УДК 62.501.52

Л.Т. Мовчан

ВИЗНАЧЕННЯ ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ В ПЛОЩИНІ ПАРАМЕТРІВ ТА ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ МЕТОДОМ *D*-РОЗБИТТЯ

Мовчан Леонід Тимофійович

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя,
orcid id: 0000-0002-4192-5267,

movchan.t.leonid@gmail.com

Розглянуто питання побудови межі області стійкості (МОС) неперервних лінійних систем автоматичного керування (САК) у площині параметрів коефіцієнтів характеристичного рівняння та показників якості перехідного процесу (ступеня стійкості η та ступеня коливності μ) методом *D*-розбиття. Представлено конкретні вирази коефіцієнтів зміщених характеристичних рівнянь для ступеня стійкості η та ступеня коливності μ. Показано, що показники якості нелінійно входять у коефіцієнти зміщених рівнянь, тому побудова МОС класичним методом *D*-розбиття є проблемою. Розглянуто приклад побудови МОС у площині параметра системи та ступеня стійкості η. МОС отримано за допомогою раніше запропонованої методики побудови області стійкості в площині двох параметрів, один з яких нелінійно входить у рівняння системи. При цьому виключаються побудова всієї кривої *D*-розбиття та особливих прямих і використання штриховки по Неймарку, а також забезпечується машинна реалізація МОС. Отримане сімейство МОС у площині параметра та при різних значеннях іншого параметра коефіцієнтів зміщеного характеристичного рівняння дозволяє оцінити, а для значень параметрів на сімействі МОС визначити ступінь стійкості η.

Ключові слова: *D*-розбиття, межа області стійкості в просторі параметрів, рівняння межі *D*-розбиття в площині параметрів, показники якості перехідного процесу.

Вступ

При дослідженні реальних САК недостатньо розв'язати задачу визначення стійкості лінійної неперервної системи при фіксованих параметрах. Важливо побудувати МОС у просторі параметрів, вплив яких на стійкість досліджується.

Відомі універсальні числові методи побудови області стійкості (ОС) лінійних неперервних систем шляхом перебору точок у просторі параметрів з використанням ЕОМ неекономічні з точки зору машинної реалізації при підвищеній точності визначення МОС і не завжди гарантують коректність результату.

У загальному випадку визначення ОС лінійних САК здійснюють методом *D*-розбиття [1].

Всім значенням параметрів, що знаходяться в ОС, відповідає характеристичне рівняння системи, яке має всі корені з від'ємною дійсною частиною, тобто система є стійкою. Параметри, розміщені на МОС, відповідають характеристичному рівнянню, що має хоча б один корінь, який є на уявній осі комплексної площини коренів досліджуваної системи.

Стійкість САК є необхідною, але недостатньою умовою її практичної придатності. Важлива якість перехідних процесів системи, які характеризуються такими показниками, як час перехідного процесу, що характеризує швидкодію системи, коливність і перерегулювання, та іншими показниками, які визначаються прямим методом безпосередньо по кривій перехідного процесу.

Для наближеної оцінки якості перехідного процесу використовують непрямі методи дослідження лінійних систем. При цьому виділяють області в площині коренів характеристичного рівняння, в яких розміщують ці корені.

Критерієм непрямої оцінки характеру перехідного процесу є ступінь стійкості η — відстань від уявної осі до ближнього кореня характеристичного рівняння стійкої системи та ступінь коливності $\mu = \left| \omega / \eta \right|$ — абсолютна величина відношення уявної частини найближчого до осі кореня до дійсної його частини.

Важливими для практики є визначення значень параметрів, які відповідають необхідним показникам якості перехідного процесу, та одночасна оцінка межі зміни цих параметрів.

