УДК 519.7

І.А. Мич, В.В. Ніколенко, О.В. Варцаба

ПРОБЛЕМА ДЕДЕКІНДА ТА КЛАСИ ПОСТА

Мич Ігор Андрійович

Ужгородський національний університет,

ihor.mych@uzhnu.edu.ua

Ніколенко Володимир Володимирович

Ужгородський національний університет,

volodymyr.nikolenko@uzhnu.edu.ua

Варцаба Олена Василівна

Ужгородський національний університет,

olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua

У роботі за допомогою класів Поста вивчаються булеві функції. Введено поняття характеристики Поста булевої функції та еквівалентних функцій за характеристикою Поста. На основі відношення еквівалентності за характеристикою Поста розглядаються 32 замкнені класи, які утворюють куб Поста. У цьому кубі 17 класів є порожніми, а решта 15 непорожніх утворюють решітку Поста. У роботі виведено формули для обчислення кількості функцій у класах Поста в залежності від числа змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Такі формули знайдено для 11 з 15 класів. Проблема обчислення потужностей непорожніх класів тісно пов'язана з проблемою Дедекінда. Задачу знаходження кількості монотонних функцій в залежності від числа змінних називають проблемою Дедекінда. У 1897 році цю задачу розв'язав Дедекінд для $n=4$; у 1940 році Черч — для $n=5$; Вард — для $n=6$; для $n=7$ є розходження в отриманих оцінках. Найбільше значення числа Дедекінда відомо для $n=8$. Знайдено оцінки потужностей класів Поста, які дають можливість інакше підійти до розв'язання проблеми Дедекінда. У даній роботі проведено аналітичні дослідження, за допомогою яких можна для довільної системи булевих функцій від довільної кількості змінних, для яких знайдено характеристики Поста, знайти всі можливі одно-, дво-, три- та чотирифункціональні базиси. Знайдено розподіли булевих функцій від трьох, чотирьох і п'яти змінних за непорожніми класами Поста. Використовуючи приведений аналітичний апарат, можна обчислити число всіх можливих базисів. У роботі наведено приклад знаходження всіх базисів для булевих функцій, арність яких не перевищує п'яти. У цьому прикладі знайдена кількість одно-, дво-, три- та чотирифункціональних базисів.

Ключові слова: класи Поста, решітка Поста, базиси булевих функцій, проблема Дедекінда.

Вступ

Однією з важливих задач дискретної математики є задача знаходження потужності класу монотонних булевих функцій, яка відома як проблема Дедекінда [1–3]. Науковці багатьох країн продовжують роботу щодо розв'язання цієї проблеми у двох напрямках. Перший полягає у тому, щоб обчислити число монотонних функцій для заданого n шляхом виведення відповідних формул або алгоритмів підрахунку, а другий — в оцінці цього числа [3]. У 1954 році Гільберт отримав першу наближену оцінку числа монотонних функцій. В таких роботах, як [2–6], було покращено цю оцінку. У [2] підраховано число монотонних функцій для восьми змінних. Цей результат підтверджений у [4].

Основні означення і поняття

Позначимо A_0 клас булевих функцій, які зберігають нуль; A_1 — клас булевих функцій, які зберігають одиницю, L — клас лінійних функцій; M — клас монотонних функцій; S — клас самодвоїстих функцій.

Кожній булевій функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ поставимо у відповідність п'ятимірний булевий вектор $H(f(x_1, x_2, ..., x_n)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$, де $\alpha_1 = 0$, якщо $f \in A_0$, і $\alpha_1 = 1$, якщо $f \notin A_0$; $\alpha_2 = 0$, якщо $f \in A_1$, і $\alpha_2 = 1$, якщо $f \notin A_1$; $\alpha_3 = 0$, якщо $f \in L$, і $\alpha_3 = 1$, якщо $f \notin L$; $\alpha_4 = 0$, якщо $f \in M$, і $\alpha_4 = 1$, якщо $f \notin M_0$; $\alpha_5 = 0$, якщо $f \in S$, і $\alpha_5 = 1$, якщо $f \notin S$.

Вектор $H(f(x_1, x_2, ..., x_n))$ назвемо характеристикою Поста булевої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що вказує на належність цієї функції класам Поста.

