УДК 519.872

М.Ю. Кузнєцов, І.М. Кузнєцов, А.А. Шумська

ЗНАХОДЖЕННЯ СТОХАСТИЧНОГО ГРАДІЄНТА ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕФЕКТИВНОСТІ СИСТЕМ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ДЕРЕВАМИ ВІДМОВ З ЕФЕКТИВНІСТЮ

Кузнєцов Микола Юрійович

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

kuznetsov2016@icloud.com

Кузнєцов Ігор Миколайович

Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

sea_hawk@icloud.com

Шумська Алла Антонівна

Навчально-науковий фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ,

shumska-aa@ukr.net

Розглянуто систему, структура та функціонування якої описуються деревом відмов з ефективністю, моделлю, що дозволяє у формалізованому вигляді описувати процес зміни ефективності функціонування системи та її підсистем під впливом відмов та закінчення відновлень елементів. Тривалості безвідмовної роботи та відновлення елементів мають функції розподілу загального виду. Досліджується середня ефективність роботи системи протягом фіксованого проміжку часу. Запропоновано загальний метод побудови стохастичного градієнта деякого функціоналу від траєкторій марковського процесу, що описує поведінку системи, за нормуючими параметрами деяких випадкових величин. Доведено незміщеність оцінок. Цей метод застосовано до знаходження стохастичного градієнта середньої ефективності роботи системи за нормуючими параметрами тривалості безвідмовної роботи елементів. Наведено відповідний алгоритм. На числовому прикладі показано застосування запропонованого методу до пошуку математично обґрунтованих вимог до надійності елементів для забезпечення потрібної середньої ефективності роботи системи у заданому проміжку часу.

Ключові слова: дерево відмов з ефективністю, стохастичний градієнт, незміщена оцінка, метод Монте–Карло, марковський процес.

Вступ

Історія успішного використання дерев відмов як моделей ієрархічно побудованих систем налічує понад 60 років [1–5]. Модель дерева відмов створювалась для опису систем, елементи (листя дерева) та підсистеми (вершини) яких можуть перебувати лише у двох станах: робочому та відмови. Однак у деяких випадках подібної формалізації замало для адекватного опису функціонування реальної системи. Зокрема це стосується систем, у яких відмова окремого обладнання не завжди викликає відмову всієї системи, а лише зменшує ефективність функціонування. До таких систем відносяться, зокрема, космічні апарати, розраховані на певний період експлуатації, мережі магістральних нафто- та газопроводів, електричні мережі тощо.

Логічним узагальненням дерева відмов у класичному сенсі є дерево відмов з ефективністю. Можливі різні варіанти визначення такого дерева, але за основу візьмемо модель, запропоновану в [6] для опису функціонування космічного апарата. Перш, ніж перейти до її опису, зазначимо кілька принципово важливих положень, якими має керуватися інженер-дослідник.

На початковому етапі аналізу надійності системи мають структурно-функціональну схему на рівні блоків (елементів) із зазначенням виду і кратності резервування. Окрім того, визначаються функціональні зв'язки між елементами, тобто оцінюється вплив відмов одних елементів на працездатність інших. Ця інформація має бути ретельно проаналізована, внаслідок чого будується надійнісна схема, яка і лежить в основі подальшого аналізу та обчислення характеристик надійності. Однак перехід від структурно-функціональної до надійнісної схеми не може бути строго формалізованим. Значну роль відіграє досвід дослідника та чітке уявлення про наслідки відмови того чи іншого елемента. Однак суттєву допомогу при цьому надає апарат дерев відмов, зокрема дерев відмов з ефективністю.

Дерево відмов з ефективністю

Дерево відмов з ефективністю — це модель, що дозволяє у формалізованому вигляді описувати процес зміни ефективності функціонування системи та її підсистем під впливом відмов та закінчення відновлень елементів. Дерево будується з вершин та «листя». Листя — це елементи системи з відомими характеристиками надійності (дрібніший поділ елементів на частини не допускається). Вершинами дерева зображуються підсистеми. Ефективність елемента може приймати лише два значення: 1 (у робочому стані) та 0 (у стані відмови). Кожній вершині підпорядковується декілька вхідних вершин, якими можуть бути як елементи, так і інші вершини (підсистеми). Існує лише одна вершина, яка не підпорядковується жодній іншій вершині (корінь дерева). Стан цієї вершини і описує стан системи в цілому. Кожній вершині g ставиться у відповідність число $e_g \in [0,1]$, яке є функцією від поточних ефективностей вхідних вершин. Вершини можуть бути одного з трьох типів: «*і*», «*або*», «m з n». Ефективність e_g вершини g обчислюється за рекурентною формулою

$$e_g = \psi^{(k)}(e_1, \dots, e_n),$$

де індекс k визначає тип вершини, n — кількість вхідних вершин з ефективностями $e_1, \dots, e_n$, причому $e_i \in [0,1]$. Для вказаних трьох типів вершин функція $\psi^{(k)}(e_1, \dots, e_n)$ має таку інтерпретацію.

