УДК 517.929

Д.Я. Хусаінов, А.В. Шатирко, Т.І. Шакотько

ОТРИМАННЯ УМОВ ЗБІЖНОСТІ ПРОЦЕСІВ НАВЧАННЯ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ НЕЙРОДИНАМІКИ З ПІСЛЯДІЄЮ*

Хусаінов Денис Ях'євич

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

d.y.khusainov@gmail.com

Шатирко Андрій Володимирович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

shatyrko.a@knu.ua

Шакотько Тетяна Іванівна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

tracuk_85@ukr.net

Одним із класичних методів дослідження динамічних систем є прямий метод Ляпунова, що застосовується до широкого класу задач якісного аналізу поведінки систем. Дана стаття є продовженням низки наукових робіт її авторів, присвячених поширенню вищевказаного методу на нові сучасні наукові проблеми. А саме, на підрозділ штучного інтелекту — нейронні мережі. В даній статті на основі методу функцій Ляпунова досліджено системи, що описуються в термінах диференціальних рівнянь із запізненням аргументу. Вказано на особливості його застосування для систем функціонально-диференціальних рівнянь (ФДР) із запізненням у загальному нелінійному випадку. З метою наочності та з використанням методології дослідження продемонстровано можливість отримання умов стійкості, як залежних, так й незалежних від запізнення, для випадку лінійних систем ФДР. При цьому використано традиційну функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми. Розглянуто моделі неперервних нейронних сіток Хопфілда у вигляді систем диференціальних рівнянь із запізненням та слабкою нелінійністю. За допомогою функцій Ляпунова квадратичного вигляду доведено твердження про асимптотичну стійкість положення рівноваги. Також показано й якісний характер поведінки системи, а саме, доведено, що норма розв'язків затухає за експоненціальним законом. Окреслено перспективу подальших досліджень з використанням функцій Ляпунова, що враховують нелінійності диференціальних моделей сіток Хопфілда.

Ключові слова: метод Ляпунова, стійкість, нейромережі, запізнення аргументу, система диференціальних рівнянь.

---

* Роботу проведено в рамках бюджетної тематики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 22БФ015-04 «Розроблення теоретичних основ і нових методів обробки, розпізнавання, прогнозу людиноорієнтованих процесів та систем для вирішення проблем штучного інтелекту».

Вступ

При розробці нових методів штучного інтелекту на основі моделей машинного навчання у задачах нейродинаміки останнім часом використовуються класичні методи якісної теорії динамічних систем [1]. Процеси збіжності при навчанні в нейромережах тісно пов'язані з класичними методами якісної теорії динамічних систем і, зокрема, з методами А.М. Ляпунова [2–4]. Запропонована у роботі [1] «модель» є системою звичайних нелінійних диференціальних рівнянь спеціального виду, яку можна назвати системою «зі слабкою нелінійністю». У цій роботі розглядаються проблеми, властиві нейронним мережам, які є класичними проблемами динамічних систем.

1. Велика розмірність системи. Математичним моделям нейродинаміки притаманна велика кількість степенів вільності, що є суттєвою особливістю кори головного мозку.

2. Нелінійність. Слід зазначити, що нелінійність у моделях нейродинаміки має власну специфіку. На думку авторів, її краще назвати «слабкою нелінійністю». Нелінійна функція, що характеризує зворотний зв'язок, міститься у секторі між двома прямими.

3. Дисипативність. Як зазначено у роботі [1], нейродинамічна система характеризується збіжністю у часі до множини у просторі меншої розмірності.

Щодо динаміки нейронних мереж усе це дозволяє використовувати апарат теорії динамічних систем, зокрема, класичний метод функцій Ляпунова [2–4].

1. Нелінійні системи. Загальний підхід

Як зазначено в роботі [5], для систем, що описують процеси в нейродинаміці, характерним є запізнення, обумовлене часом обробки сигналу зворотного зв'язку та виробленням керуючої дії. Більш адекватним апаратом, що описує динаміку процесів у нейронних мережах, є системи диференціальних рівнянь із післядією, зокрема, диференціальних рівнянь із запізнілим аргументом. Проте у цих рівнянь щодо стійкості і збіжності процесів є свої особливості. Класичним апаратом дослідження динамічних систем різного виду є другий метод Ляпунова, або метод функцій Ляпунова.