Означення 1. Дві булеві функції $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $f_2(x_1, x_2, ..., x_m)$ називаються еквівалентними за характеристикою Поста, якщо $H(f_1(x_1, x_2, ..., x_n)) =$ $= H(f_2(x_1, x_2, ..., x_m))$.

Відношення еквівалентності за характеристикою Поста розіб'є множину всіх булевих функцій на 32 замкнені класи, які утворюють п'ятимірний куб. Далі будемо називати його кубом Поста (рис. 1).

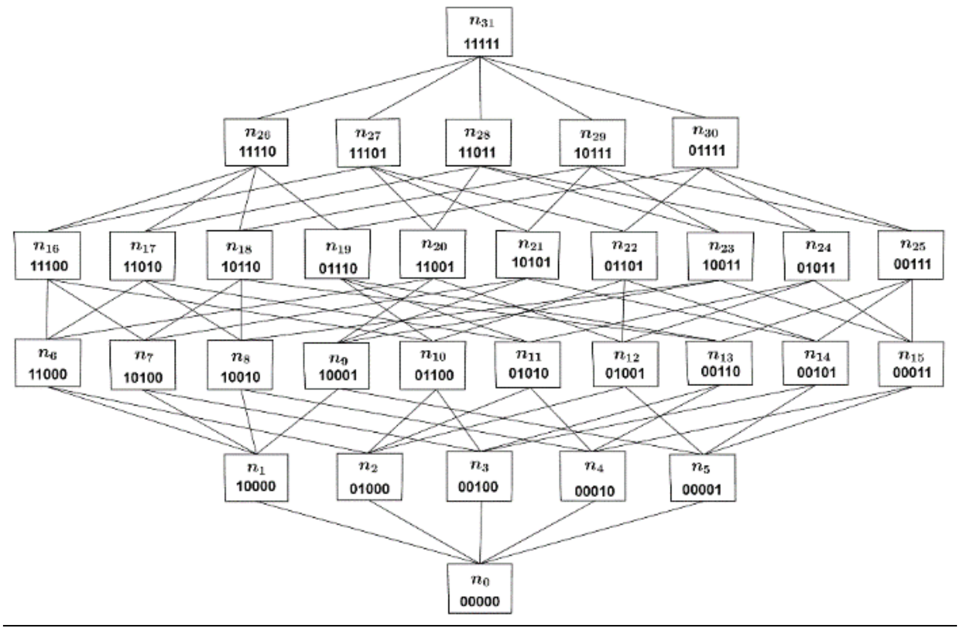

Рис. 1

На рис. 1 зображено куб Поста, вершинами якого є класи еквівалентності, в яких розміщуються еквівалентні за характеристикою Поста булеві функції. У вершинах позначено характеристику відповідного класу і номер вершини куба Поста.

Порожні класи та решітка Поста

У кубі Поста вершини можна розбити на два класи.

Означення 2. Клас еквівалентності куба Поста називається порожнім, якщо не існує булевих функцій, які мають характеристики Поста цього класу.

Встановлено, що у кубі Поста порожніми є 17 класів, а саме n_1, n_2, n_5–n_7, n_8, n_{10}, n_{11}, n_{15}, n_{16}, n_{18}–n_{22}, n_{27}, n_{28}, а решта 15 — непорожні, які утворюють решітку Поста (рис. 2).