1. Вершина типу «*i*» (паралельне з'єднання вхідних вершин):

$$e_g = \sum_{i=1}^{n} c_g^{(i)} e_i, \qquad (1)$$

де $\{c_g^{(i)}\}$ — вагові коефіцієнти, які визначають значимість вхідних вершин, тобто зменшення ефективності вершини g пропорційне $c_g^{(i)}$, якщо i-та вхідна вершина змінює свою ефективність. Можливі два випадки: а) $\sum_{i=1}^{n} c_g^{(i)} = 1$ і $c_g^{(i)} > 0$ (якщо ефективність роботи кожної вхідної вершини дорівнює одиниці, то такою ж є ефективність роботи вершини g); б) $c_g^{(i)} = 0, i = 1, \ldots, n$: у цьому випадку $e_g = 1$, якщо $e_i = 1$ для деякого i, та $e_g = 0$, якщо $e_i = 0, i = 1, \ldots, n$ (це випадок «класичного» паралельного з'єднання елементів, коли відмови окремих елементів не призводять до падіння ефективності вершини g до тих пір, поки не відмовлять усі елементи).

2. Вершина типу «*або*» (послідовне з'єднання вхідних вершин):

$$e_g = \prod_{i=1}^{n} [1 - c_g^{(i)} + c_g^{(i)} e_i], \qquad (2)$$

де $\{c_g^{(i)}\}$ — відповідні вагові коефіцієнти, які приймають значення з $(0, 1]$. Якщо $c_g^{(i)} = 1$, то повна відмова i-ї вхідної вершини $(e_i = 0)$ призводить до повної відмови усього послідовного з'єднання вершин $(e_g = 0)$ незалежно від стану інших вхідних вершин. Якщо ж $0 < c_g^{(i)} < 1$, то повна відмова i-ї вхідної вершини може лише зменшити ефективність e_g.

3. Вершина типу «m з n» (у «класичному» означенні відмова вершини відбувається при відмові щонайменше m з n вхідних вершин). Ефективність e_g вершини обчислюється за формулою

$$e_g = 1 - rc_g, \qquad (3)$$

де c_g — ваговий коефіцієнт (один і той же для всіх n вхідних вершин), який приймає значення з $\left[0, \frac{1}{m}\right]$, а r — кількість вершин, що відмовили. Припускаємо, що ефективність кожної вхідної вершини може приймати лише два значення: 0 або 1. Якщо ефективність щонайменше m вхідних вершин дорівнює нулю, то $e_g = 0$.

Структурна модель системи є повністю визначеною, якщо для кожної вершини дерева вказати її тип, перелік усіх вхідних вершин та відповідні вагові коефіцієнти. Рекурентні формули (1)–(3) дозволяють визначити поточну ефективність системи за станом її елементів.

Для повного визначення системи необхідно задати характеристики надійності її елементів. Система складається з m статистично незалежних та відновлюваних елементів. Нехай V — множина допустимих типів, відображення $v(\cdot) : \{1, \ldots, m\} \to V$ визначає тип елемента. Тривалість безвідмовної роботи i-го елемента ти-

 ISSN 2786-6491

пу $\nu(i)$ має функцію розподілу (ФР) $F_{\nu(i)}(c_{\nu(i)}\, x)$, де $c_{\nu(i)}$ — деякий нормуючий параметр. Відмови миттєво встановлюються, відновлення починається в момент відмови. Тривалість відновлення елемента i типу $\nu(i)$ визначається ФР $G_{\nu(i)}(x)$.

Система функціонує протягом часу T. Позначимо $e(t)$ поточну ефективність системи в момент t, яка визначається станом елементів системи та відповідним деревом відмов. Досліджується середня ефективність протягом періоду $[0, T]$:

$$E = \frac{1}{T}\mathbf{M}\int_0^T e(t)\,dt.$$

Метою дослідження є знаходження значень параметрів $\overline{c} = \{c_j,\, j \in V\}$, які гарантують середню ефективність не нижче заданого рівня E_0. Середня ефективність E є функцією від вектора параметрів $\overline{c}$, тобто $E = E(\overline{c})$. Очевидно, що розв'язки рівняння $E(\overline{c}) = E_0$ утворюють гіперплощину, тобто сформульована задача має континуальну множину розв'язків. Тим не менш вона має сенс, оскільки запропонований нижче метод дозволяє генерувати вектори $\overline{c}$, для яких $E(\overline{c}) \ge E_0$; найкращий варіант обирається за допомогою додаткового критерію, наприклад з отриманих розв'язків обирається той, що мінімізує деяку функцію $H(\overline{c})$.

Основне співвідношення

Пошук вектора $\overline{c}$, для якого $E(\overline{c}) \ge E_0$, відбувається за рахунок обчислення стохастичного градієнта $\nabla\hat{E}(\overline{c}) = \left(\dfrac{\partial \hat{E}(\overline{c})}{\partial c_j},\, j \in V\right)$, де $\hat{E}(\overline{c}) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e(t)\,dt$. Для цього скористаємось наступним прийомом [7].

