УДК 519.1

І.Ю. Кривонос

ПРО ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРОЦЕСУ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Кривонос Ірина Юріївна

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,

ikrivono@gmail.com

Завдання побудови оцінок невідомих параметрів за результатами неповних вимірів привертають постійну увагу дослідників. І хоча предмет теорії спостереження та фільтрації відомий досить добре і багато положень цієї теорії набули характеру класичних результатів, інтерес до такого роду завдань не слабшає завдяки їх широкому застосуванню, зокрема, в економіці, військовій справі та теорії автоматичного керування. З розвитком теорії гарантованого спостереження для лінійних систем з'явилася можливість вивчення задач оптимізації вимірів чи планування експерименту. Зв'язок мінімаксних та класичних стохастичних оцінок дозволяє застосувати в рамках гарантованого підходу як стандартні методи теорії планування експерименту, так і деякі інші результати, пов'язані з оптимізацією процесу спостереження. Метою цієї роботи є дослідження оптимізації процесу спостереження, досягнення необхідних умов оптимальності та побудова оптимальних динамічних вимірників з нульовими та ненульовими початковими умовами. Основу математичного дослідження складають методи опуклого та функціонального аналізів, а також результати теорії оптимального керування та теорії мінімаксних спостережень лінійних динамічних систем. Сформульовано завдання побудови оптимальних динамічних вимірників і задач оптимізації процесу спостережень з відмінними критеріями. Доведено теорему про існування розв'язків цих завдань.

Ключові слова: завдання оптимізації процесу спостереження, мінімаксне оцінювання, інформаційний еліпсоїд, теореми та докази, диференційована функція.

Вступ

Статтю присвячено дослідженню задач оптимізації процесу спостереження. Наведено необхідні умови екстремуму, які гарантують оптимальний вибір способу спостереження. Існує два підходи до опису невизначеностей (помилки вимірювання, збурення, похибки у завданні початкової апріорної інформації) у зазначених задачах: імовірнісний та мінімаксний (або гарантований).

Традиційний імовірнісний підхід заснований на поданні невідомих збурень у вигляді випадкових процесів із заданими характеристиками. Дослідженню завдань у рамках цього підходу присвячено велику кількість українських та зарубіжних публікацій. Результати мають досить закінчений характер, особливо у разі лінійних, квадратично-гауссівських моделей, де загальновизнаний і широко застосовуваний на практиці метод оцінювання дає фільтр Калмана–Бьюсі.

Різні математичні аспекти завдань оцінювання та фільтрації у стохастичній постановці вивчалися з використанням робіт [1–6]. Однак на практиці дослідники часто стикаються з відсутністю або нестачею статистичного матеріалу про неконтрольовані параметри. Це не дозволяє застосувати до досліджуваних завдань методи, розроблені в теорії стохастичної фільтрації. Інформація про невизначені величини вичерпується лише завданням множини їхніх можливих значень. У зв'язку з цим набув розвитку гарантований, або мінімаксний, підхід до вирішення завдань оцінювання, заснований на залученні методів мінімаксу та теорії ігор. Результатом розв'язання задач на мінімакс є гарантовані множинні оцінки, що забезпечують найменші помилки оцінювання найгірших із можливих реалізацій спостережень у динамічних системах. Дослідження у цьому напрямку почали М.М. Красовський [7] та А.Б. Куржанський [8, 9], що призвело до створення теорії мінімаксної, або гарантованої, фільтрації.

Основні результати для завдань мінімаксного оцінювання отримано у роботах А.Б. Куржанського [9, 10], Ф.Л. Чорноусько [11, 12], Б.М. Пшеничного [13–16], Б.І. Ананьєва [17–19], А.Г. Наконечного [20, 21], М.Ф. Кириченка [22], а також інших авторів, включаючи зарубіжних.

Розгляд завдань спостереження та фільтрації показує, що резервом підвищення точності оцінювання є оптимізація процесу спостереження.

У роботі розглядається спеціальне завдання управління процесом спостереження у припущенні, що збурення задовольняють квадратичне обмеження, а параметри вимірювача визначаються виходом керованої динамічної системи. Така постановка є природною в тому випадку, коли спостереження виконуються з об'єкта, що рухається, або залежать від динамічно змінюваних параметрів зовнішнього середовища. Крім того, до розглянутої проблеми зводиться пошук оптимального вхідного сигналу в завданнях лінійної ідентифікації [1].

Незважаючи на те, що проблема може розглядатися як нескінченне узагальнення деякої задачі планування регресійного експерименту, отримані результати видаються новими і в певному сенсі несподіваними.