У роботах [2, 3] та інших представлено метод, який дозволяє для широкого класу САК визначити в площині параметрів ОС підобласті, час регулювання та коливність яких менші деяких заданих значень. На межі отриманих підобластей стійкості значення параметрів коефіцієнтів характеристичного рівняння відповідають граничним значенням показників якості перехідних процесів, але не розв'язано задачу визначення в середині підобласті відповідності між параметрами та показниками якості, які є меншими, ніж граничні значення показників межі підобластей.

Постановка задачі

У роботі розглянуто задачу побудови ОС у просторі параметрів характеристичного рівняння та показників якості перехідного процесу, що дозволяє визначити та оцінити значення параметрів САК, які відповідають заданим значенням ступеня стійкості та ступеня коливності.

Розв'язок поставленої задачі

Розглянемо характеристичне рівняння неперервної САК:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_k s^k + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0. \tag{1}$$

Щоб побудувати ОС у площині параметра системи та ступеня стійкості η, уявну вісь у комплексній площині коренів переміщуємо вліво на відстань η. Для цього в характеристичне рівняння (1) вводимо нову змінну $z = s + \eta\,(s = z - \eta)$. Тоді отримуємо зміщене характеристичне рівняння у такій формі:

$$D(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_k z^k + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0, \tag{2}$$

де [4]

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} = \left[\frac{\partial^{n-k} D(s)}{\partial S_{n-k}} \right]_{s=\eta}. \tag{3}$$

Використовуючи вираз (3), отримуємо конкретні вирази для визначення коефіцієнтів зміщеного характеристичного рівняння (2):

$$A_0 = \frac{1}{(n-0)!} \frac{n!}{0!} a_0 = a_0,$$

$$A_1 = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{n!}{1!} a_0 (-\eta) + \frac{(n-1)!}{0!} \right),$$

ISSN 2786-6491

$$A_2 = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{n!}{2!}a_0(-\eta)^2 + \frac{(n-1)!}{1!}a_1(-\eta) + \frac{(n-2)!}{0!}a_2\right),$$

....

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{n!}{k!}a_0(-\eta)^k + \frac{(n-1)!}{(k-1)!}a_1(-\eta)^{k-1} + \ldots + \frac{(n-k+2)!}{2!}a_{k-2}(-\eta)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-k+1)!}{1!}a_{k-1}(-\eta) + \frac{(n-k)!}{0!}a_k\right), \qquad (4)$$

....

$$A_{n-1} = \frac{1}{1!}(n \cdot a_0(-\eta)^{n-1} + (n-1)\,a_1(-\eta)^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}(-\eta) + a_{n-1}),$$

$$A_n = \frac{1}{0!}(a_0(-\eta)^n + a_1(-\eta)^{n-1} + a_2(-\eta)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(-\eta) + a_n).$$

Оскільки показник стійкості η входить у коефіцієнти зміщеного характеристичного рівняння нелінійно, побудувати ОС у площині параметра ν, який лінійно входить у коефіцієнти рівняння (2), та показника ступеня стійкості η класичним методом D-розбиття неможливо. Тому використаємо методику побудови ОС неперервних систем у площині двох параметрів, яка виключає визначення та побудову всієї кривої D-розбиття і особливих кривих, використання штриховки по Неймарку, а також забезпечує машинну реалізацію побудови МОС [5, 6].

На відміну від класичної задачі побудови ОС методом D-розбиття, у якій, щоб отримати точки кривої D-розбиття, ω змінюють від $-\infty$ до $+\infty$, будемо змінювати параметр η від попередньо заданого вибраного значення $\eta_{\min} = 0$ до $\eta_{\max}$ $(\eta_{\min} = 0 < \eta < \eta_{\max})$, яке має практичне значення.

Для кожного фіксованого значення ступеня стійкості η характеристичного рівняння для визначення МОС у площині одного параметра методом D-розбиття матиме вигляд

$$D(z) = L(z) + \nu H(z),$$

де ν — параметр, вплив якого на стійкість системи досліджується.