Нехай невід'ємна випадкова величина (ВВ) ξ має ФР $F(x)$. Тоді для будь-якого $c > 0$ ВВ $\xi_c = \xi / c$ має ФР $F(cx)$. Припустимо, що виконується співвідношення

$$\xi_{c+\varepsilon} = \min(\xi_c, \delta_{c,\varepsilon}), \tag{4}$$

де $\varepsilon > 0$ — деякий малий параметр, а ξ_c та $\delta_{c,\varepsilon}$ — незалежні ВВ, причому

$$D_{c,\varepsilon}(x) = \mathbf{P}\{\delta_{c,\varepsilon} < x\} = 1 - \frac{1 - F((c+\varepsilon)\,x)}{1 - F(c\,x)},\ x \ge 0, \tag{5}$$

є ФР для будь-яких значень $c > 0$ та $\varepsilon > 0$ (розподіл $D_{c,\varepsilon}(x)$ необов'язково є власним, тобто не виключається випадок, коли $D_{c,\varepsilon}(+\infty) < 1$). При цьому для будь-яких скінченних $c > 0$ та $z > 0$ існує $d(c, z)$, таке, що

$$D_{c,\varepsilon}(z) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} d(c, z)\,\varepsilon. \tag{6}$$

Легко перевірити, що співвідношенням (4)–(6) задовольняють [7], зокрема, розподіл Вейбулла, розподіл Парето, гамма-розподіл та низка інших.

Альтернативні підходи до обчислення градієнтів за тими чи іншими параметрами див. у [7–19].

Загальний принцип побудови стохастичної похідної

Позначимо $\zeta(t), t \geq 0,$ неперервний справа марковський процес, який описує поведінку системи. Досліджується характеристика системи $R,$ яка є середнім значенням деякого функціонала $\Phi(\cdot)$ від траєкторії процесу $\zeta(t), t \in [0, T],$ у проміжку $[0, T]$: $R = \mathbf{M}\Phi(\zeta(t), t \in [0, T]).$ Моделюючи траєкторії процесу, будуємо оцінку для R методом Монте–Карло. В процесі моделювання використовуються ВВ, тип яких належить множині $V.$ Нехай $w \in V$ — фіксований тип, а ВВ цього типу мають вигляд $\xi_c = \xi / c,$ де $c > 0$ — деяка константа. Відповідну ФР позначимо $F(c x).$ Припустимо, що виконані співвідношення (4)–(6). Залежність характеристики системи від c будемо вказувати в явному вигляді: $\zeta(t) = \zeta_c(t),$ $R = R(c).$ Метою даного розділу є алгоритм побудови стохастичної похідної за параметром $c,$ тобто алгоритм моделювання ВВ $\theta(c),$ такої, що $R'(c) = \mathbf{M}\theta(c).$

Припустимо, що кожній траєкторії процесу $\zeta_c(t), t \in [0, T],$ однозначно відповідає випадкова послідовність

$$\Psi_c = (\nu; \tau_1, \xi_c^{(1)}, \ldots, \tau_\nu, \xi_c^{(\nu)}), \tag{7}$$

де ν — кількість моментів часу $\{\tau_j\}$ в $[0, T],$ коли моделювались значення ВВ $\xi_c,$ $\{\xi_c^{(j)}\}$ — незалежні однаково розподілені ВВ з ФР $F(cx).$ Має місце наступне твердження.

Теорема. *Якщо виконано умови (4)–(6), то* $\theta(c) = \varphi(c) - \beta(c).$ *Алгоритм моделювання ВВ* $\beta(c)$ *та* $\varphi(c)$ *формулюється наступним чином.*

1. У проміжку $[0, T]$ при фіксованому значенні c будуємо вибіркову траєкторію $z_c(t), t \in [0, T],$ процесу та відповідну випадкову послідовність (7):

$$\Psi_c = (n; t_1, a_1, \ldots, t_n, a_n).$$

2. Якщо $n = 0,$ то алгоритм завершено: $\beta(c) = 0$ та $\varphi(c) = 0.$

3. Припустимо, що $n \geq 1.$ Обчислюємо

$$\beta(c) = \Phi(z_c(t), t \in [0, T]) D(c, \bar{a}), \tag{8}$$

де $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n),$

$$D(c, \bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} d(c, a_j), \tag{9}$$

а $\{d(c, a_j)\}$ визначаються згідно з (6).

4. Будуємо реалізацію ВВ $\rho,$ яка приймає значення $k \in \{1, \ldots, n\}$ з імовірністю $d(c, a_k) / D(c, \bar{a}).$ Нехай $\rho = k.$

5. Будуємо нову вибіркову траєкторію $z_c^*(t), t \in [0, T]$ згідно з правилом:

а) $z_c^*(t) = z(t), 0 \leq t < t_k;$

б) будуємо реалізацію ВВ $\delta_c(a_k)$ з ФР $d(c, x) / d(c, a_k), x \in [0, a_k]$ (це є ФР, оскільки $d(c, x)$ — монотонно неспадна функція);

в) будуємо нову траєкторію $z_c^*(t), t_k \le t \le T,$ з урахуванням того, що в момент t_k значення a_k замінюється на $\delta_c(a_k)$.