Завдання оптимізації процесу спостереження

Постановка задачі оптимізації процесу спостереження. Розглянемо завдання знаходження найкращої у сенсі мінімаксу оцінки вектора параметрів $\theta \in R^n$ на основі спостережень сигналу

$$y(t) = a^*(t)\theta + \xi(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{1}$$

Тут $a(t)$ — відома безперервна по t матриця розмірності $(n \times k)$; $[t_0, T]$ — інтервал спостереження; $\xi(t)$ — невизначені збурення, інформація про які вичерпується включенням

$$\xi(\cdot) \in \Xi \subset L_2^k[t_0, T]. \tag{2}$$

Передбачається, що множиною Ξ є опуклий компакт у слабкій топології $L_2^k[t_0, T]$. Для вирішення цього завдання необхідно визначити оператор $\Phi = \Phi(y)$, який, будучи застосованим до сигналу $y(t)$ та виміряним на проміжку $t_0 \le t \le T$, доставив би величину θ_0, що є найкращою в певному сенсі оцінкою вектора параметрів θ. Розрізняють два основні підходи до вирішення цього завдання: апріорний та апостеріорний. При апріорному підході передбачається, що вибір оператора Φ здійснюється до проведення спостереження. У цьому випадку для отримання оцінки θ_0 розглядається весь ансамбль реалізацій $y(\cdot)$, що породжується сукупністю реалізацій невизначених збурень $\xi(\cdot)$. Оператор Φ підбирається таким чином, щоб визначити найменші помилки оцінювання для найгіршої реалізації.

За апостеріорним підходом вважається, що реалізація $y(t)$ вже відома. Тобто при побудові оператора Φ оперують однією конкретною реалізацією $y(t)$, отриманою при спостереженні. Розв'язання задачі в цьому випадку зводиться до побудови іформаційної множини, спільної з сигналом, що реалізувався [8]. Ця множина складається з тих значень параметра θ, які (разом з деякими значеннями $\xi(t)$) могли б породити саме виміряну реалізацію $y(t)$. За оптимальну оцінку θ_0 вектора параметрів θ приймається найкраща точка з цієї множини.

Апостеріорний алгоритм можна досліджувати і з апріорних позицій, вважаючи реалізацію, що відбулася, найгіршою. Однак способи вирішення завдання оцінювання у даному випадку і у разі суто апріорного підходу досить різні.

Повернемося до завдань (1) та (2). Інформаційною множиною, сумісною з сигналом, що реалізувався, називається множина векторів θ, що задовольняють співвідношення (1) та (2) [8].

Вважатимемо, що Ξ — еліпсоїд у просторі $L_2^k\,[t_0, T]$:

$$\Xi = \left\{ \xi(\cdot) : \int_{t_0}^{T} \xi^*(t) N(t) \xi(t)\, dt \le 1 \right\},$$

де $N(t)$ — симетрична, позитивно визначена на $[t_0, T]$ матриця.

Передбачається також, що матрична функція $a(\cdot)$ не фіксована і може змінюватися відповідно до рівняння

$$\dot{a}(t) = f(a(t), u(t), t),$$

$$a(t_0) = a_0 \in R^n. \tag{3}$$

Тут $f(a(\cdot), u(\cdot), \cdot)$ — безперервна матрична функція, яка залежить від параметра, що управляє $u(\cdot)$, причому

$$u(\cdot) \in U \subset L_2^m[t_0, T]. \tag{4}$$

Об'єкт, що описується рівняннями (1)–(4), будемо називати керованим динамічним вимірювачем.

Таким чином, має сенс завдання управління процесом спостереження, або завдання про вибір траєкторії керованої динамічної системи, що мінімізує максимально можливу помилку оцінювання (розміри інформаційної множини).

У даному випадку інформаційною множиною є еліпсоїд [8]

$$E(\theta_0, P) = \{\theta \in R^n : (\theta - \theta_0)^* P(\theta - \theta_0) \le 1 - h^2\}, \tag{5}$$

параметри якого визначаються такими співвідношеннями:

$$\theta_0 = P^{-1} d,\; P = P(a(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} a(t) N(t) a^*(t)\, dt,$$

$$d = \int_{t_0}^{T} a(t) N(t) y(t)\, dt,\; h^2 = \int_{t_0}^{T} y^*(t) y(t)\, dt - d^* P^{-1} d. \tag{6}$$

Розміри інформаційного еліпсоїда, а отже, помилка мінімаксного оцінювання визначається матрицею P та величиною h^2, яка залежить від сигналу, що реалізувався. Однак $y(\cdot)$ визначається виходом керованої динамічної системи (3), (4), тобто залежить від управління $u(\cdot)$. За логікою мінімаксного підходу вибір оптимального

