ml^2) \times \\
& \quad \times \left( 2C_{\psi-\nu} S_{\psi} \left( \frac{r_w}{2b} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - \dot{\nu} \right) \dot{\nu} + \frac{r_w}{b} S_{\psi-\nu} C_{\psi} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{\nu} + \right. \\
& \quad \left. + C_{2\psi} S_{\nu} \frac{r_w}{b} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) \dot{\nu} + S_{2\psi} C_{\nu} \dot{\nu}^2 \right) + I_{rw} \ddot{\phi}_2 - \frac{1}{2} (I_{x'} - I_{y'} + (I_{z'} - I_{x'} - ml^2) C_{\nu}^2) \times \\
& \quad \times \left( \frac{r_w^3}{2b^3} S_{2\psi} S_{\nu}^2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + \frac{r_w^2}{2b^2} C_{2\psi} S_{\nu} \dot{\nu} (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) - \frac{r_w}{2b} S_{2\psi} \dot{\nu}^2 \right) - \frac{r_w^3}{16b^3} (I_{y'} + ml^2) \times \\
& \quad \times (S_{2(\psi-\nu)} + S_{2\psi} S_{\nu}^2) (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 - \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + ml^2) (C_{\psi-\nu} S_{\psi} + S_{\psi-\nu} C_{\psi} + 2C_{2\psi} S_{\nu}) \dot{\nu} \times \\
& \quad \times (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1) = i_{red} \kappa_m \dot{q}_2 - f_2 r_w - M_{c2}; \tag{22}
\end{aligned}$$

$$4) \quad L_a \ddot{q}_1 = u_1 - R_1 \dot{q}_1 - i_{red} \kappa_e \dot{\phi}_1; \tag{23}$$

$$5) \quad L_a \ddot{q}_2 = u_2 - R_2 \dot{q}_2 - i_{red} \kappa_e \dot{\phi}_2. \tag{24}$$

Отримані рівняння необхідно доповнити кінематичними співвідношеннями, що зв'язують координати геометричного центра осі коліс  $x_o$ ,  $y_o$  та кут ристання  $\psi$ :

$$\psi = \frac{r_w}{2b} (\phi_2 - \phi_1); \quad x_o = \frac{r_w}{2} (\phi_1 + \phi_2) C_{\psi/2}; \quad y_o = \frac{r_w}{2} (\phi_1 + \phi_2) S_{\psi/2}. \tag{25}$$

Рівняння (20)–(25) разом описують нелінійні процеси руху ДЕБЗ. Нелінійні зв'язки між змінними, що характеризують рух зразка, суттєво ускладнюють аналіз та розуміння процесів руху у великому діапазоні їхньої зміни. Для спрощення процесу дослідження функціональних властивостей зразка можна значно зменшити діапазон змінних та перейти до дослідження у малому за допомогою рівнянь першого наближення.

### Лінійна математична модель

Для отримання як об'єкта автоматичного управління математичних моделей ДЕБЗ, необхідних для вирішення завдання синтезу системи автоматичного управління, виконаємо лінеаризацію за допомогою розкладання нелінійних залежностей у рівняннях (20)–(24) у ряд Тейлора за наступних початкових умов:

$$\dot{\nu}_0 = 0; \quad \dot{\psi}_0 = 0; \quad \dot{\phi}_{10} = 0; \quad \dot{\phi}_{20} = 0; \quad \dot{q}_{10} = 0; \quad \dot{q}_{20} = 0; \quad M_{10} = 0; \quad M_{20} = 0;$$

$$\nu_0 = 0; \quad \psi|_{t=0} = \psi_0; \quad \phi|_{t=0} = \phi_{10}; \quad \phi|_{t=0} = \phi_{20}; \quad q_{10} = 0; \quad q_{20} = 0.$$