Обчислюємо

$$\varphi(c) = \Phi(z_c^*(t), t \in [0, T]) D(c, \bar{a}). \tag{10}$$

Доведення. Враховуючи рівність (4), яка має місце для ВВ типу w, отримуємо наступні співвідношення ($I(\cdot)$ — індикатор відповідної події):

$$R(c+\varepsilon) = \mathbf{M}\Phi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]) = \mathbf{M}\{\Phi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]) I(\nu = 0)\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\{\Phi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]) I(\nu = n)\} = \mathbf{M}\{\Phi(\zeta_c(t), t \in [0, T]) I(\nu = 0)\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Phi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]) I\left(\{\nu = n\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{\xi_{c+\varepsilon}^{(j)} = \xi_c^{(j)}\}\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Phi(\zeta_{c+\varepsilon}(t), t \in [0, T]) I\left(\{\nu = n\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < \xi_c^{(j)}\}\right)\right\},$$

де $\{\xi_{c+\varepsilon}^{(j)}\}$ та $\{\xi_c^{(j)}\}$ — послідовності незалежних ВВ, які мають ті ж розподіли, що і $\xi_{c+\varepsilon}$, ξ_c відповідно, та задовольняють співвідношенням (4). Позначивши $A_\varepsilon(c)$ третій доданок у правій частині останнього співвідношення, маємо:

$$R(c+\varepsilon) = \mathbf{M}\{\Phi(\zeta_c(t), t \in [0, T]) I(\nu = 0)\} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Phi(\zeta_c(t), t \in [0, T]) I\left(\{\nu = n\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{\xi_{c+\varepsilon}^{(j)} = \xi_c^{(j)}\}\right)\right\} + A_\varepsilon(c) =$$

$$= \mathbf{M}\{\Phi(\zeta_c(t), t \in [0, T]) I(\nu = 0)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\{\Phi(\zeta_c(t), t \in [0, T]) I(\nu = n)\} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\left\{\Phi(\zeta_c(t), t \in [0, T]) I\left(\{\nu = n\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < \xi_c^{(j)}\}\right)\right\} + A_\varepsilon(c).$$

Якщо позначити $B_\varepsilon(c)$ третій доданок у правій частині останньої рівності, то матимемо:

$$R(c+\varepsilon) = R(c) - B_\varepsilon(c) + A_\varepsilon(c). \tag{11}$$

Для обчислення $B_\varepsilon(c)$ та $A_\varepsilon(c)$ застосовуємо метод Монте–Карло. При фіксованому значенні параметра c моделюємо вибіркову траєкторію $z_c(t), t \in [0, T]$, процесу та будуємо відповідну випадкову послідовність (7):

$$\Psi_c = (n; t_1, a_1, \ldots, t_n, a_n).$$

Якщо $n = 0$, то оцінками для $B_\varepsilon(c)$ та $A_\varepsilon(c)$ в цій реалізації алгоритму є $\beta(c) = 0$ та $\varphi(c) = 0$. Припустимо, що $n \ge 1$. Тоді

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{n}\{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < a_j\}\right\} = \varepsilon\sum_{j=1}^{n} d(c, a_j) + o(\varepsilon) = \varepsilon D(c, \bar{a}) + o(\varepsilon),$$

тобто $B_\varepsilon(c) = \varepsilon B(c) + o(\varepsilon)$, де $B(c) = \mathbf{M}\beta(c)$; незміщена оцінка $\beta(c)$ для $B(c)$ будується за формулами (8), (9).

Аналогічно $A_\varepsilon(c) = \varepsilon A(c) + o(\varepsilon)$, де $A(c) = \mathbf{M}\varphi(c)$. При побудові оцінки $\varphi(c)$ використовуємо ту саму вибіркову траєкторію $z_c(t), t \in [0, T]$, процесу та ту саму випадкову послідовність Ψ_c. Відмінність полягає у тому, що додатково з'ясовуємо, яка з n малоймовірних подій $\{\delta_{c,\varepsilon}^{(j)} < a_j\}$ відбулась. Для цього будуємо реалізацію ВВ ρ, яка приймає значення $k \in \{1, \ldots, n\}$ з імовірністю $d(c, a_k) / D(c, \bar{a})$. Якщо $\rho = k$, то a_k замінюємо на реалізацію ВВ $\delta_c(a_k)$ з ФР $d(c, x) / d(c, a_k)$, $x \in [0, a_k]$ (це є асимптотичним розподілом ВВ $\delta_{c,\varepsilon}^{(k)}$ за умови, що $\delta_{c,\varepsilon}^{(k)} < a_k$), і далі, починаючи з моменту t_k, будуємо нову частину траєкторії $z_c^*(t)$, $t_k \le t \le T$. При цьому оцінка $\varphi(c)$ знаходиться за формулою (10). Твердження теореми випливає із співвідношення (11) та алгоритмів моделювання ВВ $\beta(c)$ і $\varphi(c)$.

Теорему доведено.

Дерево відмов з ефективністю: побудова марковського процесу та асоційованої з ним випадкової послідовності

Реалізуємо наведений у попередньому розділі алгоритм побудови стохастичної похідної для моделі дерева відмов з ефективністю. Введемо неперервний справа марковський процес, що визначає поведінку системи при фіксованому векторі нормуючих параметрів $\bar{c}$:

$$\zeta(t) = (\bar{\nu}(t); \bar{\gamma}(t)) = (\nu_1(t), \ldots, \nu_m(t);\ \gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)), t \ge 0,$$

де

$$\nu_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i\text{-й елемент знаходиться у робочому стані в момент } t, \\ 1, & \text{якщо } i\text{-й елемент знаходиться на відновленні в момент } t, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m;$$

$\gamma_i(t)$ — час до наступної відмови i-го елемента (якщо $\nu_i(t) = 0$) і $\gamma_i(t)$ — час до закінчення відновлення (якщо $\nu_i(t) = 1$). Початковим станом процесу є $\zeta(0) = (0, \ldots, 0; \gamma_1^{(0)}, \ldots, \gamma_m^{(0)})$, де $\gamma_i^{(0)}$ — час до відмови i-го елемента (це ВВ, яка має ФР $F_{v(i)}(c_{v(i)}\, x)$).