Для систем диференціальних рівнянь із післядією (нелінійних із запізненням) [6]

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t-\tau), t) \quad \tau > 0, \tag{1}$$

цей метод має свої особливості. Векторне поле системи (1) визначається положенням не тільки у даний час $x(t)$, але й у попередній $x(t-\tau)$. Тому при дослідженні стійкості та отриманні оцінок збіжності, використовуючи другий метод Ляпунова, запропоновано оцінювати величину повної похідної функції Ляпунова у момент $t > 0$ для координати $x(t)$, враховуючи припущення, що координата, яка запізнюється $x(s)$, $s < t$, знаходиться «всередині» поверхні рівня $V(x,t) = c$ [5]. Формально це припущення сформульовано у вигляді залежності

$$V(x(s), s) < V(x(t), t), \text{ при } s < t.$$

Зміст цього припущення такий. Для довільного $\varepsilon > 0$ завжди знайдуться достатньо малі $\delta > 0$ та $\alpha > 0$, при яких розв'язок $x(s)$ системи (1), що задовольняє при $0 \le s \le \tau$ початковій умові $|x(s)| < \delta$, буде знаходитися в області $V^{\alpha} = \{x \in R^n : V(x) < \alpha\}$, котра, в свою чергу, знаходиться в ε-околі нульового

ISSN 2786-6491

положення рівноваги $U_{\varepsilon} = \{x \in R^n : | x | < \varepsilon\}$. Якщо, від зворотного, в момент $t > 0$ розв'язок $x(t)$ досягає межі цієї множини, тобто $| x(t) | = \varepsilon$, тоді він повинен перетнути межу $\partial V^{\alpha} = \{x \in R^n : V(x) = \alpha\}$. А це неможливо, бо функція Ляпунова не зростає, що еквівалентно тому, що її повна похідна від'ємно визначена. Геометрично умова від'ємної визначеності функції Ляпунова означає, що векторне поле системи на межі $\partial V^{\alpha} = \{x \in R^n : V(x) = \alpha\}$ спрямоване всередину.

Якщо функція Ляпунова має вигляд квадратичної форми $V(x) = x^{\mathrm{T}} Hx$ (зазвичай) з симетричною додатно визначеною матрицею H, то умова Б.С. Разуміхіна [7] має такий вигляд

$$\lambda_{\min}(H) | x(s) |^2 \le x^{\mathrm{T}} x(s) Hx(s) = V(x(s)) < V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t) Hx(t) \le \lambda_{\max} V | x(t) |^2,$$
$$0 \le s \le t.$$

Тому при оцінці повної похідної функції Ляпунова в силу системи використовується нерівність

$$| x(s) | < \sqrt{\varphi(H)} | x(t) |, \ \varphi(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H), \ \ 0 \le s \le t, \tag{2}$$

де $\lambda_{\max}(H)$, $\lambda_{\min}(H)$ — максимальне й мінімальне власні числа симетричної, додатно визначеної матриці H.

2. Лінійні системи із запізненням

Раніше співавторами цієї статті, зокрема в роботі [8], розглядалися системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами виду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \ \ \tau > 0. \tag{3}$$

Дослідження проводилося методом квадратичних функцій Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}} Hx$ із симетричною додатно визначеною матрицею H. Вважалося, що «модельна система»

$$\dot{x}(t) = (A + B) x(t)$$

є асимптотично стійкою. Повна похідна функції Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}} Hx$ в силу системи (3) записувалася у вигляді

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = (\dot{x}(t))^{\mathrm{T}} Hx(t) + x^{\mathrm{T}}(t) H(\dot{x}(t)) =$$
$$= (Ax(t) + Bx(t - \tau))^{\mathrm{T}} Hx(t) + x^{\mathrm{T}}(t) H(Ax(t) + Bx(t - \tau)).$$

Далі додавався й віднімався другий член без запізнення й отримували

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)[(A + B)^{\mathrm{T}} H + H(A + B)] x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t) HB[x(t - \tau) - x(t)]. \tag{4}$$

Якщо матриця $A + B$ асимптотично стійка, то матричне рівняння Ляпунова

$$(A + B)^{\mathrm{T}} H + H(A + B) = -C$$

за будь-якої додатно визначеної матриці $C = C_0$ має розв'язком додатно визначену матрицю $H = H_0$. Таким чином, залежність (4) має вигляд

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = -x^{\mathrm{T}}(t)C_0 x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)H_0 B[x(t-\tau) - x(t)]. \tag{5}$$

Можна виділити два підходи при отриманні конструктивних умов стійкості лінійних систем із запізненням (3) із використанням другого методу Ляпунова.