У результаті лінеаризації виходять лінійні диференціальні рівняння у малих відхиленнях від початкових умов такого виду:

$$\begin{aligned}
& (2ml^2 + I_{y'} + (I_{z'} - I_{y'} - ml^2) C_{\psi_0}^2) \Delta \ddot{\nu} - mgl \Delta \nu = \\
& = - \left( mlr_w + \frac{r_w}{2b} (I_{y'} + ml^2) S_{\psi_0}^2 \right) (\Delta \dot{\phi}_1 + \Delta \dot{\phi}_2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( m l r_w + \frac{r_w}{2b} (I_{y'} + m l^2) S_{\psi_0}^2 \right) (\Delta \ddot{\phi}_1 + \Delta \ddot{\phi}_2) - i_{red} \kappa_m (\Delta \dot{q}_1 + \Delta \dot{q}_2); \\
& \left( \frac{1}{4} m r_w^2 + \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + m l^2) (S_{\psi_0}^2 + 1) + I_{rw} \right) \Delta \ddot{\phi}_1 + \\
& + \left( \frac{1}{4} m r_w^2 - \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + m l^2) (S_{\psi_0}^2 + 1) \right) \Delta \ddot{\phi}_2 + \\
& + \left( \frac{1}{2} m l r_w - \frac{r_w}{2b} (I_{y'} + m l^2) S_{\psi_0}^2 \right) \Delta \ddot{u} = \kappa_m i_{red} \Delta \dot{q}_1 - r_w \Delta f_1; \\
& \left( \frac{1}{4} m r_w^2 - \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + m l^2) (S_{\psi_0}^2 + 1) \right) \Delta \ddot{\phi}_1 + \left( \frac{1}{4} m r_w^2 + \frac{r_w^2}{4b^2} (I_{y'} + m l^2) (S_{\psi_0}^2 + 1) + I_{rw} \right) \Delta \ddot{\phi}_2 + \\
& + \left( \frac{1}{2} m l r_w + \frac{r_w}{2b} (I_{y'} + m l^2) S_{\psi_0}^2 \right) \Delta \ddot{u} = \kappa_m i_{red} \Delta \dot{q}_2 - r_w \Delta f_2; \\
& L_a \Delta \ddot{q}_1 + R_1 \Delta \dot{q}_1 = \Delta u_1 - \kappa_e i_{red} \Delta \dot{\phi}_1; \\
& L_a \Delta \ddot{q}_2 + R_2 \Delta \dot{q}_2 = \Delta u_2 - \kappa_e i_{red} \Delta \dot{\phi}_2; \\
& \Delta x_o = \frac{r_w}{2} C_{\psi_0/2} (\Delta \phi_1 + \Delta \phi_2); \\
& \Delta y_o = \frac{r_w}{2} S_{\psi_0/2} (\Delta \phi_1 + \Delta \phi_2).
\end{aligned}$$

Отримані в результаті лінеаризації рівняння відображають лише лінійні зв'язки між змінними в околі початкових умов. Ця обставина дозволяє скористатися принципом суперпозиції та звести завдання дослідження складного руху ДЕБЗ до дослідження більш простих локальних рухів, викликаних окремими керуючими та збурними впливами як у частотній, так і у часовій областях за допомогою більш простих математичних моделей.

Розглянемо на частинних прикладах особливості формування таких математичних моделей.

### Математичні моделі у частотній області

Скориставшись принципом суперпозиції, розглянемо рівняння руху ДЕБЗ за допомогою першого електродвигуна, прийнявши відповідні позначення коефіцієнтів при відхиленнях змінних. Тоді

$$a_{11} \Delta \ddot{u} + a_{12} \Delta u = b_{11} \Delta \ddot{\phi}_1 + b_{12} \Delta \dot{q}_1; \quad (26)$$

$$a_{21} \Delta \ddot{\phi}_1 + a_{22} \Delta \ddot{u} = b_{21} \Delta \dot{q}_1 + b_{22} \Delta f_1; \quad (27)$$

$$a_{31} \Delta \ddot{q}_1 + a_{32} \Delta \dot{q}_1 = b_{31} \Delta \phi_1 + b_{32} \Delta u_1; \quad (28)$$

$$\Delta x_o = c_{11} \Delta \phi_1;$$

$$\Delta y_o = c_{21} \Delta \phi_1.$$

Виразимо  $\dot{q}_1$  з рівняння (27), отримаємо, що

$$\Delta \dot{q}_1 = \frac{a_{21} \Delta \ddot{\phi}_1 + a_{22} \Delta \ddot{u} - b_{22} \Delta f_1}{b_{21}}, \quad (29)$$