Дискретна змінна $\bar{\nu}(t)$ описує «якісний» стан системи, який визначає поточну ефективність $e(t)$ системи, див. рекурентні співвідношення (1)–(3).

Нехай $w \in V$ — фіксований тип елемента. Алгоритм побудови вибіркової траєкторії $z(t), t \in [0, T]$, марковського процесу $\zeta(t), t \in [0, T]$, та відповідної випадкової послідовності $\Psi = (n; t_1, a_1, \ldots, t_n, a_n)$ формулюється таким чином.

1. Покладемо $n = 0$. Для кожного $i = 1, ..., m$ моделюємо час до відмови i-го елемента; це ВВ $\gamma_i^{(0)}$, яка має ФР $F_{v(i)}(c_{v(i)}\, x)$. Якщо $v(i) = w$, то збіль-

шуємо n на одиницю (позначаємо так: $n \to n+1$) і будуємо послідовність Ψ: $t_n = 0, a_n = \gamma_i^{(0)}$. У початковий момент $u_0 = 0$ обираємо $z^{(0)} = z(u_0) = (\overline{\nu}^{(0)}; \overline{\gamma}^{(0)}) = = (0, \ldots, 0; \gamma_1^{(0)}, \ldots, \gamma_m^{(0)})$ як стан процесу.

2. Припустимо, що для деякого $r \geq 0$ побудовано момент $u_r \in [0, T)$ та стан процесу в цей момент: $z^{(r)} = z(u_r) = (\overline{\nu}^{(r)}; \overline{\gamma}^{(r)}) = (\nu_1^{(r)}, \ldots, \nu_m^{(r)}; \gamma_1^{(r)}, \ldots, \gamma_m^{(r)})$. Обчислюємо час до наступної зміни стану дискретної компоненти та номер елемента, що викликав цю зміну:

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq m} \gamma_i^{(r)}, \ \mu = \arg \min_{1 \leq i \leq m} \gamma_i^{(r)}.$$

3. Покладемо $u_{r+1} = \min(T, u_r + \alpha)$. Якщо $u_{r+1} = T$, то траєкторію процесу $z(t)$, $t \in [0, T]$, та випадкову послідовність Ψ побудовано і алгоритм завершено. Припустимо, що $u_{r+1} < T$. Тоді $\nu_j^{(r+1)} = \nu_j^{(r)}, \gamma_j^{(r+1)} = \gamma_j^{(r)} - \alpha, \ j \neq \mu$.

4. Якщо $\nu_\mu^{(r)} = 1$, то в момент u_{r+1} закінчилось відновлення елемента μ. У цьому випадку $\nu_\mu^{(r+1)} = 0$. Нехай $\gamma_\mu^{(r+1)}$ — час до наступної відмови елемента μ — це ВВ, яка має ФР $F_{\nu(\mu)}(c_{\nu(\mu)}\, x)$. Якщо $\nu(\mu) = w$, то $n \to n+1$ і покладемо $t_n = u_{r+1}, a_n = \gamma_\mu^{(r+1)}$. Далі $r \to r+1$ і повертаємось на крок 2 алгоритму.

5. Якщо ж $\nu_\mu^{(r)} = 0$, то в момент u_{r+1} відмовив елемент μ. Тоді $\nu_\mu^{(r+1)} = 1$. Оберемо $\gamma_\mu^{(r+1)}$ як час відновлення елемента μ — це ВВ, яка має ФР $G_{\nu(\mu)}(x)$. Далі $r \to r+1$ і повертаємось на крок 2 алгоритму.

Зауважимо, що в проміжках між моментами $\{u_r\}$ всі неперервні компоненти $\{\gamma_j(t)\}$ процесу лінійно зменшуються. При моделюванні вибіркової траєкторії $z(t), t \in [0, T]$, оцінюється середня ефективність роботи системи протягом періоду $[0, T]$. Якщо позначити $e(\overline{\nu}^{(k)})$ ефективність роботи системи при стані $\overline{\nu}^{(k)}$ $(k = 0, \ldots, r)$, див. рекурентні формули (1)–(3), то як оцінку середньої ефективності обираємо

$$E(z(t), t \in [0, T]) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{r} e(\overline{\nu}^{(k)})(u_{k+1} - u_k).$$

Припустимо, траєкторію процесу $z(t), t \in [0, T]$, та випадкову послідовність $\Psi = (n; t_1, a_1, \ldots, t_n, a_n)$ побудовано згідно з наведеним вище алгоритмом. Для побудови стохастичної похідної середньої ефективності системи за параметром c_w скористаємось алгоритмом побудови оцінок $\beta(c_w)$ та $\varphi(c_w)$, наведеним у теоремі вище.

