УДК 621.22

О.М. Трунов

ФОРМУВАННЯ МЕТОДУ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ КІНЕМАТИКИ МАНІПУЛЯТОРІВ ПРОМИСЛОВОГО РОБОТА

Трунов Олександр Миколайович

Чорноморський національний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв,

trunovalexandr@gmail.com

Робота зумовлена необхідністю застосування аналітичних виразів, що є розв'язками оберненої задачі кінематики для синтезу керуючого впливу при заданому положенні захвата маніпулятора, які задовольняють умові єдиності. У роботі дано аналіз проблеми та причин, що ускладнювали такий розв'язок. Показано, що побудова на підставі умови рівності субматриць, які представляють положення ланки у проєктивному просторі, є системою дев'яти рівнянь з трьома невідомими. Надмірна кількість рівнянь та їх розв'язок прямими аналітичними методами і є причиною неєдиності. Доведено властивості векторів, за допомогою яких завжди задається положення захвата, що дозволяє спрощувати системи рівнянь. Запропоновано перетворення системи внаслідок групування рівнянь із використанням встановлених властивостей векторів положення захвата. Такі перетворення зводять систему дев'яти рівнянь до системи трьох рівнянь з трьома невідомими, в результаті чого отримуємо єдиний розв'язок оберненої задачі кінематики маніпулятора. Моделювання умов аналітичного визначення положення захвата прямим методом та порівняння їх із результатами, отриманими аналітичними розв'язками, свідчить про відносну похибку в межах від 10^{-16} до 10^{-13}. Використання таких виразів дозволяє проводити експрес-визначення кутів повороту, що у свою чергу дозволяє аналітично описувати і кінематику, і динаміку ланок маніпулятора.

Ключові слова: обернена задача кінематики, єдиність, захват маніпулятора, вектор орієнтації, одноіменні проєкції, властивості, аналітичний розв'язок.

Вступ

Застосування машинного моделювання та технологій машинного навчання демонструє їх ефективність при проєктуванні інтелектуалізованих елементів та систем керування очутливленими роботизованими засобами [1]. Однак їх практичне поширення, незважаючи на досягнення 98 % [1] точності навчання і тестування, буде гальмуватися. Причиною тому є неточний і неаналітичний опис кінематики та динаміки складових елементів виробничих систем. Для опису кінематики і динаміки промислових і побутових роботів антропоморфних конструкцій використовуються різні методи [2–4]. Найбільш поширені з них — векторний і матричні методи. На сьогодні метод матриць має перевагу, оскільки простота алгоритмів обчислень дозволяє застосовувати одноплатні комп'ютери для керування маніпулятором з поступальними й обертальними кінематичними парами. Однак його універсальність потребує надмірних обчислень. Незважаючи на постійні удосконалення, розвиток обчислювальної техніки та більшу пристосованість до розрахунків, він за своєю суттю має проблеми єдиності, аналітичності і простоти розв'язків. Особливо це проявляється при керуванні положенням і орієнтацією захвата промислового робота, коли необхідність операції з об'єктом породжує потребу в швидкому розв'язку оберненої задачі кінематики. Встановлено, що перевагу має рішення оберненої задачі кінематики у явному аналітичному вигляді. На сьогодні при проєктуванні більшості промислових роботів задовольняється одна з двох достатніх умов: осі трьох суміжних зчленувань перетинаються в одній точці або паралельні між собою. Однак побудова та подальше застосування матриць у однорідних координатах маніпулятора у більшості алгоритмів зводиться до задачі обернених перетворень в ейлерових координатах. Таким чином, не розв'язана проблема єдиності та аналітичності і простоти розв'язків знову стає актуальною, особливо для інтелектуальних захватів [1].

1. Аналіз останніх робіт

Пошуку ефективних діючих моделей кінематики присвячена робота [5], в якій представлено результати моделювання руху руки гуманоїдного робота в середовищі Matlab та реалізовані структурні складові моделі для розв'язку прямої і оберненої задач кінематики, а також генератор траєкторії і блок опису динаміки. Для рішення оберненої задачі кінематики та динаміки і визначення констант синтезу PID-регулятора (P-proportional, I-integral, D-derivative) використовується метод Matlab fmincon. Як засвідчують автори, під час роботи з даною моделлю не виникало труднощів і проблем, що зазвичай спостерігається при обчисленнях. Автори стверджують, що такий результат забезпечив коригуючий алгоритм. Представлена модель, за даними статті, демонструє придатність керування фізичною моделлю гуманоїдної руки в інтерактивному режимі. Однак рецептивний виклад статті не дає відповіді на питання про зміст припущень при формуванні опису та операцій, якими представляється модель. Крім того, не вказано, якою вона є: аналітичною, неперервною чи дискретною, також невідомим для споживача лишаються питання її достовірності, точності, глибини, суттєвості, як і у всіх моделей, що останнім часом будуються у середовищі Matlab. Особливо слід відзначити, що схильність авторів до рецептивного викладу результатів не сприятиме подальшому розвитку і впровадженню іншими дослідниками їх результатів.