й підставимо до рівняння (26) та після відповідних перетворень сформуємо наступне рівняння:

$$\Delta \ddot{u} = a'_{11} \Delta u + a'_{12} \Delta \ddot{\phi}_1 + b'_{11} \Delta f_1, \quad (30)$$

$$\text{де } a'_{11} = -\frac{a_{12} b_{21}}{a_{11} b_{21} - b_{12} a_{22}}; \quad a'_{12} = \frac{b_{11} b_{21} + b_{12} a_{21}}{a_{11} b_{21} - b_{12} a_{22}}; \quad b'_{11} = -\frac{b_{12} b_{22}}{a_{11} b_{21} - b_{12} a_{22}}.$$

Зробивши підстановку (29) до рівняння (28) та здійснивши відповідні перетворення, отримаємо таке рівняння:

$$\Delta \ddot{\phi}_1 = a'_{21} \Delta \ddot{\phi}_1 + a'_{22} \Delta \ddot{\phi}_1 + a'_{23} \Delta \ddot{u} + a'_{24} \Delta \dot{u} + b'_{21} \Delta \dot{f}_1 + b'_{22} \Delta f_1 + b'_{23} \Delta u_1, \quad (31)$$

$$\text{де } a'_{21} = -\frac{a_{32}}{a_{31}}; \quad a'_{22} = \frac{b_{21} b_{31}}{a_{21}}; \quad a'_{23} = \frac{a_{22}}{a_{21}}; \quad a'_{24} = \frac{a_{32} a_{22}}{a_{31} a_{21}}; \quad b'_{21} = -\frac{b_{22}}{a_{21}}; \quad b'_{22} = -\frac{a_{32} b_{22}}{a_{31} a_{21}}; \quad b'_{23} = \frac{b_{21} b_{32}}{a_{21}}.$$

За допомогою отриманих рівнянь (30) та (31) сформуємо передавальні функції

$$W_{11}(s) = \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta \Phi_1(s)} = \frac{a'_{12} s^2}{s^2 - a'_{11}}; \quad W_{12}(s) = \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta F_1(s)} = \frac{b'_{11}}{s^2 - a'_{11}};$$

$$W_{13}(s) = \frac{\Delta \Phi_1(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{b'_{23}}{s^3 - a'_{21} s^2 - a'_{22} s};$$

$$W_{14}(s) = \frac{\Delta \Phi_1(s)}{\Delta Y_1(s)} = \frac{a'_{22} s^3 + a'_{21} s^2}{s^3 - a'_{21} s^2 - a'_{22} s}; \quad W_{15}(s) = \frac{\Delta \Phi_1(s)}{\Delta F_1(s)} = \frac{b'_{21} s + b'_{22}}{s^3 - a'_{21} s^2 - a'_{22} s}.$$

Зображення кута повороту  $\Delta \Phi_1(s)$  буде визначатися таким операторним рівнянням:

$$\Delta \Phi_1(s) = W_{13}(s) \Delta U_1(s) + W_{14}(s) \Delta Y_1(s) + W_{15}(s) \Delta F_1(s).$$

А зображення кута тангажа описується наступним чином у термінах передавальної функції:

$$\Delta Y_1(s) = W_{11}(s) \Delta \Phi_1(s) + W_{12}(s) \Delta F_1(s).$$

Після аналогічних перетворень з рівняннями руху ДЕБЗ за допомогою другого електродвигуна отримаємо п'ять передавальних функцій:

$$W_{21}(s) = \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta \Phi_2(s)} = \frac{a''_{12} s^2}{s^2 - a''_{11}}; \quad W_{22}(s) = \frac{\Delta Y_2(s)}{\Delta F_2(s)} = \frac{b''_{11}}{s^2 - a''_{11}};$$

$$W_{23}(s) = \frac{\Delta \Phi_2(s)}{\Delta U_2(s)} = \frac{b''_{23}}{s^3 - a''_{21} s^2 - a''_{22} s};$$

$$W_{24}(s) = \frac{\Delta \Phi_2(s)}{\Delta Y_2(s)} = \frac{a''_{22} s^3 + a''_{21} s^2}{s^3 - a''_{21} s^2 - a''_{22} s}; \quad W_{25}(s) = \frac{\Delta \Phi_2(s)}{\Delta F_2(s)} = \frac{b''_{21} s + b''_{22}}{s^3 - a''_{21} s^2 - a''_{22} s}.$$

За допомогою цих передавальних функцій зображення вихідних змінних описується наступними операторними рівняннями:

$$\Delta Y_2(s) = W_{21}(s)\Delta\Phi_2(s) + W_{22}(s)\Delta F_2(s);$$

$$\Delta\Phi_2(s) = W_{23}(s)\Delta U_2(s) + W_{24}(s)\Delta Y_2(s) + W_{25}(s)\Delta F_2(s).$$

Отримані передавальні функції дозволяють сформувати графічну модель перетворювальних процесів у ДЕБЗ у формі структурної схеми (рис. 5).