ISSN 2786-6491

управління $u_0(\cdot)$ в (3) необхідно проводити при найгіршій можливій реалізації невизначених параметрів. Відомо [8], що найменш сприятливий для спостерігача сигнал дає $h=0$. Отже, якщо за оцінку вектора θ буде вибиратися центр θ_0 еліпсоїда (5), (6), то максимально можливі помилки оцінювання належатимуть еліпсоїду

$$E_0 = E(0, P) = \{\varepsilon \in R^n : \varepsilon^* P \varepsilon \le 1\}.$$

Примітка. Вектор θ_0 збігається з оцінкою методу найменших квадратів для сигналу (1). При цьому спектр матриці P визначає дисперсію помилки у разі, коли збурення описуються стаціонарними випадковими процесами [26]. Питання взаємозв'язку мінімаксних оцінок та оцінок методу найменших квадратів досліджувалися різними авторами [20–22].

Найбільш поширеними скалярними величинами, що характеризують розміри E_0, є максимальне власне число, слід і детермінант матриці P^{-1}.

Сформулюємо завдання побудови оптимального динамічного вимірювача або оптимізації процесу спостереження, виходячи з мінімізації невизначеності при оцінюванні вектора параметрів θ.

Завдання 1. Визначити допустиме керування $u_0(\cdot) \in U \subset L_2^m\,[t_0, T]$ та відповідне рішення $a_0(\cdot)$ рівняння (3), що мінімізує максимальне власне число матриці P^{-1}.

Завдання 2. Визначити допустиме керування $u_0(\cdot) \in U \subset L_2^m\,[t_0, T]$ та відповідне рішення $a_0(\cdot)$ рівняння (3), що мінімізує визначник матриці P^{-1}.

Завдання 3. Визначити допустиме керування $u_0(\cdot) \in U \subset L_2^m\,[t_0, T]$ та відповідне рішення $a_0(\cdot)$ рівняння (3), що мінімізує слід матриці P^{-1}.

Для зручності надалі розглядаються еквівалентні завдання максимізації визначника та мінімального власного числа матриці P.

Отже, розглядається спеціальне завдання планування процесу спостереження за умови, що збурення задовольняють квадратичні обмеження, а параметри вимірювача залежать від виходу керованої динамічної системи. З формальної точки зору це завдання зводиться до оптимального керування з негладким функціоналом.

Завдання 1–3 вивчаються за припущенням, що $k=1$ (використовуються скалярні спостереження), $N(t) = I$:

$$f(a, u, t) = A(t)a + B(t)u\,. \tag{7}$$

$A(\cdot)$ та $B(\cdot)$ — безперервні на $[t_0, T]$ матриці розмірності $(n \times n)$ та $(n \times m)$ відповідно; I — одинична матриця; U — опукла, слабо компактна множина в $L_2^m[t_0, T]$.

Передбачається також, що система (3), (7) цілком керована.

Використовуючи ці припущення, можна обґрунтувати таке твердження.

Теорема 1. *Розв'язки завдань 1–3 існують.*

Доведення. Розглядається завдання такого виду:

$$F(a(\cdot)) \Rightarrow \min,$$

$$a(\cdot) \in \mathrm{A},$$

де $F(a(\cdot)) : L_2^n[t_0, T] \to R$ задає величину максимального власного числа, детермінанта чи сліду матриці $P^{-1}(a(\cdot))$,

$$\mathrm{A} = \left\{ a(\cdot) \in L_2^n[t_0, T] : a(t) = \Phi(t, t_0)a_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,\ u(\cdot) \in U \right\}$$

є множиною рішень лінійної динамічної системи (3), (7). Тут $\Phi\,(t, \tau)$ — матрицант лінійної однорідної системи $\dot{x}(t) = A(t)x(t).$ Покажемо, що A — це компакт. Для цього розглянемо множину $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A} - c(\cdot),$ де $c(t) = \Phi(t, t_0)a_0$, $t \in [t_0, T],$ і визначимо оператор K :

$$a(\cdot) = Ku(\cdot),$$

тобто

$$a(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\, B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

$$\mathrm{A}_0 = KU.$$

Відомо [16], що певним чином оператор є компактним лінійним оператором, і отже, з обмеженості U випливає компактність A.

Завдяки повній керованості системи (3), (7) існує рішення $a_*(\cdot) \in \mathrm{A},$ отже, матриця $P_* = P(a_*(\cdot))$ невироджена. Нехай $F(a_*(\cdot)) = \alpha_* > 0$. Тоді обмеження розглянутого завдання можна доповнити умовою

$$F(a(\cdot)) \le \alpha_*.$$

Користуючись неперервністю спектра і невід'ємною визначеністю матриці $P(a(\cdot)),$ можна показати, що $F(\cdot)$ безперервна на замкнутій множині

$$\mathrm{A} \cap \left\{ a(\cdot) : F(a(\cdot)) \le \alpha_* \right\}.$$

Твердження теореми, таким чином, випливає з теореми Вейєрштрасса.