Ще одним прикладом пошуку розв'язку оберненої задачі, що бажано виокремити серед переліку статей, є робота [6], автори якої представили результати порівняльного аналізу чотирьох методів розв'язку оберненої задачі з точки зору продуктивності та стабільності. Псевдоінверсний метод та транспонування за Якобі, метод найменших квадратів як метод оптимізації є предметом дослідження кінематичного моделювання руки антропоморфного робота у середовищі Matlab. У результаті моделювання набув перевагу метод оптимізації як метод поступового наближення. У ході дослідження теж використовуються чисельні методи і середовище Matlab, що потребує великого обсягу пам'яті для установки та суттєво обмежує застосування цієї моделі. Таким чином, для мобільних роботів пошук прямих аналітичних методів розв'язку обернених задач лишається актуальною і нерозв'язаною задачею.

У роботі [2] представлена постановка оберненої задачі кінематики та спроба побудови аналітичних розв'язків. Однак застосовуваний матричний підхід ґрунтується на рівняннях системи, отриманих за умов рівності відповідних елементів. Останнє і є однією із причин, чому ці рівняння системи однорідні, а розв'язок не є єдиним. У роботі [3] запропоновано проєктувати кінематичні схеми за умов рівності ступенів рухливості кількості невідомих. Однак таке рішення не забезпечило єдиності розв'язку.

У [4] досліджено розв'язок оберненої задачі прямими геометричними методами і методами нелінійного математичного програмування. При отриманні результатів використовувались чисельні розв'язки без аналітичних рішень як результат застосування ідей, що дозволили отримати в системі неоднорідні рівняння. Останні успіхи у застосуванні платформних механізмів Гауфа–Стюарта з паралельною кінематикою, таких як триподи, гексаподи у робототехнічних системах 3D-друку, знову стимулювали пошук розв'язку оберненої задачі кінематики шляхом віртуальних поворотів [7]. Запропонований підхід дозволив побудувати аналітичні вирази узагальнених координат, однак вони обмежені діапазонами параметрів, оскільки містять ділення на косинуси, що приймають нульові значення.

У роботі [8] досліджено метод обернених перетворень, що дозволило отримувати аналітичні розв'язки та відкрило нові умови для побудови таких рішень, але не забезпечило умов для їх єдиності. В [9] теж демонструються привабливі переваги аналітичних рішень для простої робототехнічної системи з двома ступенями рухливості. Поширення цих результатів на роботи з шістьма ступенями рухливості лишається актуальним, але проблематичним.

Останні досягнення у сумісній реалізації технологій контролю стану мобільних робототехнічних систем керування на основі виносних баз даних Інтернету речей [10] тільки підтверджують гостру необхідність в аналітичних виразах розв'язку обернених задач кінематики та динаміки. Успішне поширення мережі 5G та пристроїв Wi-Fi, що застосовуються у технологіях охорони здоров'я, все більше розширює інноваційні можливості мініатюрних одноплатних комп'ютерів з обмеженими можливостями пам'яті. Таким чином, сучасний розвиток засад технології очутливлення робототехнічних систем [11], що демонструється вченими, потребує експрес-обчислень. Остання разом із реалізацією можливостей мережі 5G та пристроїв Wi-Fi для скорочення часу адаптації захвату та інших рухів і дій стане придатною для реалізації в комп'ютеризованих системах, які базуються на одноплатних мінікомп'ютерах з Wi-Fi-каналами зв'язку. Зовнішнє мобільне безпровідне керування через застосунки на базі андроїдних процесорів все більше загострює потребу в аналітичних єдиних розв'язках обернених задач, у тому числі і задачі кінематики.

2. Мета та задачі дослідження

За мету дослідження поставлено побудувати єдиний аналітичний розв'язок, придатний для реалізації швидких експрес-обчислень засобами одноплатних комп'ютерів.

Для досягнення поставленої мети сформульовано такі задачі:

- звести обернену задачу кінематики до системи неоднорідних рівнянь, кількість яких дорівнює числу невідомих;
- встановити властивості змінних задачі, що є джерелом утворення неоднорідних рівнянь;
- отримати розв'язок, що не містить ділення на малі величини синусів шуканих кутів та придатний для експрес-обчислень.