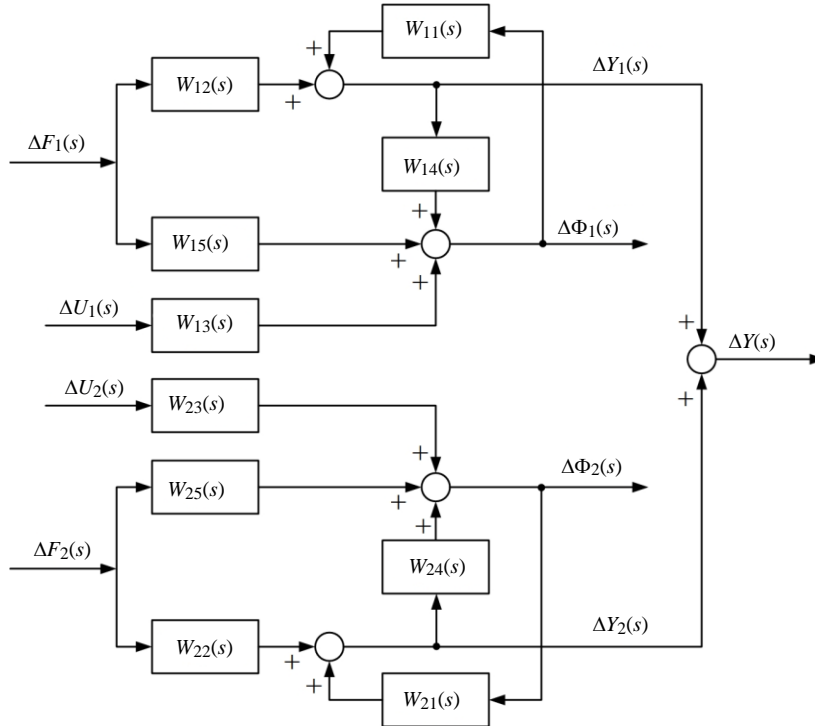


Рис. 5

Структурна схема дозволяє сформувати передавальні функції, що відображають функціональні зв'язки керуючих та збурювальних впливів, на доступні вимірюванню вихідні сигнали. Так, передавальна функція, що відображає зв'язок  $\Delta\Phi_1(s)$  з  $\Delta U_1(s)$ , визначатиметься наступним виразом:

$$W_{U1}(s) = \frac{\Delta\Phi_1(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{W_{13}(s)}{1 - W_{14}(s)W_{11}(s)}. \quad (32)$$

Після підстановки виразів передавальних функцій та відповідних перетворень отримаємо

$$W_{U1}(s) = \frac{\Delta\Phi_1(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{b_{33}(s^2 - a'_{11})}{s^5 - a'_{21}s^4 - (a'_{22} + a'_{11} + a'_{32})s^3 + (a'_{21}a'_{11} - a'_{21})s^2 + a'_{22}a'_{11}s}.$$

Вплив керуючого діяння на кут відхилення корпусу ДЕБЗ описується передавальною функцією виду

$$W_{Y1}(s) = \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U_1(s)} = W_{11}(s)W_{u1}(s)$$

або у розгорнутій формі:

$$W_{Y1}(s) = \frac{\Delta Y_1(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{a'_{12}b_{33}s^2}{s^5 - a'_{21}s^4 - (a'_{22} + a'_{11} + a'_{33})s^3 + (a'_{21}a'_{11} - a'_{21})s^2 + a'_{31}a'_{11}s}. \quad (33)$$

Вплив збурного діяння на кутове положення колеса в операторній формі буде описуватися наступним виразом:

$$W_{F1}(s) = \frac{\Delta\Phi_1(s)}{\Delta F_1(s)} = \frac{W_{12}(s)W_{14}(s) + W_{15}(s)}{1 - W_{14}(s)W_{11}(s)}.$$