Тоді рівняння межі області D-розбиття описується формулою

$$D(j\omega) = L(j\omega) + \nu H(j\omega), \qquad (5)$$

де фіксований параметр η входить нелінійно в коефіцієнти поліномів $L(j\omega)$ та $H(j\omega)$.

Сукупність відрізків стійкості, отриманих з рівняння (5), для кожного значення $\eta_{\min} = 0 \le \eta \le \eta_{\max}$ визначають МОС у площині ν і η.

Таким чином, задача побудови МОС у площині параметра ν та ступеня стійкості η розв’язується шляхом визначення МОС у площині одного параметра ν. При цьому виключається побудова всієї кривої D-розбиття та особливих прямих. Крім того, у цій площині будуємо лінії одного рівня іншого вибраного параметра, що дозволить оцінити, а в багатьох випадках і визначити ступінь стійкості для різних значень параметрів коефіцієнтів характеристичного рівняння. Ступінь стійкості η однозначно визначає час перехідного процесу найбільш тривалої складової перехідного процесу всієї САК і є оцінкою тривалості перехідного процесу цієї системи.

Для побудови ОС у просторі параметра системи та ступеня коливності μ в характеристичне рівняння (1) вводять нову змінну $s = jze^{-j\varphi}$, де $\varphi = \operatorname{arctg}\mu = = \operatorname{arctg}|\beta/\alpha|_{\max}$, що відповідає повороту уявної осі в площині коренів характеристичного рівняння на кут $(\pi/2-\varphi)$.

Тоді отримуємо нове зміщене характеристичне рівняння [4]:

$$D(z) = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_k z^{n-k} + \ldots + B_{n-1} z + B_n = 0,$$

де $B_i = j^{n-i} e^{-j(n-i)\varphi} a_i$.

Коефіцієнти зміщеного рівняння можна представити через ступінь коливності у вигляді

$$B_i = \left(\cos\left((n-i)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right) + j\sin\left((n-i)\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right)\right)\cdot a_i =$$

$$= \left(\cos\left((n-i)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\mu\right)\right) + j\sin\left((n-i)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\mu\right)\right)\right)\cdot a_i.$$

Ступінь коливності входить нелінійно в коефіцієнти зміщеного характеристичного рівняння, тому для побудови МОС у площині параметра ν та ступеня коливності використовуємо той самий підхід, що й для попереднього випадку. Для кожного фіксованого $\mu_{\min} \le \mu \le \mu_{\max}$, які мають практичне значення, визначаємо відрізок ОС у площині параметра ν. Сукупність відрізків ОС для всіх заданих значень μ визначають МОС у площині ν і μ. У цій площині будуємо лінії одного рівня іншого досліджуваного параметра, які також є МОС для різних значень цього параметра в площині $[\mu, \nu]$, що дозволить оцінити, а в багатьох випадках визначити ступінь коливності для різних значень двох параметрів коефіцієнтів характеристичного рівняння досліджуваної системи.

Для ілюстрації практичного використання запропонованого підходу розглянемо побудову ОС у просторі параметра характеристичного рівняння та показника ступеня стійкості η на прикладі [1].

Розглядається лінійна неперервна, що містить послідовно з'єднані ланки першого порядку, які замкнені зворотним зв'язком. Характеристичне рівняння системи визначається виразом

$$(1+Ts)(1+5s)(1+10s)(1+30s)(1+100s)(50s^2+200s+1)+\nu = 0, \tag{6}$$

де T — постійна часу, ν — коефіцієнт підсилення в колі зворотного зв'язку.