Теорему доведено.

Диференціальні властивості функціоналів. Досліджуємо диференціальні властивості функцій, що визначають критерії завдань 1–3.

Насамперед нагадаємо деякі поняття.

Скалярна величина у просторі $L_2^n\,[t_0, T]$ вводиться так: якщо $f(\cdot),$ $g(\cdot) \in L_2^n[t_0, T],$ то

$$\langle f(\cdot),\ g(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{T} f^*(t) g(t) dt,$$

а норма

$$|\ f(\cdot)|_{L_2^n}^{\,2} = \langle f(\cdot),\ f(\cdot) \rangle = \int_{t_0}^{T} f^*(t) f(t) dt.$$

Визначення. *Функціонал* $\Phi(a(\cdot)) : L_2^n[t_0, T] \ \to R$ *диференціюємо по Фреше в точці* $a_0(\cdot),$ *якщо існує такий лінійний функціонал* $\Phi'(a_0(\cdot)),$ *що*

$$\Phi(a_0(\cdot) + \delta a_0(\cdot)) - \Phi(a_0(\cdot)) = \langle\ \dot{\Phi}(a_0(\cdot)), \delta a_0(\cdot)\ \rangle + o(\delta a_0(\cdot)),$$

де $\dfrac{o(\delta a_0(\cdot))}{|\delta a_0(\cdot)|} \ \to 0$ *при* $\delta a_0(\cdot) \ \to 0.$

Позначимо $D(a(\cdot))$ та $E(a(\cdot))$ величину детермінанта і мінімального власного числа матриці $P(a(\cdot))$, а $L(a(\cdot))$ — слід зворотної матриці $P^{-1}(a(\cdot)).$

 ISSN 2786-6491

Теорема 2. *Функції* $D(\cdot)$ *та* $L(\cdot):L_2^n[t_0,T]\ \to R$ *диференційовані по Фреше у всіх точках* $a_0(\cdot)$, *і завдяки їм матриця* $P_0=P(a_0(\cdot))$ *невироджена. При цьому*

$$\dot{D}\ (a_0(\cdot))(t)=2\det P_0\cdot P_0^{-1}\ \cdot a_0(t), \tag{8}$$

$$\dot{L}\ (a_0(\cdot))(t)=-2\,P_0^{-2}\ \cdot a_0(t). \tag{9}$$

Доведення. Скористаємося такою формулою обчислення визначника матриці P_0:

$$\det P_0=\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)}(-1)^{|i_1,i_2,\dots,i_n|}p_{1i_1}\,p_{2i_2},\dots,p_{ni_n}.$$

Нехай I — множина різноманітних перестановок індексів $I=\{\chi:\chi==(i_1,i_2,...,i_n)\}$, а δP — матриця з елементами δp_{ij}, $i,\ j=1,2,...,n.$ Тоді

$$D(P_0+\delta P)=\sum_{\chi\in I}(-1)^{|\chi|}\ (p_{1i_1}+\delta p_{1i_1})(p_{2i_2}+\delta p_{2i_2})\dots(p_{ni_n}+\delta p_{ni_n})=$$

$$=\sum_{\chi\in I}(-1)^{|\chi|}\ p_{1i_1},p_{2i_2},\dots,p_{ni_n}+\sum_{\chi\in I}(-1)^{|\chi|}\ \delta p_{1i_1},p_{2i_2},\dots,p_{ni_n}+$$

$$+\sum_{\chi\in I}(-1)^{|\chi|}p_{1i_1},\delta p_{2i_2},p_{3i_3},\dots,p_{ni_n}+...+$$

$$+\sum_{\chi\in I}(-1)^{|\chi|}\ p_{1i_1},p_{2i_2},\dots,p_{(n-1)i_{(n-1)}}\delta p_{ni_n}+o(\delta p).$$