Після підстановки виразів передавальних функцій та відповідних перетворень отримаємо, що

$$W_{F1}(s) = \frac{\Delta\Phi_1(s)}{\Delta F_1(s)} = \frac{b'_{11}a'_{21}s^3 + b'_{11}a'_{21}s^2 + b'_{21}s + b'_{22}}{s^5 - a'_{21}s^4 - (a'_{22} + a'_{11} + a'_{33})s^3 + (a'_{21}a'_{11} - a'_{21})s^2 + a'_{33}a'_{21}s}. \quad (34)$$

Подібні математичні моделі у формі передавальних функцій можна сформувати за допомогою еквівалентних перетворень структурної схеми (див. рис. 5). Таких передавальних функцій виходить 16, і вони дозволяють оцінити як необхідні умови працездатності (стійкість), так і достатні умови (якість функціонування ДЕБЗ).

### Математичні моделі у часовій області

Метод простору станів дозволяє описати процеси руху ДЕБЗ у часовій області у векторно-матричній формі [10]. Структура векторно-матричних рівнянь залежить від вибору базису на формування змінних станів. Покажемо на прикладах ряд форм опису у часовій області.

Представимо передавальну функцію  $W_{U1}(s)$  (32) як додаток передавальних функцій

$$W_{U1}(s) = W'_{U1}(s)W''_{U1}(s),$$

впровадивши нове зображення  $\Delta Z(s)$ . Тоді

$$W'_{U1}(s) = \frac{\Delta Z(s)}{\Delta U_1(s)}, \text{ а } W''_{U1}(s) = \frac{\Delta\Phi_1(s)}{\Delta Z(s)}.$$

У розгорнутій формі

$$W'_{U1}(s) = \frac{\Delta Z(s)}{\Delta U_1(s)} = \frac{1}{s^5 - a'_{21}s^4 - (a'_{22} + a'_{11} + a'_{33})s^3 + (a'_{21}a'_{11} - a'_{21})s^2 + a'_{33}a'_{21}s};$$

$$W''_{U1}(s) = \frac{\Delta\Phi_1(s)}{\Delta Z(s)} = b_{33}(s^2 - a'_{11}).$$

Якщо перейти до диференціальних рівнянь та ввести п'ять змінних станів

$$\Delta z(t) = x_1(t), \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_3(t) = x_4(t), \quad \dot{x}_4(t) = x_5(t),$$

то вплив  $\Delta u_1(t)$  на змінну  $\Delta\phi_1(t)$  можна буде подати у наступній векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u_1(t);$$

$$\Delta\varphi_1(t) = [c_{11} \quad 0 \quad c_{13} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \varphi_{10}.$$

Виконавши аналогічні перетворення з передавальною функцією  $W_{Y1}(s)$  (33), отримаємо опис у п'ятивимірному просторі станів:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u_1(t);$$

$$\Delta v_1(t) = [0 \quad 0 \quad c_{23} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}.$$

Об'єднавши ці два описи, отримаємо опис у просторі станів, що відображає вплив керуючого діяння  $\Delta u_1(t)$  на змінні  $\Delta\varphi_1(t)$  та  $\Delta v_1(t)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \dot{x}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u_1(t);$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\varphi_1(t) \\ \Delta v_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{10} \\ 0 \end{bmatrix},$$

де  $a_{52} = -a'_{21}a'_{11}$ ;  $a_{53} = -(a'_{21}a'_{11} - a'_{21})$ ;  $a_{54} = a'_{22} + a'_{11} + a'_{33}$ ;  $a_{55} = a'_{21}$ ;  $c_{11} = -b_{33}a'_{11}$ ;  $c_{13} = b_{33}$ ;  $c_{23} = a'_{12}b_{33}$ .

Отриманий опис у просторі станів представимо графічною моделлю у формі структурної схеми (рис. 6).

Вплив збурювального діяння  $\Delta f_1(t)$  на кутове положення колеса  $\Delta\varphi_1(t)$  відповідно до виразу (34) відобразимо в наступній структурній схемі (рис. 7).

У поданій структурній схемі  $c_{31} = b'_{22}$ ;  $c_{32} = b'_{21}$ ;  $c_{33} = b'_{11}$ ;  $c_{34} = b'_{11}a'_{21}$ .