Характеристичне рівняння (6) представимо у вигляді

$$D(s) = (a_0 s^7 + a_1 s^6 + a_2 s^5 + a_3 s^4 + a_4 s^3 + a_5 s^2 + a_6 s + a_7) + \nu = 0,$$

де

$$a_0 = 45\cdot 10^5 T,\ \ a_1 = (45+201{,}45T)10^5,\ \ a_2 = (201{,}45+89{,}06T)10^5,$$

$$a_3 = (89{,}06+9{,}55T)10^5,\ \ a_5 = (0{,}334+0{,}0034T)10^5,\ \ a_6 = 0{,}0034\cdot 10^5 + T,\ \ a_7 = 1.$$

Після введення нової змінної, $s = z - \eta$, отримуємо зміщене характеристичне рівняння

$$D(z) = (A_0 z^7 + A_1 z^6 + A_2 z^5 + A_3 z^4 + A_4 z^3 + A_5 z^2 + A_6 z + A_7) + \nu = 0, \tag{7}$$

де, враховуючи (4), коефіцієнти зміщеного рівняння (7) визначаються виразами

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = -7a_0\eta + a_1, \quad A_2 = 21a_0\eta^2 - 6a_1\eta + a_2,$$

$$A_3 = -35a_0\eta^3 + 15a_1\eta^2 - 5a_2\eta + a_3, \quad A_4 = 35a_0\eta^4 - 20a_1\eta^3 + 10a_2\eta^2 - 4a_3\eta + a_4,$$

$$A_5 = -21a_0\eta^5 + 15a_1\eta^4 - 10a_2\eta^3 + 6a_3\eta^2 - 3a_4\eta + a_5,$$

$$A_6 = 7a_0\eta^6 - 6a_1\eta^5 + 5a_2\eta^4 - 4a_3\eta^3 + 3a_4\eta^2 - 2a_5\eta + a_6,$$

$$A_7 = -a_0\eta^7 + a_1\eta^6 - a_2\eta^5 + a_3\eta^4 - a_4\eta^3 + a_5\eta^2 - a_6\eta + a_7.$$

Тоді рівняння межі стійкості області D-розбиття по одному параметру ν має вигляд

$$D(j\omega) = L(j\omega) + jH(j\omega) = 0,$$

звідки

$$v = (A_1\omega^6 - A_3\omega^4 + A_5\omega^2 - A_7) + j(A_0\omega^6 - A_2\omega^4 + A_4\omega^2 - A_6)\omega = U(\omega) + jV(\omega).$$

Для кожного фіксованого значення $\eta_{\min} = 0 \le \eta \le \eta_{\max}$ визначаємо інтервали стійкості в площині параметра ν, які в сукупності представляють ОС у площині параметра ν і ступеня стійкості η. Для цього з рівняння $V(\omega) = 0$ визначаємо частоти $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, які відповідають точкам перетину кривої D-розбиття з дійсною віссю $U(\omega)$, і значення параметрів ν у цих точках $(U(\omega_0), U(\omega_1), U(\omega_2), U(\omega_3))$.

Для значення параметра $T = 3$ та ступеня стійкості $\eta = 0$ частоти, які відповідають точкам перетину $D(j\omega)$ з віссю $U(\omega)$ у площині параметра ν, дорівнюють $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 0{,}0179$, $\omega_2 = 0{,}1522$, $\omega_3 = 1{,}8558$, а значення параметрів ν у цих точках визначаються за формулою $U(\omega_i) = A_1\omega_i^6 - A_3\omega_i^4 + A_5\omega_i^2 - A_7$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ і, відповідно, мають значення $U(0) = -1$, $U(\omega_1) = 9{,}2438$, $U(\omega_2) = -4782{,}4$, $U(\omega_3) = = 25213 \cdot 10^5$. Із співвідношень $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ і $U(0) < U(\omega_1) > U(\omega_2) < U(\omega_3)$ можна зробити висновок [6], що межа області D-розбиття в площині параметра ν містить відрізок ОС ($(U(0), U(\omega_1)$, або $U(\omega_3)$, $U(\infty))$. Враховуючи, що для всіх значень η $(\eta_{\min} = 0 \le \eta \ge \eta_{\max})$ похідна $V'(0) < 0$, відрізком стійкості є інтервал $(U(0), U(\omega_1))$. Нижня МОС досліджуваної системи в площині параметра ν та ступеня стійкості для всіх значень η дорівнює $U(0) = A_7$, а верхня визначається за виразом

$$U(\eta_i, \omega_{1i}) = A_1\omega_{1i}^6 - A_3\omega_{12}^4 + A_5\omega_{1i}^2 - A_7 \ (i = 1, 2, ...; 100, \eta_i = 0; 0{,}01; 0{,}02; ...; 1).$$