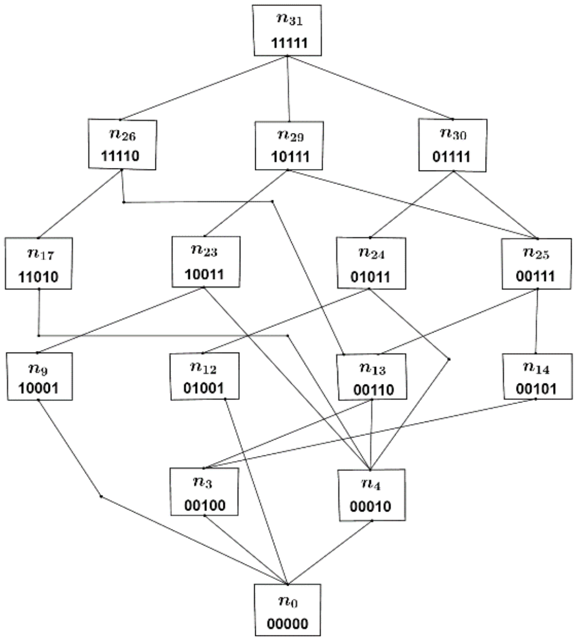

Рис. 2

Вершини решітки Поста розташовані на шести ярусах. На першому знаходиться множина булевих функцій класу n_0, на другому — множини двох класів: n_3 — функції, які не належать класу L, і n_4 — функції, які не належать класу M. На третьому ярусі знаходяться функції класів n_9, n_{12}–n_{14}, функції яких не належать двом із п'яти класів Поста, на четвертому — класи n_{17}, n_{23}, n_{24}, n_{25}, на п'ятому — класи n_{26}, n_{29}, n_{30} і на останньому — клас n_{31}, функції якого не належать жодному класу Поста (шеферові функції). У решітці Поста можна виділити п'ять класів функцій. Функції, які зберігають нуль, належать підкласам $n_0, n_3, n_4, n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{15}, n_{16}, n_{30}$; функції класу A_1 — підкласам $n_0, n_3, n_4, n_9, n_{13}, n_{14}, n_{23}, n_{25}, n_{29}$; лінійні функції — підкласам n_0, $n_4, n_9, n_{12}, n_{17}, n_{23}, n_{24}$; монотонні — підкласам $n_0, n_3, n_9, n_{12}, n_{14}$, самодвоїсті функції — підкласам $n_0, n_3, n_4, n_{13}, n_{17}, n_{26}$. Позначимо $|n_i|$ кількість булевих функцій, які входять до класу n_i.

Клас лінійних функцій

Із функцій замкнутих класів $n_0, n_4, n_9, n_{12}, n_{17}, n_{23}, n_{24}$, які утворюють підграф лінійних функцій решітки Поста (рис. 3), складається клас лінійних функцій.

 ISSN 2786-6491

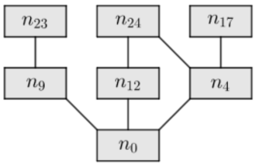

Рис. 3

Клас функцій $n_0 = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ — це функції змінних, які належать всім п’яти класам Поста. Класу n_9 належить функція-константа «одиниця», яка не зберігає нуль і є монотонною. Класу n_{12} належить константа «нуль». Аналогічно ця функція не зберігає одиницю і є монотонною. Зрозуміло, що $|n_9| = |n_{12}| = 1$.

Побудуємо дерево (рис. 4), яке розіб’є решту лінійних функцій за класами Поста. Класи n_{17} і n_{23} містять у поліномах Жегалкіна одиницю, а класи n_4 і n_{24} її не містять. У класах n_{23} і n_4 поліноми мають непарну кількість доданків, а в класах n_{24} і n_{17} — парну.

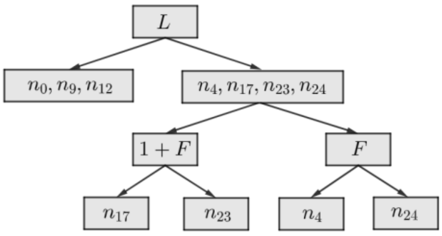

Рис. 4

Клас лінійних функцій, які не зберігають нуль і одиницю, — це клас n_{17}. Цей клас утворюють функції, поліноми яких мають такий вигляд: $1 \oplus x_1$, $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5, \ldots, 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_{2l} \oplus x_{2l+1}$ і т.д.

За допомогою наведених вище представлень функцій класу n_{17} обчислимо його потужність за формулою

$$|n_{17}| = \begin{cases} C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{2l+1}, & \text{якщо } n = 2l + 1, \\ C_n^1 + C_n^3 + ... + C_n^{2l-1}, & \text{якщо } n = 2l. \end{cases}$$

Лінійні функції, які не зберігають нуль і зберігають одиницю, утворюють клас n_{23}. Ці функції можна представити поліномами такого вигляду: $1 \oplus x_1 \oplus x_2$, $1 \oplus x_1 \oplus x_3$, $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \ldots, 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$ і т.д.