3. Постановка та розв'язок оберненої задачі кінематики

3.1. Постановка та зведення оберненої задачі кінематики до системи неоднорідних рівнянь, кількість яких дорівнює числу невідомих. Розглянуто узагальнений маніпулятор, що утворено із обертальних і поступальних ланок. Також зазначено, що кожна кінематична пара забезпечує тільки одну ступінь рухливості. Кількість ступенів рухливості у маніпулятора — шість. Кожна окрема ланка з'єднується шарнірами не більше як із двома іншими ланками. За цих умов записано вихідну задачу загальновідомої матриці T в однорідних координатах:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Верхня лівокутова 3×3-підматриця, яка представляється як добуток матриць повороту на кути φ, θ, ψ, що загальновідомо [2, 3], представлена після перемножень:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{z,\varphi} R_{u,\theta} R_{w,\psi} = \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi; & -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi; & S\varphi S\theta \\ S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi; & -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi; & -C\varphi S\theta \\ S\theta S\psi; & S\theta C\psi; & C\theta \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

де для скорочення довжини запису введено позначення: $C\varphi = \cos\varphi$; $S\varphi = \sin\varphi$; $C\theta = \cos\theta$; $S\theta = \sin\theta$; $C\psi = \cos\psi$; $S\psi = \sin\psi$. Після перемноження матриць зведемо їх матрицю-добуток попарним порівнянням елементів матриць до системи рівнянь:

$$\begin{cases} n_x = C\varphi C\psi - S\varphi C\theta S\psi; \\ n_y = S\varphi C\psi + C\varphi C\theta S\psi; \\ n_z = S\theta S\psi; \\ s_x = -C\varphi S\psi - S\varphi C\theta C\psi; \\ s_y = -S\varphi S\psi + C\varphi C\theta C\psi; \\ s_z = S\theta C\psi; \\ a_x = S\varphi S\theta; \\ a_y = -C\varphi S\theta; \\ a_z = C\theta. \end{cases} \qquad (2)$$

ISSN 2786-6491

Система (2) містить дев’ять однорідних рівнянь та три невідомих. Традиційно, як, наприклад, у [7] та інших роботах, які присвячено розв’язку оберненої задачі кінематики, формується прямий розв’язок. Із-за надмірної кількості рівнянь розв’язок системи методом вилучення не може бути єдиним. Для усунення помилки, що виникає, зведемо систему до трьох неоднорідних рівнянь з трьома невідомими. Для цього розділимо рівняння на три групи по три рівняння для кожного з векторів *n, s, a*. Просте вилучення добутку трьох шуканих змінних φ, θ, ψ з одночасним сумуванням рівнянь у групі утворює нову систему. Остання має три рівняння, утворення кожного з яких ґрунтується на трьох компонентах кожного із трьох векторів, що задають однозначно орієнтацію захвата у просторі і надають єдине рішення:

$$\begin{cases} C\varphi n_x + S\varphi n_y + n_z = C\psi + S\theta S\psi; \\ C\varphi s_x + S\varphi s_y + s_z = -S\psi + S\theta C\psi; \\ a_x + a_y + a_z = S\varphi S\theta - C\varphi S\theta + C\theta. \end{cases} \tag{3}$$

Спростимо систему (3) методом виключення $C\varphi$ для першого та другого рівнянь:

$$S\varphi\left(\frac{n_y}{n_x} - \frac{s_y}{s_x}\right) + \left(\frac{n_z}{n_x} - \frac{s_z}{s_x}\right) = C\psi\left(\frac{1}{n_x} - \frac{S\theta}{s_x}\right) + S\psi\left(\frac{S\theta}{n_x} + \frac{1}{s_x}\right).$$

Аналогічно виключимо $C\varphi$ також із другого та третього рівнянь системи (3), а систему в цілому запишемо так:

$$\begin{cases} S\varphi\left(\frac{n_y}{n_x} - \frac{s_y}{s_x}\right) + \left(\frac{n_z}{n_x} - \frac{s_z}{s_x}\right) = C\psi\left(\frac{1}{n_x} - \frac{S\theta}{s_x}\right) + S\psi\left(\frac{S\theta}{n_x} + \frac{1}{s_x}\right), \\ S\varphi\left(\frac{s_y}{s_x} + 1\right) + \frac{s_z}{s_x} - \frac{a_x + a_y + a_z - C\theta}{S\theta} = -\frac{S\psi}{s_x} + \frac{S\theta C\psi}{s_x}. \end{cases} \tag{4}$$

Далі враховуємо, що косинуси $C\theta$ та $C\psi$ визначаються з проєкції векторів a_z та s_z відповідно до кінематичної матриці та існує зв’язок синуса і косинуса для будь-якого кута, що встановлено одиничним колом:

$$C\theta = a_z;\, S\theta = \sqrt{1 - a_z^2};\, C\psi = \frac{s_z}{S\theta} = \frac{s_z}{\sqrt{1 - a_z^2}}. \tag{5}$$

Рівняння системи (4) після простих алгебраїчних та тригонометричних перетворень (5) дає таке:

$$\begin{cases} S\varphi\left(\frac{n_y}{n_x} - \frac{s_y}{s_x}\right) + \left(\frac{n_z}{n_x} - \frac{s_z}{s_x}\right) = C\psi\left(\frac{1}{n_x} - \frac{S\theta}{s_x}\right) + S\psi\left(\frac{\sqrt{1 - a_z^2}}{n_x} + \frac{1}{s_x}\right), \\ S\varphi\left(\frac{s_y}{s_x} + 1\right) + \frac{s_z}{s_x} - \frac{a_x + a_y}{\sqrt{1 - a_z^2}} = -\frac{S\psi}{s_x} + \frac{s_z}{s_x}. \end{cases}$$