Перетворимо кожну із сум, крім першої, згрупувавши доданки таким чином:

$$\sum_{\chi\in I}(-1)^{|\chi|}\ p_{1i_1},\dots,p_{(k-1)i_{(k-1)}}\delta p_{ki_k}\,p_{(k+1)i_{(k+1)}},\dots,p_{ni_n}=$$

$$=\delta p_{k1}\sum_{\substack{\chi\in I,\\ L_k\neq 1}}(-1)^{|\chi|}\ p_{1i_1},\dots,p_{(k-1)i_{(k-1)}}\,p_{(k+1)i_{(k+1)}},\dots,p_{ni_n}+$$

$$+\delta p_{k2}\sum_{\substack{\chi\in I\\ i_k\neq 2}}(-1)^{|\chi|}\ p_{1i_1},...,p_{(k-1)i_{(k-1)}}\,p_{(k+1)i_{(k+1)}},\dots,p_{ni_n}+...+\delta p_{kn}\times$$

$$\times\sum_{\substack{\chi\in I\\ i_k\neq n}}(-1)^{|\chi|}\ p_{1i_1},\dots,p_{(k-1)i_{(k-1)}}\ \ p_{(k+1)i_{(k+1)}},...,\ p_{ni_n}\times p_{ni_n}=\sum_{j=1}^{n}\delta p_{kj}M_{kj},$$

тобто отримаємо формулу розкладання визначника матриці P_0 за елементами k-го рядка, які замінені δp_{kj}, j = 1, 2, …, n; M_{kj}, j = 1, 2, …, n, — алгебраїчні доповнення, що відповідають елементам p_{kj}, j = 1, 2, …, n.

Скориставшись цим фактом, отримаємо

$$D(P_0+\delta P)=D\left(P_0\right)+\sum_{j=1}^{n}\delta p_{1j}\ M_{1j}+\sum_{j=1}^{n}\delta p_{2j}\ M_{2j}+\ldots+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\delta p_{nj}\ M_{nj}+o(\delta p)=D(P_0)+\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ \delta p_{kj}M_{kj}+o(\delta p).$$

Елементи зворотної до P_0 матриці p^{kj} виражаються як $p^{kj} = \dfrac{M_{kj}}{\det P_0}$. Тоді

$$D(P_0 + \delta P) = D(P_0) + \det P_0 \cdot P_0^{-1} \cdot \delta P + o(\delta P). \qquad (10)$$

Нехай $\delta a(\cdot) \in L_2^n[t_0, T]$. Знайдемо вираз для $\delta P = P(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) - P(a_0(\cdot))$:

$$P(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} \left(a(t) + \delta a(t)\right)(a(t) + \delta a(t))^* dt =$$

$$= P(a_0(\cdot)) + \int_{t_0}^{T} (\delta a(t) a_0^*(t) + a_0(t)\delta a^*(t))dt + o(\delta a(\cdot)) =$$

$$= P(a_0(\cdot)) + 2\int_{t_0}^{T} a_0(t)\delta a^*(t)dt + o(\delta a(\cdot)).$$

Після підстановки (10) отримуємо

$$D(P(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot))) = D(P(a_0(\cdot))) + 2\int_{t_0}^{T} \det P_0 \cdot a_0^*(t) \cdot P_0^{-1} \cdot \delta a(t)dt + o(\delta a(\cdot)),$$

де $\dfrac{o(\delta a_0(\cdot))}{|\delta a_0(\cdot)|} \to 0$ при $\delta a(\cdot) \to 0$, а похідна Фреше за визначенням збігається з (8).

Розглянемо тепер функцію $L(\cdot)$:

$$L(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) - L(a_0(\cdot)) = T_r P^{-1}(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) -$$

$$-T_r P^{-1}(a_0(\cdot)) = T_r (P^{-1}(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) - P^{-1}(a_0(\cdot))),$$

а також

$$P^{-1}(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) = (P_0 + \delta P)^{-1} = (P_0(I + P_0^{-1}\delta P))^{-1} =$$

$$= (I - P_0^{-1}\delta P + o(\delta P))P_0^{-1} = P_0^{-1} + P_0^{-1} \cdot \delta p \cdot P_0^{-1} + o(\delta P).$$

Підставивши вираз для δP, знайдений вище, отримаємо

$$T_r (P^{-1}(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) - P^{-1}(a_0(\cdot)) = -2T_r \int_{t_0}^{T} P_0^{-1} \cdot a_0(t) \cdot \delta a^*(t) \cdot P_0^{-1} dt + o(\delta a(\cdot)).$$

Враховуючи, що для довільних векторів $\eta, \psi \in R^n$, $T_r \eta\psi^* = \eta^*\psi$, запишемо

$$L(a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) - L(a_0(\cdot)) = -2\int_{t_0}^{T} a_0^*(t) \cdot P_0^{-2} \cdot \delta a(t)dt + o(\delta a(\cdot)),$$

де $\dfrac{o(\delta a_0(\cdot))}{|\delta a_0(\cdot)|} \to 0$ при $\delta a(\cdot) \to 0$, а похідна Фреше збігається з (9).

Теорему доведено.