2.1. Умови стійкості рівномірні за запізненням. Використовуючи нерівність (2), отримуємо, що повній похідній функції Ляпунова (5) відповідає таке співвідношення

$$\frac{d}{dt}V(x(T)) \le -\lambda_{\min}(C_0)\left|x(T)\right|^2 + 2\left|H_0 B\right|[1+\sqrt{\varphi(H_0)}]\left|x(T)\right|^2 =$$

$$= -\{\lambda_{\min}(C_0) - 2\left|H_0 B\right|[1+\sqrt{\varphi(H_0)}]\}\left|x(t)\right|.$$

При виконанні умови

$$\lambda_{\min}(C_0) - 2\left|H_0 B\right|[1+\sqrt{\varphi(H_0)}] > 0$$

повна похідна функції Ляпунова буде від'ємно визначеною. Це означає, що векторне поле системи із запізненням спрямоване всередину поверхні рівня $\partial V^{\alpha} = \{x : x^{\mathrm{T}} H_0 x = \alpha\}$, і розв'язок $x(t)$ не залишає область $V^{\alpha} = \{x : x^{\mathrm{T}} H_0 x < \alpha\}$. Таким чином, нульовий розв'язок системи (3) буде стійким за Ляпуновим.

До того ж можна показати, що він є експоненційно стійким. Дійсно, враховуючи нерівності квадратичних форм

$$\lambda_{\min}(H_0)\left|x(t)\right|^2 \le V(x(t)) = x(t)^{\mathrm{T}} Hx(t) \le \lambda_{\max}(H_0)\left|x(t)\right|^2, \tag{6}$$

отримаємо

$$\left|x(T)\right|^2 \le \frac{1}{\lambda_{\min}(H_0)} V(x(t)).$$

Повній похідній функції Ляпунова відповідає нерівність

$$\frac{d}{dt}V(T) \le \psi(H_0)V(x(T)), \quad \psi(H_0) = \frac{\lambda_{\min}(C_0) - 2\left|H_0 B\right|[1+\sqrt{\varphi(H_0)}]}{\lambda_{\min}(H_0)}.$$

Розв'язавши отриману диференціальну нерівність, отримуємо

$$V(x(T)) \le V(x(t_0))\exp\{\psi(H_0)(t-t_0)\}.$$

З використанням двосторонньої нерівності (6) остаточно отримуємо оцінку збіжності розв'язку системи диференціальних рівнянь (3).

$$\left|x(T)\right| \le \sqrt{\varphi(H_0)}\exp\left\{\frac{1}{2}\psi(H_0)(T-t_0)\right\}.$$

2.2. Умови стійкості залежні від запізнення. Система диференціальних рівнянь (3) записувалася в інтегральному вигляді

$$x(t) = x(t-\tau) + \int_{t-\tau}^{t} [Ax(s) + Bx(s-\tau)]ds.$$

ISSN 2786-6491

Звідси випливає нерівність

$$\left|x(t)-x(t-\tau)\right| \le \int_{t-\tau}^{t} [\left|A\right|\left|x(s)\right| + \left|B\right|\left|x(s-\tau)\right|]ds.$$

Нехай, як і в попередньому випадку, від зворотного, при $t_0-\tau \le t < T$ розв'язок $x(t)$ знаходиться всередині еліпса $V^{\alpha}=\{x: x^{\mathrm{T}}Hx<\alpha\}$, а при $t=T$ досягає його межі $\partial V^{\alpha}=\{x: x^{\mathrm{T}}Hx=\alpha\}$. Тоді

$$\left|x(T)-x(T-\tau)\right| \le (\left|A\right|+\left|B\right|)\sqrt{\varphi(H_0)}\left|x(T)\right|\tau. \tag{7}$$

Знову звернемося до (5). Підставивши отримане співвідношення (7) в (5), отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x(T)) \le -\{\lambda_{\min}(C_0)-2\left|H_0B\right|(\left|A\right|+\left|B\right|)\sqrt{\varphi(H_0)}\tau\}\left|x(T)\right|^2.$$

При

$$\tau<\tau_0,\ \ \tau_0=\frac{\lambda_{\min}(C_0)}{2\left|H_0B\right|(\left|A\right|+\left|B\right|)\sqrt{\varphi(H_0)}},\ \ \varphi(H_0)=\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)} \tag{8}$$

повна похідна функції Ляпунова буде від'ємно визначеною. Таким чином, векторне поле системи (3) спрямоване всередину поверхні $\partial V^{\alpha}=\{x: x^{\mathrm{T}}Hx=\alpha\}$, і лінійна система із запізненням (3) стійка.

Крім того, покажемо, що при виконанні умови (8) розв'язок системи експоненційно сходиться до нульового положення рівноваги. Дійсно, враховуючи нерівності квадратичних форм (6) та нерівності (8), отримуємо

$$\frac{d}{dt}Vx(T) \le -\{\lambda_{\min}(C_0)-2\left|H_0B\right|(\left|A\right|+\left|B\right|)\sqrt{\varphi(H_0)}\tau\}\frac{1}{\lambda_{\max}(H)}V(x(T))$$

або

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}Vx(T) \le -\gamma(H_0)V(x(T)),\\ \gamma(H_0)=\frac{\lambda_{\min}(C_0)-2\left|H_0B\right|(\left|A\right|+\left|B\right|)\sqrt{\varphi(H_0)\tau}}{\lambda_{\min}(H_0)}.\end{gathered} \tag{9}$$