Далі також після нескладних перетворень вилучимо $C\psi$

$$\begin{cases} S\varphi\left(\dfrac{n_y}{n_x}-\dfrac{s_y}{s_x}\right)+\left(\dfrac{n_z}{n_x}-\dfrac{s_z}{s_x}\right)=\dfrac{s_z}{\sqrt{1-a_z^2}}\left(\dfrac{1}{n_x}-\dfrac{S\theta}{s_x}\right)+S\psi\left(\dfrac{\sqrt{1-a_z^2}}{n_x}+\dfrac{1}{s_x}\right), \\ S\varphi\left(\dfrac{s_y}{s_x}+1\right)-\dfrac{a_x+a_y}{\sqrt{1-a_z^2}}=-\dfrac{S\psi}{s_x} \end{cases}$$

та знайдемо

$$S\psi=\left\{\left[\left(\frac{n_z}{n_x}-\frac{s_z}{s_x}\right)-\frac{s_z}{\sqrt{1-a_z^2}}\left(\frac{1}{n_x}-\frac{S\theta}{s_x}\right)\right]\left(\frac{s_y}{s_x}+1\right)+\left[\frac{a_x+a_y}{\sqrt{1-a_z^2}}\right]\left(\frac{n_y}{n_x}-\frac{s_y}{s_x}\right)\right\}/$$

$$/\left\{\left(\frac{\sqrt{1-a_z^2}}{n_x}+\frac{1}{s_x}\right)\left(\frac{s_y}{s_x}+1\right)+\frac{1}{s_x}\left(\frac{n_y}{n_x}-\frac{s_y}{s_x}\right)\right\}, \tag{6}$$

що дозволяє виразити

$$S\varphi=\frac{s_x}{s_x+s_y}\frac{a_x+a_y}{\sqrt{1-a_z^2}}-\frac{S\psi}{s_x+s_y} \tag{7}$$

та

$$S\theta=\sqrt{1-a_z^2}\,. \tag{8}$$

Отримані вирази розв’язку оберненої задачі кінематики представлено через дев’ять компонент трьох векторів, що задають орієнтацію захвату або іншого робочого органу у просторі залежно від призначення робота.

3.2. Властивості змінних задачі, що є джерелом утворення неоднорідних рівнянь. Розглянуто рівняння системи (2). Перші три представляють компоненти першого вектора орієнтації *n* у просторі 3×3-підматриці верхнього лівого кута матриці *T*. Четверте, п’яте та шосте — другого вектора *s*. Сьоме, восьме та дев’яте — третього вектора орієнтації *a*. Однак ці три одиничні вектори із-за своїх властивостей та орієнтації мають додаткові властивості, які визначає система (2), але які не так очевидні і вимагають доведення.

Теорема. *Сума квадратів одноіменних проєкцій векторів орієнтації n, s, a є незмінною і дорівнює одиниці.*

Доведення. Здійснимо доведення безпосереднім перетворенням. Зведемо до квадрату кожне із рівнянь системи (2). Перегрупуємо квадрати одноіменних проєкцій векторів орієнтації по три для утворених трьох груп:

$$\begin{cases} n_x^2=C^2\varphi C^2\psi-2C\varphi C\psi S\varphi C\theta S\psi+S^2\varphi C^2\theta S^2\psi; \\ s_x^2=C^2\varphi S^2\psi+2C\varphi S\psi S\varphi C\theta C\psi+S^2\varphi C^2\theta C^2\psi; \\ a_x^2=S^2\varphi S^2\theta; \\ n_y^2=S^2\varphi C^2\psi+2S\varphi C\psi C\varphi C\theta S\psi+C^2\varphi C^2\theta S^2\psi; \\ s_y^2=S^2\varphi S^2\psi-2S\varphi S\psi C\varphi C\theta C\psi+C^2\varphi C^2\theta C^2\psi; \\ a_y^2=C^2\varphi S^2\theta; \\ n_z^2=S^2\theta S^2\psi; \\ s_z^2=S^2\theta C^2\psi; \\ a_z^2=C^2\theta. \end{cases} \tag{9}$$

 ISSN 2786-6491

Внаслідок цих перетворень і безпосереднього сумування лівих та правих частин запишемо

$$n_x^2 + s_x^2 + a_x^2 = C^2\varphi(C^2\psi + S^2\psi) + S^2\varphi C^2\theta(S^2\psi + C^2\psi) + S^2\varphi S^2\theta;$$

$$n_y^2 + s_y^2 + a_y^2 = S^2\varphi(C^2\psi + S^2\psi) + C^2\varphi C^2\theta(S^2\psi + C^2\psi) + C^2\varphi S^2\theta;$$

$$n_z^2 + s_z^2 + a_z^2 = S^2\theta(S^2\psi + C^2\psi) + C^2\theta.$$

З урахуванням властивості суми квадратів синуса та косинуса довільного кута отримаємо

$$\left.\begin{aligned} n_x^2 + s_x^2 + a_x^2 = 1;\\ n_y^2 + s_y^2 + a_y^2 = 1;\\ n_z^2 + s_z^2 + a_z^2 = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Таким чином, останні рівняння доводять, що сума квадратів одноіменних проєкцій векторів орієнтації *n*, *s*, *a* є незмінною і дорівнює одиниці. Така властивість є корисною для перетворень систем рівнянь кінематики та динаміки.