Аналогічно встановимо потужність класу n_{23}:

$$|n_{23}| = \begin{cases} C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2l}, & \text{якщо } n = 2l + 1, \\ C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2l}, & \text{якщо } n = 2l. \end{cases}$$

Клас лінійних функцій, які зберігають нуль і не зберігають одиницю, входять до класу n_{24}. Функції цього класу представляються такими поліномами: $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus ... \oplus x_{i_{2l}}$, а отже:

$$|n_{24}| = \begin{cases} C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2l}, & \text{якщо } n = 2l + 1, \\ C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2l}, & \text{якщо } n = 2l. \end{cases}$$

Лінійні функції класу n_4, які зберігають нуль і одиницю, можуть бути представлені такими поліномами: $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus ... \oplus x_{i_{2l+1}}$. Тоді

$$|n_4| = \begin{cases} C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^{2l}, & \text{якщо } n = 2l+1, \\ C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{2l-1}, & \text{якщо } n = 2l. \end{cases}$$

Співвідношення між потужностями класів Поста

Розіб'ємо множину булевих функцій від n змінних на чотири класи: A_0A_1, $A_0\bar{A}_1$, $\bar{A}_0A_1$, $\bar{A}_0\bar{A}_1$, тобто класи, які відповідно зберігають нуль і одиницю, зберігають нуль і не зберігають одиницю, не зберігають нуль і зберігають одиницю, не зберігають нуль і одиницю. В кожному з цих класів знаходиться четверта частина функцій. З решітки Поста отримуємо такі формули:

$$|n_{25}| + |n_{13}| + |n_{14}| + |n_3| + |n_4| + |n_0| = 2^{2^n - 2}; \tag{1}$$

$$|n_{30}| + |n_{24}| + |n_{12}| = 2^{2^n - 2}; \tag{2}$$

$$|n_{29}| + |n_{23}| + |n_9| = 2^{2^n - 2}; \tag{3}$$

$$|n_{31}| + |n_{26}| + |n_{17}| = 2^{2^n - 2}. \tag{4}$$

Множину самодвоїстих функцій розіб'ємо за характеристиками A_0 і A_1 на два підкласи A_0A_1 і $\bar{A}_0\bar{A}_1$. Оскільки $|S| = 2^{2^{n-1}}$, то мають місце такі співвідношення:

$$|n_{26}| + |n_{17}| = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}; \tag{5}$$

$$|n_{13}| + |n_3| + |n_4| + |n_0| = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}. \tag{6}$$

Оскільки відома потужність класу лінійних функцій n_{17}, то з рівності (5) отримуємо $|n_{26}| = \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}} - |n_{17}|$.

Використовуючи формули (4) і (5), знайдемо потужність класу n_{31}:

$$|n_{31}| = 2^{2^n - 2} - \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}. \tag{7}$$

З (7) випливає, що кількість однофункціональних базисів (шеферових функцій), арність яких не перевищує n, дорівнює $2^{2^n - 2} - \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}$.

Оскільки відомі потужності класів лінійних функцій n_{23}, n_9 та n_{24}, n_{12}, то з рівностей (2) і (3) отримуємо формули для обчислення потужності двох класів:

$$|n_{30}| = 2^{2^{n-2}} - (|n_{24}| + |n_{12}|); \tag{8}$$

$$|n_{29}| = 2^{2^{n-2}} - (|n_{23}| + |n_9|). \tag{9}$$

Не знайдено поки формули для обчислення $|n_3|, |n_{13}|, |n_{14}|, |n_{25}|$. Число монотонних функцій від n змінних знаходиться за формулою $|M_n| = |n_0| + |n_3| + |n_9| + |n_{12}| + |n_{14}|$. Знаходження $|n_3|$ і $|n_{14}|$ веде до розв'язання проблеми Дедекінда.

ISSN 2786-6491

Алгоритм знаходження базисів

Нехай система S складається з функцій $f_1, f_2, ..., f_k$, для кожної з яких знайдено характеристики Поста $H(f_i) = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \alpha_4^i, \alpha_5^i)$, $i = 1, 2, ..., k$.

Означення 3. Характеристикою Поста системи S називається вектор $H(S) = = (\alpha_1^S, \alpha_2^S, \alpha_3^S, \alpha_4^S, \alpha_5^S)$, де $\alpha_t^S = \bigvee_{i=1}^{k} \alpha_t^i$ — диз'юнкція відповідних координат характеристики Поста $H(f_i)$.

Позначимо $S_1 = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ і $S_2 = \{g_1, g_2, ..., g_m\}$ дві системи булевих функцій відповідно до характеристик Поста $H(S_1)$ і $H(S_2)$. Утворимо з S_1 і S_2 множину $S_1 \times S_2$, яка складається з впорядкованих пар функцій, тобто $S_1 \times S_2 = \{(f_i, g_j), i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m\}$.