Для вивчення функціоналу $E(a(\cdot))$ представимо його, використовуючи співвідношення Релея як

$$E(a(\cdot)) = \min_{|\psi|=1} E(\psi, a(\cdot)),$$

$$E(\psi, a(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} (\psi^* a(t))^2 dt. \qquad (11)$$

 ISSN 2786-6491

Виявляється, що $E(\psi, a(\cdot))$ — безперервна і диференційована по Фреше функція при кожному фіксованому ψ.

Теорема 3. *Похідна Фреше функції* $E(\psi, a(\cdot))$ *по* $a(\cdot)$ *у точці* $a_0(\cdot)$ *визначається виразом*

$$E'(\psi a_0(\cdot))(t) = 2\psi \cdot \psi^* \cdot a_{0(t)}, \quad t \in [t_0, T]. \qquad (12)$$

Доведення. Для довільного $ba(\cdot) \in L_2^n[t_0, T]$

$$E(\psi, a_0(\cdot) + \delta a(\cdot)) = \int_{t_0}^{T} (\psi^*(a_0(t) + \delta a(t)))^2 \, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} ((\psi^* a_0(t))^2 + 2(\psi^* a_0(t)\psi^* \delta a(t)) + (\psi^* \delta a(t))^2) dt =$$

$$= E(\psi, a_0) + 2\int_{t_0}^{T} (\psi \cdot \psi^* a_0(t))^* \delta a(t) dt + o(\delta a(\cdot)),$$

де $\dfrac{o(\delta a_0(\cdot))}{|\delta a_0(\cdot)|} \to 0$ при $\delta a(\cdot) \to 0$ в $L_2^n[t_0, T]$.

Теорему доведено.

Із результатів [23] випливає, що функція

$$-E(a(\cdot)) = \max_{|\psi|=1} (-E(\psi, a(\cdot)))$$

є квазідиференційованою, причому її квазідиференціал визначається виразом

$$\partial(-E(a_0(\cdot))) = \overline{\text{conv}}\, U_{\psi \in \Psi_0} (-\dot{E}(\psi, a_0(\cdot)(\cdot)).$$

Тут

$$\Psi_0 = \{\psi \in R^n; |\psi| = 1, P_0 \psi = \lambda_{\min} \psi\},$$

де $\lambda_{\min}$ — мінімальне власне число матриці P_0.

Особливість операції досягнення опуклості означає замикання у слабкій топології $L_2^n[t_0, T]$. Із (12) маємо

$$\partial(-E(a_0(\cdot))) = \{d(\cdot) \in L_2^n[t_0, T] :$$

$$: d(t) = -2\Gamma a_0(t), \ \Gamma \in \overline{\text{conv}}\, U_{\psi \in \Psi_0} \psi\psi^*\}. \qquad (13)$$

Теорема 4. *Функція* $E\_(a(\cdot)) = -E(a(\cdot))$ *є квазідиференційованою [23], а включення* $d(\cdot) \in \partial E\_(a_0(\cdot))$ *еквівалентне існуванню векторів* $\psi_i \in \Psi_0$ *та чисел* $\gamma_i \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, \iota; \ \sum_{i=1}^{\iota} \gamma_i = 1; \ \iota \leq \dfrac{n(n+1)}{2} + 1,$ *таких, що*

$$d(t) = -2\Gamma a_0(t), \ \Gamma = \sum_{i=1}^{\iota} \psi_i \psi_i^* .$$

Доведення. Покажемо, що знак замикання у формулі визначення квазідиференціалу (13) можна усунути.

Для цього розглянемо множину

$$G = U_{\psi_i \in \Psi_0} \psi_i \psi_i^* = U_{\psi_i \in \Psi_0} g_i ,$$

де $g_i = \psi_i \psi_i^*$.

Виберемо послідовність $g_i \in G$, що сходиться до деякого елемента $g_0 = \psi_0 \psi_0^*,\ \psi_0 \in \Psi_0$.

Оскільки Ψ_0 — компактна множина (замкнена та обмежена), з послідовності ψ_i можна вибрати підпослідовність, що сходиться до $\psi_{ij} \to \psi_0$, $\psi_0 \in \Psi_0$. Але g безперервно залежить від ψ. Тому $g_0 \in G$, тобто G є компактною множиною.

Крім того, множина G має незлічене число елементів, оскільки для будь-якого $\psi = \sum_{i=1}^{\iota} \alpha_i \psi_i$

$$g = \sum_{i=1}^{\iota} \alpha_i \psi_i \left(\sum_{j=1}^{\iota} \alpha_j \psi_j^* \right) = \sum_{i,j=1}^{\iota} \alpha_i \alpha_j \psi_i \psi_j^*.$$

Оскільки опукла оболонка компакта в кінцевому просторі є компактною множиною, знак замикання можна видалити.