3.3. Розв'язок оберненої задачі кінематики, що не містить ділення на малі величини синусів шуканих кутів та придатний для експрес-обчислень. При пошуках стабільного та єдиного розв'язку оберненої задачі кінематики розглянуто підхід, відомий як метод оберненої матриці [3]. Переглянуто послідовність етапів цього підходу, що полягає у домноженні представлених 3×3-підматриць векторів орієнтації через добуток трьох матриць поворотів (1) на обернену матрицю $R_{z,\varphi}^{-1}$. Однак оскільки операція скалярного добутку некомутативна, а для утворення одиничної матриці із добутку необхідно ставити першим множником обернену $R_{z,\varphi}^{-1}$, то домножити матричне рівняння треба тільки зліва. Таким чином, визначення, зліва чи справа треба домножити обидві частини матричного рівняння на обернену матрицю, обґрунтовано має однозначну відповідь — зліва. Порядок множників визначається бажаним результатом та некомутативністю матричного добутку. Повернемось до рівняння (1) та домножимо його першим множником і поставимо, як із лівої, так і правої частини рівняння, першим множником обернену матрицю $R_{z,\varphi}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\varphi & S\varphi & 0 \\ -S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\varphi & -S\varphi & 0 \\ S\varphi & C\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta \\ 0 & S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ S\psi & C\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Після перемножень матриць у (11) запишемо:

$$\begin{bmatrix} C\varphi n_x + S\varphi n_y & C\varphi s_x + S\varphi s_y & C\varphi a_x + S\varphi a_y \\ -S\varphi n_x + C\varphi n_y & -S\varphi s_x + C\varphi s_y & -S\varphi a_x + C\varphi a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\psi & -S\psi & 0 \\ C\theta S\psi & C\theta C\psi & -S\theta \\ S\theta S\psi & S\theta C\psi & C\theta \end{bmatrix}.$$

Аналіз матричного рівняння показує, що для забезпечення рівності матриць обов'язково повинна виконуватись умова рівності дев'яти одноіменних їх елементів, тобто система дев'яти рівнянь:

$$\begin{cases} C\varphi n_x + S\varphi n_y = C\psi; \\ C\varphi s_x + S\varphi s_y = -S\psi; \\ C\varphi a_x + S\varphi a_y = 0; \\ -S\varphi n_x + C\varphi n_y = C\theta S\psi; \\ -S\varphi s_x + C\varphi s_y = C\theta C\psi; \\ -S\varphi a_x + C\varphi a_y = -S\theta; \\ n_z = S\theta S\psi; \\ s_z = S\theta C\psi; \\ a_z = C\theta. \end{cases}$$

Проаналізовано отримані структуру та склад рівнянь системи. Система містить три невідомих вектори $\bar{a}, \bar{s}, \bar{n}$, кожен з яких має по три компоненти за напрямом трьох осей, а також три кути φ, θ, ψ , і тому вона повинна бути доповнена ще трьома незалежними рівняннями або перегрупована у три рівняння з трьома невідомими і хоча б з одним із них неоднорідним. Крім того, всі дев'ять рівнянь цієї системи є однорідні. Таким чином, система повинна бути доповнена трьома рівняннями, мінімум, одне з яких повинно бути неоднорідним. Таким рівнянням оберемо, по-перше, закон зв'язку між синусом та косинусом довільного кута, який до того ж є неоднорідним рівнянням

$$C^2\alpha + S^2\alpha = 1,$$

по-друге, доведені властивості (10), які тепер запропоновано як умову нормування для компонент вектора $\bar{n}$:

$$a_z^2 + s_z^2 + n_z^2 = 1.$$

Тепер система може містити до 12 незалежних рівнянь та три невідомих кути і шість компонент векторів орієнтації:

$$\begin{cases} C\varphi n_x + S\varphi n_y = C\psi; \\ C\varphi s_x + S\varphi s_y = -S\psi; \\ C\varphi a_x + S\varphi a_y = 0; \\ -S\varphi n_x + C\varphi n_y = C\theta S\psi; \\ -S\varphi s_x + C\varphi s_y = C\theta C\psi; \\ -S\varphi a_x + C\varphi a_y = -S\theta; \\ n_z = S\theta S\psi; \\ s_z = S\theta C\psi; \\ a_z = C\theta; \\ C^2\psi + S^2\psi = 1; \\ a_i^2 + s_i^2 + n_i^2 = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Зазначимо, що у системі (12) десяте рівняння може записуватись для будь-якого із трьох кутів φ, θ, ψ, одинадцяте — для одноіменних компонент векторів $\bar{a}, \bar{s}, \bar{n}$.