Блок-схему алгоритму визначення МОС у площині [η, ν] для розглядуваного прикладу представлено на рис.1, а МОС — на рис. 2.

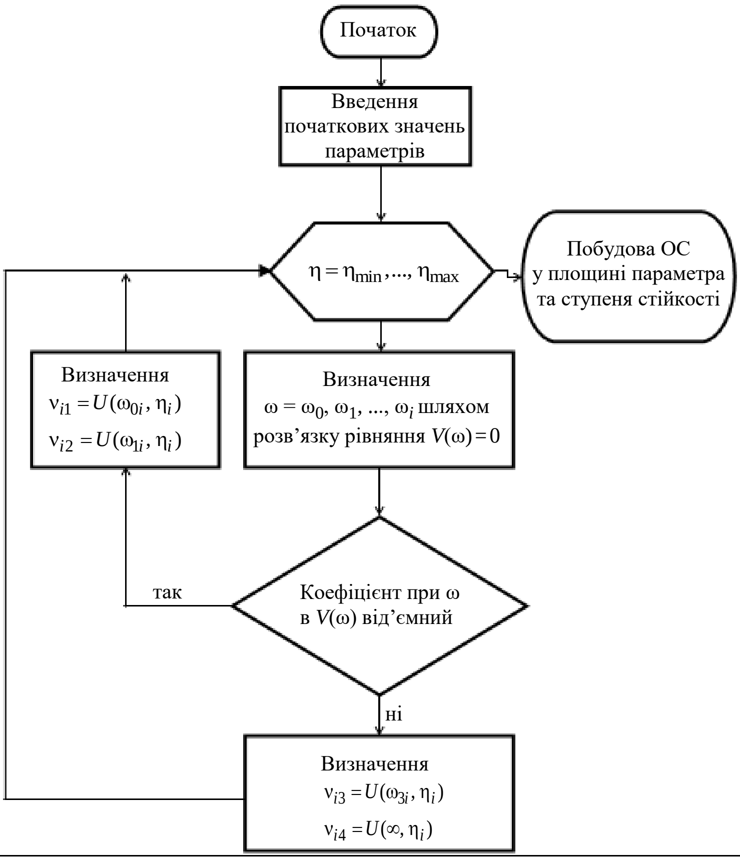

Рис. 1

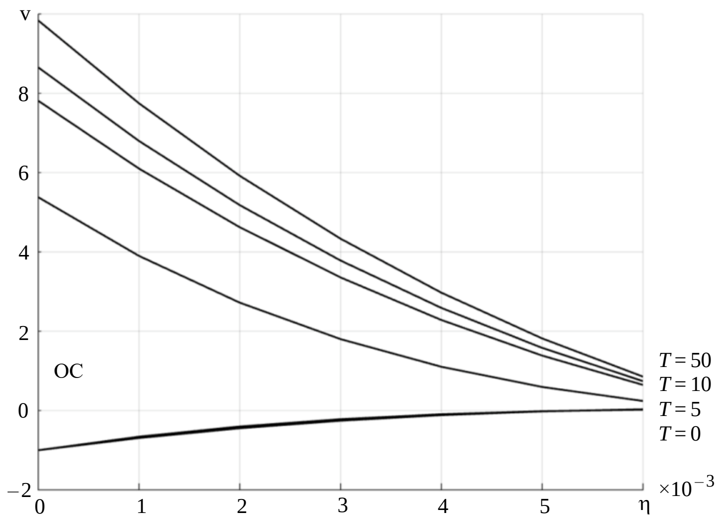

Рис. 2

Висновок

Запропоновано задачу побудови МОС неперервних лінійних САК у площині параметрів коефіцієнтів характеристичного рівняння та показників якості перехідного процесу (ступеня стійкості η та ступеня коливності μ) методом *D*-розбиття.