1. Якщо $n = 0$, то алгоритм завершено: $\beta(c_w) = 0$ та $\varphi(c_w) = 0$.

2. Припустимо, що $n \geq 1$. Тоді

$$\beta(c_w) = E(z(t), t \in [0, T]) D(c_w, \overline{a}),$$

де $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, а $D(c_w, \overline{a})$ обчислюється за формулою (9).

3. Будуємо реалізацію ВВ ρ, яка приймає значення $k \in \{1, \ldots, n\}$ з імовірністю $d(c_w, a_k) / D(c_w, \bar{a})$. Нехай $\rho = k$.

4. Будуємо нову вибіркову траєкторію $z^*(t), t \in [0, T]$, згідно з правилом:

а) $z^*(t) = z(t),\ 0 \le t < t_k$;

б) будуємо реалізацію ВВ $\delta_{c_w}(a_k)$ з ФР $d(c_w, x) / d(c_w, a_k),\ x \in [0, a_k]$;

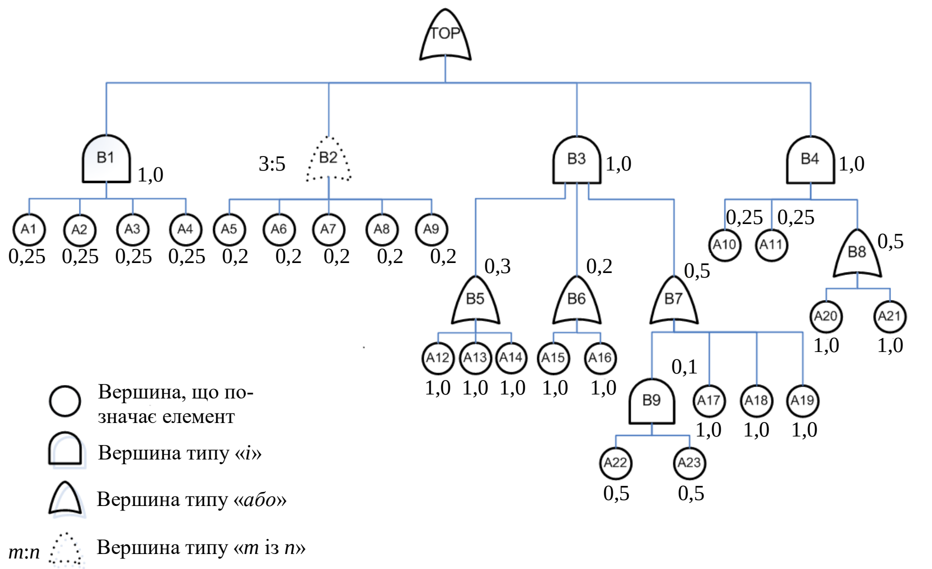
в) будуємо нову траєкторію $z^*(t), t_k \le t \le T$, з урахуванням того, що в момент t_k значення $\gamma_j(t_k) = a_k$ для деякого j замінюється на $\gamma_j(t_k) = \delta_{c_w}(a_k)$.

5. Обчислюємо $\varphi(c) = E(z^*(t), t \in [0, T])\, D(c_w, \bar{a})$.

Як стохастичну похідну за c_w обираємо $\theta(c_w) = \varphi(c_w) - \beta(c_w)$. Якщо зробити N реалізацій алгоритму і усереднити отримані оцінки, то матимемо більш точну оцінку похідної від ефективності системи за параметром c_w. Застосовуючи наведений алгоритм для побудови стохастичного градієнта, можна оцінити вплив надійності елементів різного типу на ефективність системи, що дозволяє обґрунтувати вимоги до надійності елементів для забезпечення потрібної ефективності. У наступному розділі даний підхід проілюстровано на числовому прикладі.

Числовий приклад

Як приклад розглянемо систему, якій відповідає дерево відмов, описане в [20] (рисунок). Система складається з 23 елементів, які позначені A1–A23. Дерево відмов містить дев'ять вершин B1–B9 одного з трьох типів: «*і*», «*або*» та «*m* з *n*». Біля кожної вершини/елемента вказано відповідний ваговий коефіцієнт.



Система містить елементи семи типів: A1–A4 (тип 1), A5–A9 (тип 2), A10, A11 (тип 3), A12–A14 (тип 4), A15, A16, A20, A21 (тип 5), A17–A19 (тип 6) та A22, A23 (тип 7). Час безвідмовної роботи елементів та час їх відновлення має розподіл Вейбулла:

$$F_j(c_j\, x) = 1 - \exp\{-(c_j\, x)^{\alpha_j}\},\ G_j(x) = 1 - \exp\{-(\rho_j\, x)^{\mu_j}\},\ j = 1, \ldots, 7.$$

Значення відповідних параметрів розподілу Вейбулла наведено у табл. 1.