Далі через однорідність та наявність у третьому рівнянні всього двох доданків з трьома невідомими представимо зв'язок між функціями синуса та косинуса кута φ, величину яких обмежують значення компонент вектора *a* таким чином:

$$C\varphi = -S\varphi \frac{a_y}{a_x}.$$

Ця умова застосовується як підстановка для приведення першого та другого рівнянь до такої форми:

$$\begin{cases} S\varphi\left(n_y - \dfrac{a_y n_x}{a_x}\right) = C\psi; \\ S\varphi\left(s_y - \dfrac{a_y s_x}{a_x}\right) = -S\psi \cdot \end{cases}$$

Останні зведемо до квадрату, а результат перетворення першого додано до перетворення другого:

$$S^2\varphi\left[\left(n_y - \frac{a_y n_x}{a_x}\right)^2 + \left(s_y - \frac{a_y s_x}{a_x}\right)^2\right] = C^2\psi + S^2\psi.$$

Такий алгоритм реалізує ідею виключення із рівняння тригонометричних функцій від значення кута ψ як невідомої величини та дозволяє безпосередньо знаходити синус навіть при малих кутах φ, виключаючи операцію ділення на малі величини. Також скориставшись властивістю суми квадратів синуса та косинуса довільного кута, знайдемо:

$$S\varphi = \left[\left(n_y - \frac{a_y n_x}{a_x}\right)^2 + \left(s_y - \frac{a_y s_x}{a_x}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (13)$$

Розглянуто п'яте та шосте рівняння. Після підстановки зв'язку між синусом та косинусом кута φ, що визначено третім рівнянням, а також після множення на синус кута θ та нескладних алгебраїчних перетворень з урахуванням рівності лівих частин запишемо:

$$\frac{C^2\theta - 1}{a_x + a_y \dfrac{a_y}{a_x}} = C\theta s_z \frac{1}{s_x + s_y \dfrac{a_y}{a_x}},$$

що зводиться до квадратичного рівняння:

$$C^2\theta - C\theta \frac{s_z (a_x^2 + a_y^2)}{(s_x a_x + s_y a_y)} - 1 = 0,$$

розв'язком якого буде

$$C\theta = \frac{s_z}{2} \frac{(a_x^2 + a_y^2)}{(s_x a_x + s_y a_y)} \pm \sqrt{\frac{S_z^2 (a_x^2 + a_y^2)^2}{4(s_x a_x + s_y a_y)^2} + 1}.$$

Два значення косинуса кута θ, позитивне та від'ємне, обмежені фізичним напрямом подальшого руху як під прямим, так і зворотним тупим кутом. У зв'язку з зазначеним розглянемо тільки позитивне значення косинуса, тобто співнапрямлений рух або гострий кут θ.

Рішення відкинути знак «мінус» не є однозначно очевидним для загального випадку. Тому застосуємо інші перетворення для визначення косинуса кута θ. Підставляючи замість косинуса з дев'ятого рівняння системи через відому проєкцію на вісь *Z*, спростимо квадратне рівняння:

$$C\theta \frac{a_z(s_x a_x + s_y a_y) - s_z(a_x^2 + a_y^2)}{(s_x a_x + s_y a_y)} = 1,$$

що дозволяє однозначно визначити косинус кута θ через відомі вектори орієнтації:

$$C\theta = \frac{(s_x a_x + s_y a_y)}{a_z(s_x a_x + s_y a_y) - s_z(a_x^2 + a_y^2)}. \tag{14}$$

Тепер із п'ятого рівняння з урахуванням рівнянь три та дев'ять після нескладних алгебраїчних перетворень запишемо:

$$S\psi = -\frac{S\varphi(n_x a_x + n_y a_y)}{a_x C\theta} = -\frac{S\varphi(n_x a_x + n_y a_y)}{a_x a_z}. \tag{15}$$

Подальший розгляд рівнянь системи показує, що при розв'язку використовувались всі дев'ять однорідних рівнянь початкової системи, яку було доповнено двома неоднорідними рівняннями типу десятого (12) для кутів ψ та θ. Застосування двох неоднорідних рівнянь, тобто властивостей, що доведено теоремою, і забезпечило єдиність розв'язку оберненої задачі кінематики без припущень.

4. Результати моделювання, їх обговорення і перспективи подальших досліджень

Розв'язки оберненої задачі кінематики, що не містять ділення на малі величини шуканих кутів та придатні для експрес-обчислень у вигляді (6)–(8) та (13)–(15), не є ідентичними за формою. У зв'язку з цим для порівняння проведемо моделювання і визначимо їх відповідність. Для моделювання обрано набори векторів орієнтації *n*, *s*, *a*, що перекривають діапазони фактичних змін, які притаманні для обернених задач кінематики. Перелік даних, використаних для розрахунків, подано у табл. 1 (набір значень компонент векторів, використаних для моделювання).