Відомо, якщо $|S_1| = n$, $|S_2| = m$, то $|S_1 \times S_2| = n \cdot m$; $H(S_1 \times S_2) = H(S_1) \vee \vee H(S_2)$.

Приведені міркування поширюються на системи $S_1, S_2, \ldots, S_r$, тому мають місце твердження.

Твердження 1. *Якщо* $|S_1| = n_1$, $|S_2| = n_2$, $\ldots, |S_r| = n_r$, *то* $|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r| = = n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$, $H(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_r) = H(S_1) \vee H(S_2) \vee \cdots \vee H(S_r)$.

Твердження 2. *Система булевих функцій* $S = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ *є функціонально повною тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1^S \wedge \alpha_2^S \wedge \alpha_3^S \wedge \alpha_4^S \wedge \alpha_5^S = 1$.

Означення 4. Функціонально повна система булевих функцій $S = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ називається базисом, якщо $\forall S_k \subset S$, $S_k \neq S$, S_k не є функціонально повною.

Опишемо алгоритм знаходження базисів.

Нехай задана множина булевих функцій S. Для системи S побудуємо решітку Поста (рис. 2), яка розіб'є S на 15 класів еквівалентності. У кожному класі знаходяться усі функції S, еквівалентні за характеристикою Поста. У вершинах решітки вказано номер класу n_i і характеристику Поста відповідного класу еквівалентності.

Однофункціональні базиси утворюють функції, які належать класу n_{31}, оскільки кожна функція цього класу є шеферовою.

Двофункціональні базиси утворюють функції класу $S_1 \times S_2$ такі, що $H(S_1 \times S_2) = (1, 1, 1, 1, 1)$, а $H(S_1) \neq (1, 1, 1, 1, 1)$, $H(S_2) \neq (1, 1, 1, 1, 1)$. Побудуємо всі двофункціональні базиси.

Нехай S_1 співпадає з класом n_{26}. Тоді S_2 може бути довільним класом еквівалентності, п'ята координата характеристики Поста якого дорівнює одиниці. Такими можуть бути класи n_{29}, n_{30}, n_{23}, n_{24}, n_{25}, n_9, n_{12}, n_{14}. З твердження 2 випливає, що кількість двофункціональних базисів, до складу яких входять функції класу n_{26}, знаходимо за формулою $N_{26}^2 = |n_{26}| \cdot (|n_{29}| + |n_{30}| + |n_{23}| + |n_{24}| + + |n_{25}| + |n_9| + |n_{12}| + |n_{14}|)$. В інші двофункціональні базиси не потрапляють функції класу n_{26}. Аналогічно обчислимо $N_{29}^2 = |n_{29}| \cdot (|n_{30}| + |n_{17}| + |n_{24}| + |n_{12}|)$, $N_{30}^2 = |n_{30}| \cdot (|n_{17}| + |n_{23}| + |n_9|)$, $N_{17}^2 = |n_{17}| \cdot (|n_{25}| + |n_{14}|)$.

Твердження 3. *Кількість двофункціональних базисів у класі S дорівнює* $N(B_2)=N_{26}^2+N_{29}^2+N_{30}^2+N_{17}^2$.

Трифункціональні базиси можна побудувати з функцій класів еквівалентності, які розташовані на другому, третьому і четвертому ярусах решітки Поста. Випишемо формули, за допомогою яких можна визначити потужності всіх функціонально повних систем, що містять три функції:

$$N_{17}^3=|n_{17}|\cdot(|n_{25}|+|n_{13}|+|n_{14}|+|n_3|)\cdot(|n_{23}|+|n_{24}|+|n_{25}|+|n_9|+|n_{12}|+|n_{14}|),$$

$$N_{23}^3=|n_{23}|\cdot(|n_{24}|+|n_{12}|)\cdot(|n_{25}|+|n_{13}|+|n_{14}|+|n_3|),$$