Таблиця 1

j	c_j	α_j	ρ_j	μ_j
1	0,0001	0,5	0,01	2,0
2	0,0001	1,0	0,005	2,0
3	0,0001	1,5	0,007	2,0
4	0,0001	2,0	0,015	2,0
5	0,0001	2,5	0,01	2,0
6	0,0001	3,0	0,02	2,0
7	0,0001	3,5	10^{-10}	2,0

Значення параметрів $c_j = 0,0001$ є початковими. Мета дослідження — знаходження тих $\{c_j\}$, які забезпечують ефективність щонайменше 0,95. Значення $\rho_7 = 10^{-10}$ означає, що елементи типу 7 є невідновлюваними. Система функціонує протягом $T = 100000$ годин.

Наведені числові дані повністю визначають роботу системи з точки зору її надійності. Застосуємо сформульований алгоритм моделювання градієнта ефективності системи за параметрами $\{c_j\}$ до знаходження тих значень, які забезпечать ефективність не нижче 0,95. Саме значення градієнта є основним критерієм, що визначає вплив надійності елементів на ефективність роботи системи.

Припустимо, що при фіксованих параметрах $\{c_j\}$ бажаної ефективності ще не досягнуто. У цьому випадку для кожного $j = 1, \ldots, 7$ будуємо оцінку для похідної від середньої ефективності за параметром c_j. Для побудови кожної такої оцінки використовуємо $N = 1000$ реалізацій алгоритму. Такі усереднені оцінки позначимо $\hat{\pi}_N(c_j)$. Очевидно, що зменшення c_j має підвищувати ефективність, тобто похідна має бути від'ємною. Якщо вплив елементів *j*-го типа незначний, то це значення може виявитись і позитивним. У цьому випадку обираємо $\hat{\pi}_N(c_j) = 0$. Нові значення $\{c_j\}$ обчислюємо за формулою

$$c_j \to \frac{1}{\dfrac{1}{c_j} + \Delta_j(c_j)}, \quad j = 1, \ldots, 7,$$

де

$$\Delta_j(c_j) = \frac{\Delta\, \hat{\pi}_N(c_j)}{\sum_{i=1}^{7} \hat{\pi}_N(c_i)}, \quad j = 1, \ldots, 7.$$

Як параметр Δ оберемо $\Delta = 10000$. Пропорційно Δ та $\{\hat{\pi}_N(c_j)\}$ збільшуються $\left\{\dfrac{1}{c_j}\right\}$. Якщо $\hat{\pi}_N(c_j) = 0$, то значення c_j не змінюється.

Зауважимо, що при початковому значенні вектора $\overline{c}$ (див. табл. 1) середня ефективність доволі низька: $E(\overline{c}) = 0,51.$ Як зазначалось, рівняння $E(\overline{c}) = E_0 =$ $= 0,95$ має безліч розв'язків, які визначаються відповідною гіперплощиною. Тому потрібен додатковий критерій, який з отриманих розв'язків дозволить обрати найкращий. За критерій візьмемо функцію

$$H(\overline{c}) = \sum_{j=1}^{7} h_j \frac{1}{c_j} \Rightarrow \min_{\overline{c}}, \tag{12}$$

де $h_1 = 4, h_2 = 5, h_3 = 2, h_4 = 3, h_5 = 4, h_6 = 2, h_7 = 1.$ В табл. 2 продемонстровано результати моделювання десяти векторів $\overline{c},$ для яких $E(\overline{c}) \geq 0,95.$ Для кожного вектора $\overline{c}$ вказано оцінку $\hat{E}(\overline{c})$ середньої ефективності системи, побудовану з достовірністю 0,99 та відносною похибкою 1 %, а також відповідне значення функції $H(\overline{c}).$

Таблиця 2

№ з/п	$c_1 \cdot 10^5$	$c_2 \cdot 10^5$	$c_3 \cdot 10^5$	$c_4 \cdot 10^5$	$c_5 \cdot 10^5$	$c_6 \cdot 10^5$	$c_7 \cdot 10^5$	$E(\overline{c})$	$H(\overline{c}) \cdot 10^{-5}$
1	8,42	6,92	5,78	4,21	3,57	2,89	0,62	0,956	5,67
2	8,43	7,19	5,53	4,47	3,43	2,84	0,67	0,964	5,57
3	8,38	7,16	5,81	4,40	3,45	2,75	0,63	0,953	5,68
4	8,55	6,88	5,57	4,18	3,40	2,85	0,64	0,968	5,72
5	8,42	7,01	5,65	4,29	3,22	2,85	0,64	0,951	5,75
6	8,42	6,73	5,42	4,33	3,29	2,60	0,61	0,968	5,89
7	8,24	6,98	5,60	4,48	3,19	2,94	0,72	0,961	5,54
8	8,51	7,01	5,91	4,56	3,61	2,99	0,65	0,952	5,50
9	8,56	7,35	6,00	4,73	3,31	3,00	0,65	0,957	5,52
10	8,25	6,79	5,59	4,16	3,26	2,58	0,62	0,954	5,92

Для всіх отриманих векторів $\overline{c}$ середня ефективність буде не нижчою за 0,95. Для кожного варіанта значення параметрів $\{c_j\}$ є достатньо близькими, що свідчить про стійкість обчислень. Якщо як додатковий критерій використано функцію (12), то найменше її значення досягається на восьмому наборі вектора $\overline{c}.$

Висновок

У даній статті запропоновано загальний метод побудови стохастичного градієнта середньої ефективністю роботи системи за нормуючими параметрами тривалості безвідмовної роботи елементів системи, структура якої описується деревом відмов з ефективністю. Цей метод може використовуватися для обгрунтування вимог до надійності елементів для забезпечення бажаної середньої ефективності протягом заданого періоду часу.