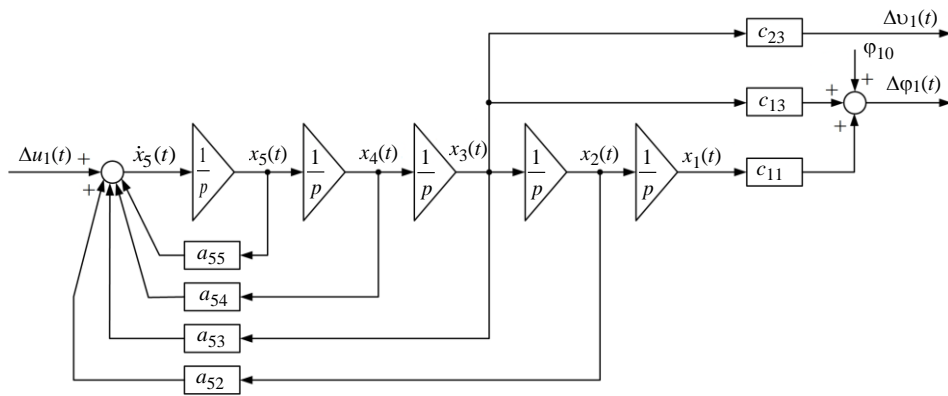


Рис. 6

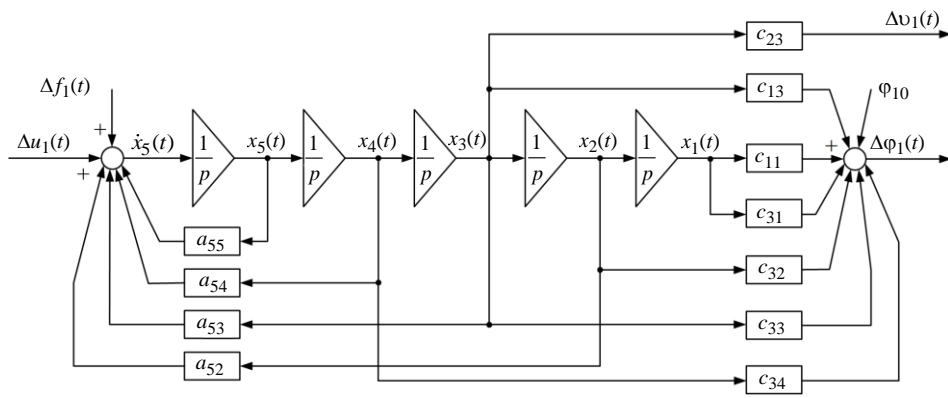


Рис. 7

Аналогічним чином можна сформувати математичні моделі у просторі станів для інших вхідних і вихідних змінних та у термінах інших базисів змінних станів, що дозволяють сформувати бажану структуру матриць векторно-матричного опису руху ДЕБЗ.

Математичні моделі у просторі станів дозволяють провести оцінювання функціональних властивостей ДЕБЗ: стійкості, керованості та спостережуваності, ідентифікованості, діагностованості та інших властивостей, що необхідні для синтезу системи автономного управління рухом на площині.

При адаптивному підході до управління ДЕБЗ в умовах низки дестабілізуючих впливів математичні моделі у просторі станів дозволяють більш повно відобразити умови функціонування та синтезувати продуктивні алгоритми раціонального управління [11].

### Висновок

У результаті досліджень поступального та кутових рухів ДЕБЗ на площині вдалося сформувати динамічні моделі механічних та електромеханічних процесів. Ці моделі дозволили за допомогою лагранжового підходу розробити нелінійну математичну модель у формі семи нелінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами, що описують процеси руху «у великому». Для дослідження процесів руху «у малому» за допомогою методу аналітичної лінеаризації отримано математичну модель лінійного наближення у формі диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. На базі цих рівнянь сформовано математичні моделі локальних рухів у частотній області у формі десяти передавальних функцій та сформовано структурну схему перетворювальних процесів у ДЕБЗ. Із викорис-

танням структурної схеми показано можливість побудови математичних моделей у просторі станів як у векторно-матричній формі, так і у графічній — у вигляді структурних схем.

Отримані моделі плоского руху двокілісного експериментального зразка відкривають можливість проведення подальших досліджень щодо формування алгоритмів автономного управління як у частотній, так і у часовій областях за допомогою класичних та сучасних адаптивних методів синтезу, а також проведення експериментальних досліджень щодо організації виконання складних рухів на площині.