Таблиця 1

№	n_x	n_y	n_z	s_x	s_y	s_z	a_x	a_y	a_z
1	1	0	0	0	–1	8,27E–05	0	–8,3E–05	–1
2	1	3,16E–06	0,000332	–3,2E–06	–0,99982	0,019033	0,000332	–0,01903	–0,99982
3	0,999999	2,32E–05	0,001272	–2,3E–05	–0,99934	0,036451	0,001272	–0,03645	–0,99933
4	0,999996	7,59E–05	0,002819	–7,6E–05	–0,99855	0,053826	0,002819	–0,05383	–0,99855
5	0,999988	0,000177	0,004972	–0,00018	–0,99747	0,071136	0,004972	–0,07114	–0,99745
6	0,99997	0,000342	0,007727	–0,00034	–0,99609	0,088361	0,007727	–0,08836	–0,99606
7	0,999938	0,000586	0,011081	–0,00059	–0,99442	0,105479	0,011081	–0,10548	–0,99436
8	0,999887	0,000924	0,01503	–0,00092	–0,99247	0,12247	0,01503	–0,12247	–0,99236
9	0,999808	0,00137	0,019569	–0,00137	–0,99025	0,139312	0,019569	–0,13931	–0,99006
10	0,999693	0,001938	0,024693	–0,00194	–0,98776	0,155986	0,024693	–0,15599	–0,98745
11	0,999534	0,002642	0,030396	–0,00264	–0,98501	0,172471	0,030396	–0,17247	–0,98455

Для моделювання і перевірки правильності та єдиності розв'язків взято набір значень векторів n, s, a. Значення кутів θ, φ, ψ, що є результатом набору поворотів, взято за еталони, а їх величини, які отримано як розв'язок, порівняно з еталонами. Результат порівняння у відносних величинах представлено у табл. 2 (аналіз відносної похибки розв'язків оберненої задачі динаміки). В табл. 2 нижніми індексами p при величині кожного з кутів позначено величини, визначені за аналітичними розв'язками за виразами (13)–(15). Відносна похибка для кожного із кутів позначена ε з відповідним індексом, який вказує на кут.

Таблиця 2

№	θ	θ_p	ε_θ ,	φ	φ_p	ε_φ	ψ	ψ_p	ε_ψ
1	3,14151	3,14151	–3,548E–13	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
2	3,122556	3,122556	1,13776E–15	0,017444	0,017444	1,99E–16	0,017444	0,017444	1,99E–16
3	3,105111	3,105111	–5,7208E–16	0,034889	0,034889	–2E–16	0,034889	0,034889	0
4	3,087667	3,087667	1,43827E–16	0,052333	0,052333	1,33E–16	0,052333	0,052333	1,33E–16
5	3,070222	3,070222	0	0,069778	0,069778	3,98E–16	0,069778	0,069778	5,97E–16
6	3,052778	3,052778	–2,9094E–16	0,087222	0,087222	0	0,087222	0,087222	0
7	3,035333	3,035333	5,85226E–16	0,104667	0,104667	–1,3E–16	0,104667	0,104667	–1,3E–16
8	3,017889	3,017889	2,94305E–16	0,122111	0,122111	0	0,122111	0,122111	–1,1E–16
9	3,000444	3,000444	2,96016E–16	0,139556	0,139556	–2E–16	0,139556	0,139556	–2E–16
10	2,983	2,983	–1,4887E–16	0,157	0,157	0	0,157	0,157	3,54E–16
11	2,965556	2,965556	1,49749E–16	0,174444	0,174444	1,59E–16	0,174444	0,174444	3,18E–16

Для моделювання використано такі вихідні твердження про повороти векторів n, s, a.

- Поворот вектора n навколо осі OY на кут $\Delta\varphi$. Вектор a також повернеться на кут $\Delta\varphi$.
- Поворот вектора n навколо осі OZ на кут $\Delta\psi$. Вектор s також повернеться на кут $\Delta\psi$.
- Поворот вектора n, а також жорстко зв'язаних векторів s та a навколо осі OX на кут $\Delta\theta$. Вектори s та a повернуться на кут $\Delta\theta$.

Як показує аналіз даних (табл. 2), відносна похибка є величиною 13–16 порядку малості. Останнє тільки підтверджує те, що причиною неєдиності була спроба розв'язувати систему дев'яти рівнянь з трьома невідомими прямими методами. Коректне зведення системи до канонічного виду: до трьох рівнянь з трьома невідомими, дає єдине рішення. Отримані рішення, які є аналітичними, використовуються при побудові аналітичних моделей синтезу керуючих впливів для багатоланкового маніпулятора. Самі вирази рішень для кутів прості за формою та придатні для експрес-обчислень. Подальше застосування таких рішень для розв'язку задач динаміки маніпуляторів або інших елементів робототехнічних систем відкриває можливості побудови аналітичних моделей динаміки та дозволяє досліджувати і проєктувати їх ефективними аналітичними методами дослідження операцій. Аналітичність та простота моделей, що побудовані на базі аналітичного розв'язку оберненої задачі кінематики, спростить зовнішнє безпровідне керування через застосунки на базі андроїдних смартфонів, де все більше виникає потреба в аналітичних єдиних розв'язках обернених задач, у тому числі і задачі кінематики.