Представлено конкретні вирази коефіцієнтів зміщеного характеристичного рівняння для ступеня стійкості та ступеня коливності.

Розглянуто приклад побудови МОС у площині параметра системи та ступеня стійкості η, який нелінійно входить у коефіцієнти зміщеного характеристичного рів-

ISSN 2786-6491

няння. МОС отримано за допомогою раніше запропонованої авторами методики побудови ОС у площині двох параметрів, один з яких нелінійно входить у рівняння системи. При цьому виключаються побудова всієї кривої *D*-розбиття та особливих прямих і використання штриховки по Неймарку, а також забезпечується машинна реалізація МОС. Отримане сімейство МОС у площині параметра та ступеня стійкості при різних значеннях іншого параметра коефіцієнтів зміщеного характеристичного рівняння дозволяє оцінити, а для значень параметрів на сімействі МОС визначити ступінь стійкості η.

L. Movchan

DETERMINATION OF THE REGION OF STABILITY IN THE PLANE OF PARAMETERS AND QUALITY INDICATORS OF LINEAR CONTINUOUS AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS USING THE *D*-PARTITION METHOD

Leonid Movchan

Ternopil Ivan Puluj National Technikal University,
orcid id: 0000-0002-4192-5267,

movchan.t.leonid@gmail.com

The question of constructing the boundary of the stability region (BSR) of continuous linear automatic control systems in the parameter plane of the coefficients of the characteristic equation and quality indicators of the transient process (degree of stability η, degree of fluctuation μ) by the *D*-partition method is considered. Specific expressions of the coefficients of the shifted characteristic equations for the degree of stability η and the degree of fluctuation μ are presented. It is shown that the quality indicators are nonlinearly included in the coefficients of the shifted equations, therefore it is a problem to construct the BSR using the classical *D*-partition method. An example of constructing the boundary of the stability region in the plane of the system parameter and degree of stability η is considered. The BSR is obtained using the previously proposed method by the authors of constructing the region of stability in the plane of two parameters, one of which is nonlinearly included in the system equation. At the same time, the construction of the entire *D*-partition curve, special straight lines, and the use of Neimark hatching is excluded, and machine realization of the limit of the stability region is ensured. The obtained family of BSR in the plane of the parameter and at different values of another parameter of the coefficients of the shifted characteristic equation makes it possible to estimate, and for the values of the parameters on the boundary of the stability region of the family, to determine the degree of stability η.

Keywords: *D*-partition, boundary of the stability region in the parameter space, *D*-partition boundary equation in the parameters plane, indicators of the quality of the transition process.

ПОСИЛАННЯ

1. Неймарк Ю.И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. *Автоматика и телемеханика*. 1948. № 3. С. 190–203.
2. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования. *Автоматика и телемеханика*. 1948. № 4. С. 253–279.
3. Дидук Г.А. Машинные методы исследования автоматических систем. Л. : Энергоатомиздат. 1983. 242 с.
4. Воронов А.А. Теория линейных систем автоматического управления. М. : Высш. шк., 1986. 367 с.
5. Мовчан Л.Т., Мовчан С.Л. Машино-ориентированный подход к построению области устойчивости в плоскости двух параметров линейных непрерывных систем управления методом *D*-разбиения. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2011. № 1. С. 30–35.
6. Мовчан Л.Т., Мовчан С.Л. Исследование геометрии *D*-разбиения одномерной плоскости параметра характеристического уравнения непрерывной системы. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2021. № 4. С. 125–136.

Отримано 10.03.2023