Розв'язавши отриману диференціальну нерівність (9), остаточно маємо

$$V(x(T)) \le V(x(0))\exp\{-\gamma(H_0)(t-t_0)\}.$$

Використавши знову нерівності квадратичних форм, отримуємо

$$\left|x(t)\right| \le \sqrt{\varphi(H_0)}\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma(H_0)(t-t_0)\right\}.$$

3. Системи із слабкою нелінійністю

У роботі [1] як моделі неперервних нейронних сіток Хопфілда (НСХ) запропоновано системи звичайних диференціальних рівнянь виду

$$C_i\frac{dy_i(t)}{dt}=-\frac{1}{R_i}y_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}\varphi_j(y_j(t))+I_i,\ \ t\ge 0,\ \ i=\overline{1,n}. \tag{10}$$

Якщо враховувати час обробки сигналу, то використовувалися системи диференціально-різницевих рівнянь із запізненням

$$C_i \frac{dy_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} \varphi_j (y_j (t-\tau)) + I_k, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Тут n — число нейронів у сітці; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор стану сітки в момент часу $t > 0$; R_i, C_i, I_i, $i = \overline{1, n}$, — опори, ємності й зовнішні струми відповідно. Заміною

$$a_i = \frac{1}{R_i C_i}, \quad b_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{C_i}, \quad I_i^0 = \frac{I_i}{C_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

системи (10), (11) можна звести до систем у стандартному вигляді

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j (y_j(t)) + c_i, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

а з урахуванням часу обробки сигналу та побудови керування — до систем із запізненням

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = -a_i y_i(t) + \sum_{l=1}^{n} b_{ij} f_j (y_j(t-\tau)) + c_i, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Розглянемо динамічні системи, що являють собою моделі нейронних мереж, які описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням, продовжуючи використовувати ідеї та методологію, запропоновані авторами раніше в роботах [9–12].

$$\begin{gathered}
\dot{y}_1(t) = -a_{11} y_1(t) + b_{11} f_{11}(y_1(t-\tau)) + b_{12} f_{12}(y_2(t-\tau)) + ... + b_{1n} f_{1n}(y_n(t-\tau)) + c_1 \\
\dot{y}_2(t) = -a_{22} y_2(t) + b_{21} f_{21}(y_1(t-\tau)) + b_{22} f_{22}(y_2(t-\tau)) + ... + b_{2n} f_{2n}(y_n(t-\tau)) + c_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{y}_n(t) = -a_{nn} y_n(t) + b_{n1} f_{n1}(y_1(t-\tau)) + b_{n2} f_{n2}(y_2(t-\tau)) + ... + b_{nn} f_{nn}(y_n(t-\tau)) + c_n.
\end{gathered} \tag{12}$$

Вважаємо, що $a_{ii} > 0$, функції $f_{ij}(y_j)$, $i, j = n$, є неперервно диференційованими, система диференціальних рівнянь (12) має єдину точку спокою $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n)$, котра є розв’язком системи рівнянь

$$\begin{gathered}
-a_{11} y_1 + b_{11} f_{11}(y_1) + b_{12} f_{12}(y_2) + ... + b_{1n} f_{1n}(y_n) + c_1 = 0, \\
-a_{22} y_2 + b_{21} f_{21}(y_1) + b_{22} f_{22}(y_2) + ... + b_{2n} f_{2n}(y_n) + c_2 = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-a_{nn} y_n + b_{n1} f_{n1}(y_1) + b_{n2} f_{n2}(y_2) + ... + b_{nn} f_{nn}(y_n) + c_n = 0.
\end{gathered}$$

Проведемо заміну типу «паралельного переносу» точки спокою $M_0(y_1^0, y_2^0, ...$ $..., y_n)$ в початок координат

$$y_i(t) = x_i(t) + y_i^0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Тоді систему (12) буде зведено до виду «системи рівнянь збурень»

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -a_{11}x_1(t) + b_{11}F_{11}(x_1(t-\tau)) + b_{12}F_{12}(x_2(t-\tau)) + \ldots + b_{1n}F_{1n}(x_n(t-\tau)),\\
\dot{x}_2(t) &= -a_{22}x_2(t) + b_{21}F_{21}(x_1(t-\tau)) + b_{22}F_{22}(x_2(t-\tau)) + \ldots + b_{2n}F_{2n}(x_n(t-\tau)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dot{x}_n(t) &= -a_{nn}x_n(t) + b_{n1}F_{n1}(x_1(t-\tau)) + b_{n2}F_{n2}(x_2(t-\tau)) + \ldots + b_{nn}F_{nn}(x_n(t-\tau)),
\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$F_{ij}(x_j(t-\tau)) = f_{ij}(x_j(t-\tau) + y_j^0) - f_{ij}(y_j^0).$$

Оскільки

$$F_{ij}(0) = 0, \ \ i, \ j = \overline{1, n},$$

дослідження стійкості положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n)$ й збіжності розв'язків до цієї точки буде зведено до дослідження нульового положення рівноваги $O(0, 0, ..., 0)$ системи «рівнянь збурень» (13).