Висновок

Обернена задача кінематики, що утворена порівнянням відповідних елементів підматриці T у проєкційному просторі матриць, зводиться до системи неоднорідних рівнянь, кількість яких дорівнює числу невідомих, шляхом алгебраїчно-тригонометричних перетворень.

Модулі векторів для опису положення центру мас захвата є нормованими для їх квадратів, а їх норма відповідає сумі квадратів одноіменних проєкцій. Такі доведені властивості змінних задачі є джерелом утворення неоднорідних рівнянь та зведення системи дев'яти рівнянь до системи трьох рівнянь.

Отримано розв'язок, що відповідає еталонним умовам, не містить ділення на малі величини синусів шуканих кутів та є придатним для аналітичних моделей і експрес-обчислень, особливо для робототехнічних систем зовнішнього безпровідного керування через програмні застосунки на базі андроїдних смартфонів.

A. Trunov

FORMATION OF THE METHOD OF ANALYTICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE KINEMATICS OF MANIPULATORS OF AN INDUSTRIAL ROBOT

Alexandr Trunov

Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv,

trunovalexandr@gmail.com

The work is conditioned by the need for analytical expressions, which are solutions of the inverse problem of kinematics for the synthesis of the control influence, at a given position of the grip of the manipulator and satisfy the condition of unity. The work presents an analysis of the problem and the reasons that made such a solution difficult. It is shown that the construction based on the condition of equality of sub-matrices, which represent the position of the link in the projective space, is a system of nine equations with three unknowns. An excessive number of equations and their solution by direct analytical methods is the reason for its non-uniformity. The properties of the vectors, which always set the position of the gripper, have been proved, which allows for the simplification of systems of equations. It is proposed to transform the system due to the grouping of equations, using the established properties of the gripper position vectors. Such transformations reduce the system of nine equations to a system of three equations with three unknowns and obtain a single solution of the inverse problem of manipulator kinematics. The simulation of the conditions of analytical determination of the gripper position by the direct method was carried out and a comparison with the results obtained by analytical solutions shows that the relative error lies within the range from 10^{-16} to 10^{-13}. The use of such expressions allows you to determine quickly the angles of rotation, which in turn allows you to describe analytically the kinematics and dynamics of the manipulator links.

Keywords: inverse problem of kinematics, unity, grip of the manipulator, orientation vector, one-name projections, properties, analytical solution.

REFERENCES

1. Kondratenko Y., Atamanyuk I., Sidenko I., Kondratenko G., Sichevskyi S. Machine learning techniques for increasing efficiency of the robot's sensor and control information processing. *Sensors*. 2022. 22(3). 1062. 31 p. https://doi.org/10.3390/s22031062
2. Шахинпур М. Курс робототехники. М. : Мир, 1990. 527 с.
3. Цвіркун Л.І., Грулер Г. Робототехніка та мехатроніка: навч. посіб. Під заг. ред. Л.І. Цвіркуна; 3-є вид., перероб. і доповн. Дніпро : НГУ, 2017. 224 с.
4. Механика промышленных роботов. В 3 кн./Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева. Кн. 1. Кинематика и динамика / Е.И. Воробьев, С.А. Попов, Г.И. Шевелева. М. : Высш. шк., 1988. 304 с.
5. Virgala I., Kelemen M., Varga M., Kurylo P. Analyzing, modeling and simulation of humanoid robot hand motion. *Modelling of Mechanical and Mechatronic Systems MMaMS 2014. Procedia Engineering 96*. 2014. P. 489–499 (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/).
6. Varga M., Filakovský F., Virgala I. Simulation and analyzes of inverse-kinematic model of humanoid robot hand. *Технічні науки та технології*. 2019. **17**, N 3. P. 117–122. DOI: 10.25140/2411-5363-2019-3(17)-117-122
7. Хомченко В.Г. Метод виртуальных поворотов в решении обратной задачи кинематики платформенного типа. *Омский научный вестник*. 2015. № 2 (140). С. 41–44.
8. Електромеханічні системи автоматизації та електропривод. Упоряд. В.М. Озерський. Харків : УІПА, 2010. 51 с.
9. Андрющенко О.А. Прямі та зворотні задачі механіки в автоматизованому електроприводі. Одес. нац. політехн. ун-т : *Праці Одеського політехнічного університету*. 2013. Вип. 1(40). С. 208.
10. Kondratenko Y., Gerasin O., Kozlov O., Topalov A., Kilimanov B. Inspection mobile robot's control system with remote iot-based data transmission. *Journal of Mobile Multimedia*. 2021. **17**(4). P. 499–526.
11. Trounov A.N. Application of sensory modules for adaptive robot. *Proc. 3rd Int. Conf. on Robot Vision and Sensory Control*. 9-11 Oct., London. 1984. P. 284–294.

Отримано 05.01.2023