$$N_{24}^3=|n_{24}|\cdot|n_9|\cdot(|n_{25}|+|n_{13}|+|n_{14}|+|n_3|),$$

$$N_{25}^3=|n_{25}|\cdot|n_9|\cdot|n_{12}|,$$

$$N_9^3=|n_9|\cdot|n_{12}|\cdot|n_{13}|.$$

Розкриємо дужки в формулах N_{17}^3, N_{23}^3, N_{24}^3 і опустимо ті доданки, які не є базисами. Випишемо доданки, які утворюють базиси у формулі N_{17}^3, — $n_{17}n_{13}n_{24}$, $n_{17}n_{13}n_9$, $n_{17}n_{13}n_{12}$, $n_{17}n_{13}n_{23}$, $n_{17}n_3n_{23}$, $n_{17}n_3n_{24}$, $n_{17}n_3n_9$, $n_{17}n_3n_{12}$, $n_9n_{12}n_{13}$, і функціонально повні системи формули N_{17}^3, які не є базисами, — $n_{17}n_{13}n_{25}$, $n_{17}n_{13}n_{14}$, $n_{17}n_3n_{25}$, $n_{17}n_3n_{14}$. Таким чином, формула $N_{17}^3(B_3)$, яку отримали з N_{17}^3 шляхом відкидання небазисних доданків, має такий вигляд:

$$N_{17}^3(B_3)=|n_{17}|\cdot(|n_{13}|\cdot(|n_{24}|+|n_{23}|+|n_9|+|n_{12}|))+(|n_3|\cdot(|n_{23}|+|n_{24}|+|n_9|+|n_{12}|))=$$
$$=|n_{17}|\cdot(|n_9|+|n_{12}|+|n_{23}|+|n_{24}|)(|n_{13}|+|n_3|).$$

Аналогічно, проводячи перевірку в формулах N_{20}^3, N_{23}^3, N_{24}^3, N_{25}^3, отримуємо відповідні формули для знаходження трифункціональних базисів і підрахунку їх кількості:

$$N_{23}^3(B_3)=|n_{23}|\cdot(|n_{24}|+|n_{12}|)(|n_{25}|+|n_{13}|+|n_{14}|+|n_3|),$$

$$N_{24}^3(B_3)=|n_{24}|\cdot|n_9|\cdot(|n_{25}|+|n_{13}|+|n_{14}|+|n_3|),$$

$$N_{25}^3(B_3)=|n_{25}|\cdot|n_9|\cdot|n_{12}|,$$

$$N_9^3(B_3)=|n_9|\cdot|n_{12}|\cdot|n_{13}|.$$

Твердження 4. *Кількість трифункціональних базисів системи S обчислюється за допомогою класів еквівалентності решітки Поста за формулою*

$$N(B_3)=N_{17}^3(B_3)+N_{23}^3(B_3)+N_{24}^3(B_3)+N_{25}^3(B_3)+N_9^3(B_3).$$

Чотирифункціональні базиси можуть бути побудовані з функцій класів еквівалентності, які розташовані на другому та третьому ярусах решітки Поста. Кількість цих базисів знаходимо за формулою

$$N(B_4)=|n_9|\cdot|n_{12}|\cdot|n_3|\cdot|n_4|+|n_9|\cdot|n_{12}|\cdot|n_{14}|\cdot|n_4|=|n_9|\cdot|n_{12}|\cdot|n_4|\cdot(|n_3|+|n_{14}|).$$

Теорема 1. *Якщо для системи булевих функцій S знайдено класи еквівалентності* $n_0 - n_{31}$ *решітки Поста, то кількість однофункціональних базисів буде* $|n_{31}|$, *двофункціональних —* $N(B_2)$, *трифункціональних —* $N(B_3)$ *і чотирифункціональних —* $N(B_4)$.

У класі булевих функцій, арність яких не перевищує два, можна побудувати таку кількість базисів: однофункціональних — 2, двофункціональних — 24 і трифункціональних — 6. Розподіл числа функцій класів S_3, S_4 і S_5, арність яких відповідно не перевищує три, чотири і п'ять, за класами решітки Поста приведена в таблиці.

Таблиця

n_i	n_0	n_3	n_4	n_9	n_{12}	n_{13}	n_{14}	n_{17}
S_3	3	1	1	1	1	3	14	4
S_4	4	8	4	1	1	112	154	8
S_5	5	76	11	1	1	32676	7498	16
n_i	n_{23}	n_{24}	n_{25}	n_{26}	n_{29}	n_{30}	n_{31}	
S_3	3	3	42	4	60	60	56	
S_4	7	7	16102	120	16376	16376	16256	
S_5	15	15	1073701558	32752	1073741808	1073741808	1073709056	

Знайдемо число всіх базисів для $n = 5$. Кількість однофункціональних базисів рівна потужності класу n_{31} і становить 1073709056. Число двофункціональних обчислюється за формулою $N(B_2) = N_{26}^2 + N_{29}^2 + N_{30}^2 + N_{17}^2 = 1153027056649370000$. Трифункціональні базиси знаходимо за формулою $N(B_3) = N_{17}^3(B_3) + N_{23}^3(B_3) + N_{24}^3(B_3) + N_{25}^3(B_3) + N_9^3(B_3) = 274894664298$. Потужність чотирифункціональних базисів дорівнює $N(B_4) = |n_9| \cdot |n_{12}| \cdot |n_4| \cdot (|n_3| + |n_{14}|)$ = 83314.