Нехай функції $F_{ij}(x_j(t-\tau)), \ \ i, \ j = \overline{1, n}$, задовольняють так званим «умовам лінійного обмеження»

$$\left| F_{ij}(x_j(t-\tau)) \right| \le K_{ij} \left| x_j(t-\tau) \right|, \ i, \ j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

У такому випадку асимптотичну стійкість нульового положення рівноваги системи (13) й оцінку збіжності можна отримати з використанням «класичних» квадратичних функцій Ляпунова [2, 3]

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii} x_i^2, \ \ h_{ii} > 0, \ \ i = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Оскільки в диференціальному рівнянні присутні члени із запізненням, то при оцінці повної похідної в силу системи будемо використовувати «умову Б.С. Разуміхіна», яку наведено вище. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Нехай параметри* $a_{ii} > 0, \ \ h_{ii} > 0, \ \ b_{ij}, \ \ K_{ij} > 0, \ \ i, \ j = \overline{1, n}$, *системи (13) такі, що матриця* $2C_1(h, a) - C_2(h, L)$, *де*

$$C_1(h, a) = \begin{bmatrix} h_{11}a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_{22}a_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & & \ldots & h_{nn}a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$C_2(h, L) = \begin{bmatrix} 2h_{11}L_1 & h_{11}L_1 + h_{22}L_2 & \ldots & h_{11}L_1 + h_{nn}L_n \\ h_{11}L_1 + h_{22}L_2 & 2h_{22}L_2 & \ldots & h_{22}L_2 + h_{33}L_3 \\ . & . & \ldots & . \\ h_{11}L_{11} + h_{nn}L_n & h_{22}L_2 + h_{33}L_3 & \ldots & 2h_{nn}L_{nn} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$L_i = \sqrt{\varphi(h)} \times \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| K_{ij}, \ \varphi(h) = h_{\max}/h_{\min}, \ h_{\min} = \min_{i=\overline{1,n}}\{h_{ii}\}, \ h_{\max} = \max_{i=\overline{1,n}}\{h_{ii}\}, \ i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

додатно визначена. Тоді положення рівноваги $M_0(y_1^0, y_2^0, ..., y_n)$ *системи (12) стійке за Ляпуновим.*

Доведення. Нескладно бачити, що функція Ляпунова $V(x_1, x_2,..., x_n)$, задана в (15), додатно визначена. Обчислимо її повну похідну в силу рівнянь збурень (13) при виконанні умов теореми 1. Отримуємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))}{\partial x_i(t)} \left\{ -a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}F_{ij}(x_j(t-\tau)) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2h_{ii}x_i(t) \left\{ -a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}F_{ij}(x_j(t-\tau)) \right\} \le$$

$$\le -2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}h_{ii}x_i^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii} \left| x_i(t) \right| \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| \left| F_{ij}(x_j(t-\tau)) \right| .$$

Умови Б.С. Разуміхіна для функції Ляпунова (15) мають такий вигляд

$$h_{\min} \left\| x(t-s) \right\|^2 \le \sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i^2(t-s) = V(x_1(t-s), x_2(t-s),..., x_n(t-s)) \le$$

$$\le V(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} h_{ii}x_i^2(t) \le h_{\max} \left\| x(t) \right\|^2,$$

$$\left\| x(t) \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) , \; i = \overline{1, n}, \;\; s > 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left| x_i(t-s) \right| \le \sqrt{\varphi(h)} \left\| x(t) \right\|, \;\; i = \overline{1, n}.$$

Використовуючи умову (14), для повної похідної функції Ляпунова в силу системи отримуємо таке співвідношення

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)) \le -2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}h_{ii}x_i^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n} h_{ii} \left| x_i(t) \right| \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| K_{ij} \left| x_j(t-\tau) \right| \le$$

$$\le -2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}[a_{ii}x_i^2(t) - \left| x_i(t) \right| \times \left\| x(t) \right\| \sqrt{\varphi(h)} \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| K_{ij}].$$

Використаємо позначення (17).