*A. Kulik, K. Dergachov, S. Pasichnik*

## THE MODELS OF A HOLDING-BALANCE TWO-WHEELED EXPERIMENTAL SAMPLE PLANAR MOTION

### **Anatoliy Kulik**

National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute»,  
*anatoly.kulik@gmail.com*

### **Konstantin Dergachov**

National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute»,  
*k.dergachov@khai.edu*

### **Sergey Pasichnik**

National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute»,  
*s.pasichnyk@khai.edu*

The subject is the process of holding-balance two-wheeled experimental sample (HTES) planar motion models formation. The goal is to develop an approach to the formation of flat motion models of the HTES as an automatic controlled object. The problems: to form a physical model of a holding-balance two-wheeled experimental sample; to develop a nonlinear mathematical description of the forward and angular HTES motion on the plane using the Lagrangian formalism; to make a description of the controlled object in the frequency domain using Laplace transforms; to obtain a linearized mathematical description of the automatic controlled object in the state space; to form graphic models of the HTES as a control object using structural diagrams in the time and frequency domains; to form the conditions for using mathematical descriptions as mathematical models of the automatic control object. The methods applied are: Lagrange method, analytical linearization, state space, Laplace transformation. The following results were obtained: dynamic models of mechanical and electromechanical processes of forward and angular HTES movements on a plane were formed. Using the Lagrangian approach, a nonlinear mathematical model of the holding-balance two-wheeled experimental sample movement was developed. Using the method of analytical linearization, a mathematical model of linear approximation in the form of differential equations with constant coefficients was obtained. The mathematical models of local movements in the frequency domain in the form of transfer functions have been formed. A structural diagram of the transformation processes in holding-balance two-wheeled experimental sample has been created. The possibility of constructing mathematical models in the space of states in both vector-matrix form and structural diagrams form for solving specific problems of analysis and synthesis is shown. Conclusions. The scientific novelty



consists in the formation of an approach to obtaining models of translational and angular movements of holding-balance two-wheeled experimental sample on a plane, which differs from the known ones in the completeness of accounting for acting forces and moments.

**Keywords:** holding-balance two-wheeled experimental sample (HTES), electric engine, automatic controlled object, mathematical models, transfer function, state space.

## References

1. Разоренов Г.Н. Системы управления летательными аппаратами. М. : Машиностроение, 2003. 384 с.
2. Снешко Ю.И. Исследование в полете устойчивости и управляемости самолета. М. : Машиностроение, 1971. 328 с.
3. Проектирование систем управления объектов ракетно-космической техники : учебник в 3 т. / Ю.С. Алексеев, Ю.Е. Балабей, Т.А. Барышникова и др.; под ред. Ю.С. Алексеева, Ю.М. Златкина, В.С. Кривцова, А.С. Кулика, В.И. Чумаченко. Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», НПП Хартрон-Аркос, 2012. 1730 с.
4. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. М. : Физматлит, 2014. 232 с.
5. Полилов Е.В., Солдатенко Н.А., Щелоков А.Г. Математическое описание нелинейной динамической системы «Тележка — обратный маятник». [https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/73/53/opis\\_dinam\\_sist\\_2007.pdf](https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/73/53/opis_dinam_sist_2007.pdf). (Дата обращения: 20.10.2022.)
6. Стабилизация обратного маятника на двухколесном транспортном средстве. В.И. Рязских, М.Е. Семенов, А.Г. Рукавицын и др. *Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика*. 2017. № 3, т. 9. С. 41–50. <http://dx.doi.org/10.14529/mmph170306>.
7. Нефедов Г.А. Стабилизация движения двухколесного робота с дифференциальным приводом по заданному пути. <http://technomag.bmstu.ru/doc/547786.html>. (Data: 04.04.2013.)
8. Разработка системы стабилизации угла отклонения балансирующего робота. Д.С. Федоров, А.Ю. Ивойлов, В.А. Жмудь и др. *Автоматика и программная инженерия*. 2015. № 2 (12). С. 16–34. <http://doi.org/10.21515/1990-4665-121-011>.
9. Ямпольский А.А. Курс теоретической механики. Часть II. Динамика. М. : Высшая школа, 1966. 206 с.
10. Дорф Р., Бишоп Б. Современные системы управления. М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
11. Кулик А.С. Рациональное управление работоспособностью автономных летательных аппаратов. Часть 1. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2017. № 3. С. 25–39. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i5.10>.

Отримано 27.10.2022