Тоді за теоремою Каратеодорі для будь-якого $d(\cdot) \in \partial E_{-}(a_0(\cdot))$ існують такі вектори $\psi_i \in \Psi_0$ та числа $\gamma_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, \iota;\ \sum_{i=1}^{\iota} \gamma_i = 1;\ \iota \le \frac{n(n+1)}{2} + 1$, що

$$d(t) = -2 \sum_{i=1}^{\iota} \gamma_i \ \psi_i \psi_0^* a_0 \ (t),$$

тобто $\partial E_{-}(a_0(\cdot))$ — множина векторів виду

$$\partial E_{-}(a_0(\cdot)) = \{ d(\cdot) \in L_2^n[t_0, T] : d(t) = -2\Gamma a_0(t),$$
$$\Gamma = \sum_{i=1}^{\iota} \gamma_i \psi_i \psi_i^*,\ \gamma_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, \iota;\ \sum_{i=1}^{\iota} \gamma_i = 1,$$
$$\iota \le \frac{n(n+1)}{2} + 1 \}.$$

Теорему доведено.

Необхідні умови екстремуму. Сформульовані вище завдання 1–3 еквівалентні мінімізації квазідиференційованих функцій $E_{-}(a(\cdot)),\ D_{-}(a(\cdot)) = -D(a(\cdot))$, $L(a(\cdot))$ відповідно на множині

$$\alpha = \left\{ a(\cdot) \in L_2^n[t_0, T] : a(t) = \Phi(t, t_0) a_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) U(\tau) d,\ u(\cdot) \in U \right\} \qquad (14)$$

рішень лінійної динамічної системи. Тут $\Phi(t, \tau)$ — матрицант лінійної однорідної системи $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Отже, для отримання необхідних умов оптимальності у завданнях 1–3 можна скористатися результатами [23].

Теорема 5. *Якщо* a_0 *— точка мінімуму квазідиференційованого функціоналу* $F(\cdot)$ *на опуклій множині* А *банахова простору* B, *то*

$$\partial F(a_0) \cap K_{\alpha}^*(a_0) \ne \varnothing.$$

Тут $\partial F(a_0)$ — квазідиференціал, а

$$K_{\text{A}}(a_0) = \{ e \in B : e = \lambda(a - a_0),\ a \in \text{A},\ \lambda > 0 \}$$

є конусом допустимих напрямів до множини А в точці a_0. Зірочкою позначено сполучений конус.

Теорему доведено.

 ISSN 2786-6491

Теорема 6. *Нехай множина* A *визначена співвідношенням (14),* $a_0(\cdot)\in\mathrm{A}$, $u_0(\cdot)\in U$ *— відповідне управління. Тоді з* $\psi(\cdot)\in K^*_{\mathrm{A}}(a_0(\cdot))$ *випливає*

$$\psi(\tau)=-\int_{\tau}^{T}\Phi^*(t,\tau)\psi(t)dt,$$

$$\int_{t_0}^{T}\psi^*(\tau)B(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))d\tau\le 0$$

для всіх $u(\cdot)\in U$.

Доведення. За умовою теореми $\psi(\cdot)\in K^*_{\mathrm{A}}(a_0(\cdot))$, де

$$K^*_{\mathrm{A}}(a_0(\cdot))=\{\psi(\cdot)\in L_2^n[t_0,T]:\langle\psi(\cdot),e(\cdot)\rangle\ge 0,\ \ e(\cdot)\in K_{\mathrm{A}}(a_0(\cdot))\}.$$

Оскільки $a_0(\cdot)\in\mathrm{A}$, отримуємо

$$e(t)=a(t)-a_0(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))d\tau.$$

Тоді

$$\langle\psi(t),e(t)\rangle=\int_{t_0}^{T}\psi^*(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(\mathrm{t},\tau)\mathrm{B}(\tau)\left(\mathrm{u}(\tau)-u_0(\tau)\right)d\tau dt.$$

Змінимо межі інтегрування. Для цього введемо функцію

$$K(t,\tau)=\begin{cases}1,\ t_0\le\tau\le t,\\0,\ \tau>t,\end{cases}$$

і в результаті маємо

$$\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{T}K(t,\tau)\psi^*(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))d\tau dt=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\int_{\tau}^{T}\psi^*(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))dtd\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{T}\left(\int_{\tau}^{T}\psi^*(t)\Phi(t,\tau)dt\right)B(\tau)(u(\tau)-u_0(\tau))d\tau,$$

звідки й випливає доведення теореми.

Теорему доведено.

Об’єднуючи теореми 2–6, отримуємо таке твердження.