Розкриємо першу суму останньої нерівності, використаємо позначення для $L_i, \; i = \overline{1, n},$ й отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)) \le -2h_{11}[a_{11}x_1^2(t) - L_1 \left| x_1(t) \right| \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + ... + x_n^2(t)}] -$$

$$-2h_{22}[a_{22}x_2^2(t) - L_2 \left| x_2(t) \right| \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + ... + x_n^2(t)}] - ...$$

$$\ldots -2h_{nn}[a_{nn}x_n^2(t) - L_n \left| x_n(t) \right| \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + ... + x_n^2(t)}].$$

Далі, згідно з очевидною нерівністю

$$\left| x_i(t) \right| \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + ... + x_n^2(t)} \le \left| x_i(t) \right| [\left| x_1(t) \right| + \left| x_2(t) \right| + ... + \left| x_n(t) \right|] ,$$

 ISSN 2786-6491

запишемо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)) \le -2h_{11}[a_{11}x_1^2(t) - L_1\left|x_1(t)(\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + ... + \left|x_n(t)\right|)\right|] -$$

$$-2h_{22}[a_{22}x_2^2(t) - L_2\left|x_2(t)\right|(\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + ... + \left|x_n(t)\right|)] - ...$$

$$... - 2h_{nn}[a_{nn}x_n^2(t) - L_n\left|x_n(t)\right|(\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + ... + \left|x_n(t)\right|)].$$

Зведемо праву частину останнього виразу до квадратичної форми. Використавши позначення (16) для матриць $C_1(h, a)$, $C_2(h, L)$, запишемо

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -\bar{x}^{\mathrm{T}}(t)[2C_1(h, a) - C_2(h, L)]\bar{x}(t), \;\; \bar{x}^{\mathrm{T}}(t) = (\left|x_1(t)\right|, \left|x_2(t)\right|, ..., \left|x_n(t)\right|).$$

Якщо симетрична матриця $2C_1(h, a) - C_2(h, L)$ додатно визначена, то повна похідна функції Ляпунова в силу системи з запізненням буде від'ємно визначеною.

Як випливає з функції Ляпунова, для довільного $\varepsilon > 0$ існує еліпсоїд $V^{\alpha} = \{x \in R^n : V(x_1, x_2, ..., x_n) < \alpha\}$, який знаходиться в ε-околі нульового положення рівноваги $U^{\varepsilon} = \{x \in R^n : \|x\| < \varepsilon\}$, в свою чергу, в ньому знаходиться δ-окіл нульового положення рівноваги $U^{\delta} = \{x \in R^n : \|x\| < \delta\}$. Нехай початкове положення системи знаходиться в $U^{\delta} = \{x \in R^n : \|x\| < \delta\}$. Покажемо, що розв'язок не вийде з нульового положення рівноваги. Нехай, від зворотного, при деякому $T > 0$ розв'язок досягне межі множини $U^{\varepsilon} = \{x \in R^n : \|x\| < \varepsilon\}$. Але тоді, в силу побудови множин, він повинен перетнути поверхню рівня функції Ляпунова $\partial V^{\alpha} = \{x \in R^n : V(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha\}$. А це неможливо, оскільки похідна функції Ляпунова від'ємно визначена й вздовж розв'язків вона зменшується. Таким чином, нульовий розв'язок буде стійким за Ляпуновим.

Покажемо, що нульовий розв'язок не тільки стійкий, а й асимптотично стійкий, тобто процес навчання йде за експоненціальним законом. Для цього скористаємося неавтономною функцією Ляпунова

$$V(x_1, x_2, ..., x_n, t) = e^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n} h_{ii}e^{\gamma t}x_i^2, \;\; h_{ii} > 0, \;\; \gamma > 0, \;\; i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай параметри* $a_{ii} > 0$, $h_{ii} > 0$, b_{ij}, $K_{ij} > 0$, $i, j = \overline{1, n}$, *системи (13) такі, що матриця*

$$C_0(h, a, L, 0) = 2C_1(h, a) - \sqrt{\varphi(h)}C_2(h, L)$$

додатно визначена.

Тоді нульове положення рівноваги системи (13) буде асимптотично стійким й має місце така оцінка збіжності

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\varphi(h)}\,\|x(0)\|\exp\{-\gamma_0 t/2\}, \;\; \|x(0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(0)}. \tag{19}$$

Тут $\gamma_0 > 0$ *— величина, за якої матриця*

$$C_0(h, a, L, \gamma_0) = 2C_1(h, a) - \gamma_0 H - e^{\gamma_0 \tau/2}\varphi(h)C_2(h, L)$$

також додатно визначена.