 ISSN 2786-6491

EVALUATING THE STOCHASTIC GRADIENT TO OPTIMIZE THE EFFICIENCY OF SYSTEMS WHICH ARE DESCRIBED BY FAULT TREES WITH EFFICIENCY

Mykola Kuznetsov

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Educational and Research Institute of Physics and Technology of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,

kuznetsov2016@icloud.com

Igor Kuznetsov

Educational and Research Institute of Physics and Technology of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,

sea_hawk@icloud.com

Alla Shumska

Educational and Research Institute of Physics and Technology of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,

shumska-aa@ukr.net

The system is considered, the structure and functioning of which is described by a fault tree with efficiency. It is a model that makes it possible to describe in a formalized form the process of changing the efficiency of the system and its subsystems operation under the influence of components failures and repair terminations. The failure-free operation times and repair times of components have distribution functions of the general form. The studied characteristic is the mean system efficiency in a fixed time interval. A general method enabling to construct the stochastic gradient of some functional from the trajectories of the Markov process describing the behavior of the system, with respect to normalizing parameters of some random variables is proposed. The unbiasedness of the estimates is proved. This method is applied to evaluate the stochastic gradient of the average system efficiency with respect to some normalizing parameters of the failure-free operation time of the components. The corresponding algorithm is given. A numerical example demonstrates the application of this method for the determining of mathematically justified requirements to the reliability of components in order to ensure the required average efficiency of system operation in a given time interval.

Keywords: fault tree with efficiency, stochastic gradient, unbiased estimate, Monte Carlo method, Markov process.

REFERENCES

1. Barlow R.E., Lambert H.E. Introduction to fault tree analysis. Reliability and fault tree analysis. Barlow R.E., Fussell J.B. and Singpurwalla N.D. (Ed.). Philadelphia : SIAM, 1975. P. 7–35.
2. Lee W.S., Grosh D.L., Tillman, F.A., Lie C.H. Fault tree analysis, methods and applications — a review. *IEEE Transactions on Reliability*. 1985. Vol. R-34, N 3. P. 194–203.
3. Kuznetsov N.Yu. Fault trees — problems and the modern state of investigation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 4. P. 419–439.

4. Hennings W., Kuznetsov N. FAMOCUTN and CUTQN — Computer codes for fast analytical evaluation of large fault trees with replicated and negated gates. *IEEE Transactions on Reliability*. 1995. Vol. R-44, N 3. P. 368–376.
5. Schneeweiss W.G. The fault tree method (in the fields of reliability and safety technology). Berlin : Lilole-Verlag, 2000. 206 p.
6. Kuznetsov N.Yu., Mikhalevich K.V. A reliability analysis of systems described by fault trees with efficiency. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2003. Vol. 39, N 5. P. 746–752.
7. Коваленко И.Н. Расчет поправок к характеристикам СМО. Проблемы устойчивости стохастических моделей. М. : ВНИИСИ, 1986. С. 45–48.
8. Кузнецов Н.Ю. Аналитико-статистический метод построения количественных оценок непрерывности характеристик систем массового обслуживания и резервированных систем. М. : ВНИИСИ, 1986. С. 54–62.
9. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. М. : Радио и связь, 1988. 176 с.
10. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. Chichester : Wiley, 1997. 303 p.
11. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Наконечный А.Н. Оптимизация характеристик надежности систем на основе использования количественных оценок непрерывности и методов ускоренного моделирования. М. : ВНИИСИ, 1988. С. 79–84.
12. Кузнецов Н.Ю. Об оценке влияния надежности различных групп элементов на надежность всей системы в целом. *Кибернетика и системный анализ*. 1989. № 5. С. 110–119.
13. Glasserman P. Gradient estimation via perturbation analysis. New York : Springer, 1990. 222 p.
14. Glynn P.W. Likelihood ratio gradient estimation for stochastic systems. *Communications of the ACM.* 1990. Vol. 33, N 10. P. 75–84.
15. Fu M. C. Gradient estimation. *Handbooks in Operations Research and Management Science*. 2006. Vol. 13. P. 575–616.
16. Heidergott B., Vazquez-Abad F. J., Pflug G., Farenhorst-Yuan T. Gradient estimation for discrete-event systems by measure-valued differentiation. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 2010. Vol. 20, N 1. P. 5.1–5.28.
17. Li J., Mosleh A., Kang R. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications. *Reliab. Engin. and System Safety*. 2011. Vol. 96, N 12. P. 1667–1679.
18. Lam H., Li H., Zhang X. Minimax efficient finite-difference gradient estimators. *Winter Simulation Conference. IEEE.* 2019. P. 392–403.
19. Chen G. Unbiased gradient simulation for zeroth-order optimization. *Winter Simulation Conference. IEEE*. 2020. P. 2947–2959.
20. Kuznetsov N.Yu., Khomyak O.N. Evaluation of the probability of functional failure of a redundant system by importance sampling. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50, N 4. P. 538–547.

Отримано 17.10.2022