Використовуючи таблицю, а також формули для обчислення базисів, отримаємо справедливість теореми.

Теорема 2. *У класах булевих функцій* S_3, S_4 *і* S_5 *існує відповідно* 6604, 274970502 *і* 1153027332617830000 *базисів, з них відповідно* 56, 16256 *і* 1073709056 — *однофункціональні;* 5460, 274710336 *і* 1153027056649370000 — *двофункціональні;* 1073, 243262 *і* 274894664298 — *трифункціональні;* 15, 648 *і* 83314 — *чотирифункціональні.*

Висновок

У роботі проведено дослідження з теорії булевих функцій. Введено нові поняття куба і решітки класів Поста, а також характеристики Поста систем булевих функцій. Отримано формули, які дають можливість знайти всі можливі базиси для довільної системи функцій. Результати досліджень дозволяють розглянути проблему Дедекінда через призму обчислень потужностей класів Поста.

DEDEKIND'S PROBLEM AND POST'S CLASSES

Ihor Mych

Uzhhorod National University,

ihor.mych@uzhnu.edu.ua

Volodymyr Nikolenko

Uzhhorod National University,

volodymyr.nikolenko@uzhnu.edu.ua

Olena Vartsaba

Uzhhorod National University,

olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua

The paper studied Boolean functions using Post's classes. The concepts of Post's characteristic of Boolean function and equivalence functions of Post's characteristic are introduced. The thirty-two closed classes are considered based on the equivalence relation by Post's characteristic. These classes form the Post's cube. This cube's seventeen classes are empty, and nonempty classes form the Post's lattice. Formulas for computing the number of functions of Post's classes have been discovered depending on the number of variables $x_1, x_2, ..., x_n$ in this investigation. Such formulas are found for eleven classes of fifteen classes. The problem of computation of power of nonempty classes is closely related to Dedekind's problem. The exercise finding of quantity of monotone functions depending on the number of variables is called Dedekind's problem. Dedekind solved this problem for $n=4$ in 1897, Church — $n=5$ in 1940, and Ward for $n=6$. The quantity of monotone functions was adduced for $n=7$, but the authors got divergence of valuation. The most value of Dedekind's number is known as $n=8$. Finding the valuation of Post's classes gives the opportunity another side to solve Dedekind's problem. Analytical investigations were conducted in this paper that allow arbitrary Boolean function systems from an arbitrary quantity of variables to find all possible one-functional, two-functional, three-functional, and four-functional bases. The distributions of Boolean functions from three, four, and five variables about nonempty Post's classes are found. They are using this analytical apparatus we can to calculate the quantity of all possible bases. The example of finding all bases for Boolean functions of arity does not exceed five is given. The amount of one-functional, two-functional, three-functional, and four-functional bases was found in this example.

Keywords: Post's classes, Post's lattice, bases of Boolean functions, Dedekind's problem.

REFERENCES

1. Kleitman D. On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1969. Vol. 21. P. 677–682.
2. Wiedemann D. A computation of the eighth Dedekind number. *Order.* 1969. N 8 (1). P. 5–6.
3. Bakoev V. On more way for counting monotone Boolean functions. *Thirteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding*. 2012. P. 47–52.
4. Fidytek R., Mostowski A., Somla R., Szepietowski A. Algorithms counting monotone Boolean functions. *Inform. Process. Lett.* 2011. N 79. P. 203–209.
5. Pawelski B. On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. *Prepr.* 2021. 8 p. https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.13997.
6. Stephen T., Yusun T. Counting inequivalent monotone Boolean functions. *Discrete Applied Mathematics.* 2014. Vol. 167. P. 15–24. http://sfu.ca/~tyusun/inequivalentMBF.html.

Отримано 19.01.2023