Доведення. Обчислимо повну похідну неавтономної функції $V(x_1, x_2, ..., x_n, t)$ (18) в силу системи рівнянь збурень (13) при виконанні умов теореми 2 й отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t) = \frac{\partial V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t)}{\partial t} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t)}{\partial x_i(t)}\left\{-a_{ii}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}F_{ij}(x_j(t-\tau))\right\} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\gamma e^{\gamma t}h_{ii}x_i^2(t) - 2\sum_{i=1}^{n}e^{\gamma t}a_{ii}h_{ii}x_i^2(t) + 2\sum_{i=1}^{n}h_{ii}e^{\gamma t}\left|x_i(t)\right|\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|K_{ij}\left|x_j(t-\tau)\right|.$$

Умова Б.С. Разуміхіна для функції Ляпунова (18) має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}e^{\gamma(t-s)}h_{ii}x_i^2(t-s) = V(x_1(t-s),\, x_2(t-s),\dots,\, x_n(t-s),\, t-s) \le$$

$$\le V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t) \le e^{\gamma t}h_{\max}\left\|x(t)\right\|^2, \quad s > 0.$$

Тому

$$\left|x_j(t-\tau)\right| \le e^{\gamma\tau/2}\sqrt{\varphi(H)}\left\|x(t)\right\|. \tag{20}$$

Для оцінки повної похідної отримаємо нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t) \le$$

$$\le e^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}(\gamma - 2a_{ii})x_i^2(t) + 2e^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}\left|x_i(t)\right|\sum_{j=1}^{n}\left|b_{ij}\right|K_{ij}\left|x_j(t-\tau)\right|.$$

Використовуючи (20), запишемо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t) \le$$

$$\le e^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}(\gamma - 2a_{ii})x_i^2(t) + 2e^{\gamma t}\sum_{i=1}^{n}h_{ii}\left|x_i(t)\right|e^{\gamma\tau/2}L_i\sqrt{\varphi(H)}\left\|x(t)\right\|.$$

Використавши знову очевидну нерівність

$$\left|x_i(t)\right|\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)} \le \left|x_i(t)\right|[\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + \dots + \left|x_n(t)\right|],$$

отримаємо

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t) \le \gamma e^{\gamma\tau}[h_{11}x_1^2(t) + h_{22}x_2^2(t) + \dots + h_{nn}x_n^2(t)] -$$

$$-2h_{11}e^{\gamma t}[a_{11}x_1^2(t) - e^{\gamma\tau/2}\sqrt{\varphi(h)}L_1\left|x_1(t)\right|(\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + \dots + \left|x_n(t)\right|)] -$$

$$-2h_{22}e^{\gamma t}[a_{22}x_2^2(t) - e^{\gamma\tau/2}\sqrt{\varphi(h)}L_2\left|x_2(t)\right|(\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + \dots + \left|x_n(t)\right|)] - \dots$$

$$\dots - 2h_{nn}e^{\gamma t}[a_{nn}x_n^2(t) - e^{\gamma\tau/2}\sqrt{\varphi(h)}L_n\left|x_n(t)\right|(\left|x_1(t)\right| + \left|x_2(t)\right| + \dots + \left|x_n(t)\right|)].$$

З використанням раніше введених матриць $C_1(h, a)$, $C_2(h, a)$ (16) й позначень $H = \mathrm{diag}\{h_{ii},\, i = \overline{1, n}\}$, для повної похідної функції Ляпунова отримаємо таке співвідношення

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\dots,\, x_n(t),\, t) \le -e^{\gamma t}\overline{x}^{\mathrm{T}}(t)[2C_1(h, a) - \gamma H - e^{\gamma\tau/2}\varphi(h)C_2(h, L)]\overline{x}(t).$$

Звідси випливає диференціальна нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\ldots,\, x_n(t),\, t) \le$$

$$\le -\frac{1}{h_{\max}}\lambda_{\min}[2C_1(h,\, a) - \gamma H - e^{\gamma\tau/2}\varphi(h)C_2(h,\, L)]V(x_1(t),\, x_2(t),\ldots,\, x_n(t),\, t).$$

За умовою теореми 2, матриця $2C_1(h, a) - \varphi(h)C_2(h, L)$ додатно визначена. Тому в силу неперервності існує $\gamma_0 > 0,$ при якому матриця

$$C_0(h,\, a,\, L,\, \gamma_0) = 2C_1(h,\, a) - \gamma_0 H - e^{\gamma_0\tau/2}\varphi(h)C_2(h,\, L)$$

також буде додатно визначена. Отже, має місце нерівність

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t),\, x_2(t),\ldots,\, x_n(t),\, t) \le$$

$$\le -\frac{1}{h_{\max}}\lambda_{\min}[C_0(h,\, a,\, L,\, \gamma_0)]V(x_1(t),\, x_2(t),\ldots,\, x_n(t),\, t).$$

Інтегрувавши отриману диференціальну нерівність, маємо

$$V(x_1(t),\, x_2(t),\ldots,\, x_n(t),\, t) \le V(x_1(t_0),\, x_2(t_0),\ldots,\, x_n(t_0),\, t_0)\left\| x(t_0)\right\| \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_0(t-t_0)\right\}.$$

Далі остаточно отримаємо

$$\left\| x(t)\right\| \le \sqrt{\varphi(h)}\left\| x(t_0)\right\| \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_0(t-t_0)\right\}.$$

Висновок

У даній статті на основі техніки прямого методу Ляпунова досліджено якісну поведінку неперервних нейросіток Хопфілда, що описуються у термінах ФДР із слабкою нелінійністю та запізненням аргументу. Отримані умови стійкості (16) та збіжності (19) «достатньо жорсткі». Це пов'язано з тим, що нелінійні члени моделей розглядаються як збурення. Якщо розглядати їх як «впливи стабілізації», а параметри $b_{ij},\ i, j = \overline{1, n},$ вибирати як параметри керування, то умови стануть «більш сприйнятливі». В такому випадку функцію Ляпунова необхідно обирати в іншому класі (наприклад, типу Лур'є−Постнікова), а саме, в неї повинні входити нелінійні члени системи. Такий підхід є напрямком подальших досліджень.

D. Khusainov, A. Shatyrko, T. Shakotko

OBTAINING CONDITIONS OF LEARNING PROCESSES CONVERGENCE IN MATHEMATICAL MODELS OF NEURODYNAMICS WITH AFTEREFFECT

Denys Khusainov

Taras Shevchenko National University of Kyiv,

d.y.khusainov@gmail.com

Andriy Shatyrko

Taras Shevchenko National University of Kyiv,

shatyrko.a@knu.ua

Tetyana Shakotko

Taras Shevchenko National University of Kyiv,

tracuk_85@ukr.net

One of the classic methods for studying dynamical systems is the direct (second) Lyapunov method. It is applied to a wide class of problems of qualitative analysis of system behavior. This article is a continuation of a series of scientific works by its authors, devoted to the extension of the above-mentioned method to new modern scientific problems. Namely, on the subdivision of artificial intelligence — neural networks. In it, based on the application of the Lyapunov's functions method, systems described in terms of differential equations with a delay argument are investigated. The features of its application for systems of functional differential equations (FDEs) in the general nonlinear case, with a time delay, are indicated. For the purpose of clarity and research methodology, the article demonstrates the possibility of obtaining stability conditions, both dependent and independent of the delay, for the case of linear systems FDE. Herewith, the Lyapunov function in the type of a quadratic form was traditionaly used. Models of continuous Hopfield neural networks in the form of systems of differential equations with time-delay and weak nonlinearity are considered. With the use of Lyapunov functions of the quadratic form, statement about the asymptotic stability of the equilibrium position is proved. The qualitative nature of the behavior of the system is also shown, namely, it is proved that the norm of the solutions decays according to the exponential law. The prospect of further research using Lyapunov functions that take into account nonlinearities of differential models of Hopfield neural networks is outlined.

Keywords: Lyapunov method, stability, neuronet, time-delay, system of differential equation.

REFERENCES

1. Haykin S. Neural networks. A comprehensive foundation. Second edition. New Jersey : Prentice Hall, 1998. https://doi.org/10.1142/s0129065794000372
2. Валеев К.Г. Построение функций Ляпунова. Киев : Наукова думка, 1981. 412 с.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л. : Гос. издат. тех.-теор. лит., 1950. 471 с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М. : Наука, 1966. 532 с.
5. Писаренко В.Г. Новая модель функционирования живой нейросети, учитывающая запаздывающее взаимодействие нейронов. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. № 6. С. 181–192.
6. Hale J. Theory of functional differential equations, NY : Springer, 1977. 361 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2
7. Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М. : Наука, 1988. 108 с.
8. Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев : Изд-во Киевского университета, 1997. 236 с.
9. Шатырко А.В., Диблик Й., Хусаинов Д.Я., Баштинец Я. Сходимость процессов нейродинамики в модели Хопфилда. *Штучний інтелект*. 2017. № 3–4. С. 139–148.
10. Khusainov D.Ya., Diblik J., Bastinec Ja., Shatyrko A.V. Investigating dynamics of one weakly nonlinear system with delay argument. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. **50**(1). P. 20–38. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i1.20
11. Хусаінов Д.Я., Шатирко А.В., Бичков О.С., Шакотько Т.І. Стійкість та збіжність в моделях керуючих нейродинамічних систем. *Актуальні проблеми теорії керуючих систем у комп'ютерних науках ('АПТКС'2021).* Слов'янськ : Праці конференції, 21–24 грудня. 2021. С. 121–126.
12. Khusainov D.Ya., Diblik J., Bastinec Ja., Shatyrko A.V. Estimates of solution convergence dynamical processes in neuronet with time delay. *Conference Proceedings «IEEE ATIT 2019»*. P. 411–414. https://doi.org/10.1109/atit49449.2019.9030506

Отримано 08.12.2022