Теорема 7. *Нехай* $a_0(\cdot)$ *— оптимальний динамічний вимірювач (рішення одного з завдань 1–3). Потім виконуються співвідношення*

$$\dot a_0(t)=A(t)a_0(t)+B(t)u_0(t),\ a_0(t_0)=a_0,$$

$$\dot\psi(\tau)=-A^*(\tau)\psi(\tau)-Ma(\tau),\ \psi(T)=0,\ \ t,\tau\in[t_0,T],$$

$$\int_{t_0}^{T}\psi^*(t)B(t)u_0(t)dt=\max_{u(\cdot)\in U}\int_{t_0}^{T}\psi^*(t)B(t)u(t)dt.$$

Доведення. Матриця M визначається виразами для квазідиференціала функціоналів $E_-(\cdot)$, $D_-(\cdot)$ та $L_-(\cdot)$.

Відповідно до цього для завдання 1

$$M = 2\sum_{i=1}^{\iota} \gamma_i \psi_i \psi_i^* ,$$

де γ_i, ψ_i та ι визначені в теоремі 4;

$$M = 2\det P_0 \cdot P_0^{-1}$$

для завдання 2 та

$$\mathrm{M} = 2 P_0^{-2}$$

для завдання 3.

Теорему доведено.

Зауваження. Результати виконання завдань 1–3 можуть бути корисними при проведенні досліджень ігрових задач [24–31].

Висновок

Сформульовано задачі побудови оптимального динамічного вимірювача (завдання 1–3), або задачі оптимізації процесу спостереження, за припущенням, що збурення задовольняють квадратичні обмеження, а параметри вимірювача визначаються виходом керованої динамічної системи. Доведено теорему про існування розв'язків цих завдань.

Отримано необхідні умови екстремуму для завдань керування процесом спостереження. Вивчено диференціальні властивості функцій, що визначають критерії у завданнях 1–3.

I. Kryvonos

ON THE TASK OF OPTIMIZING THE MONITORING PROCESS

Iryna Kryvonos

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,

ikrivono@gmail.com

The tasks of constructing estimates of unknown parameters based on the results of incomplete measurements attract the constant attention of researchers. Although the subject of the theory of surveillance and filtering is known quite widely, and many provisions of this theory have acquired the character of classical results, the interest in this kind of tasks does not weaken due to the wide area of their application, which includes, in particular, economics, military affairs, and the theory of automatic control. The development of the theory of guaranteed observation for linear systems made it possible to move on to the study of problems of optimization of measurements or planning of an experiment. The connection of minimax and classical stochastic estimates allows us to apply both standard methods of the theory of experiment planning and some other results related to the optimization of the observation process within the framework of a guaranteed approach. The purpose of this work is to study the optimization of the observation process, to achieve the necessary optimality conditions, and to construct optimal dynamic meters with zero and non-zero initial conditions. The basis of mathematical research is the methods of convex and functional analysis, as well as the results of the theory of optimal control and the theory of minimax observations of linear dynamic systems. Formulated tasks of building optimal dynamic measuring devices and tasks of optimizing the observation process with different criteria. A theorem on the existence of a solution to these problems is proved.

Keywords: observation process optimization task, minimax evaluation, information ellipsoid, theorems and proofs, differentiated function.

ПОСИЛАННЯ

1. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М. : Мир, 1972. 544 с.
2. Калман Р.Е. Вариационный принцип выбора оптимального фильтра из условия минимума квадратов ошибки. В кн. Самонастраивающиеся автоматические системы. *Тр. международного симпозиума ИФАК*. М. : Наука, 1964. С. 23–34.
3. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М. : Наука, 1966. 176 с.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М. : Наука, 1974. 696 с.
5. Немировский А.С. О рекуррентном оценивании параметров линейных объектов. *Автоматика и телемеханика*. 1981. № 4. С. 77–86.
6. Покотило В.Г. Асимптотические свойства минимаксных оценок при случайных возмущениях. *Кибернетика*. 1984. № 1. С. 55–59.
7. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М. : Наука, 1968. 476 с.
8. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
9. Кац И.Я., Куржанский А.Б. О некоторых задачах наблюдения в случайных обстоятельствах. *Автоматика и телемеханика*. 1970. № 12. С. 15–25.
10. Куржанский А.Б., Пишулина И.Я. Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях 1–3. *Дифференциальные уравнения*. 1976. Т. 12. № 8. С. 1434–1440; № 9. С. 1568–1579; № 12. С. 2149–2158.
11. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М. : Наука, 1978. 352 с.
12. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М. : Наука, 1978. 270 с.
13. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.
14. Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г. Минимаксный подход к оценке параметров линейной регрессии. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1983. № 2. С. 94–102.
15. Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г. О задаче наблюдения линейного объекта. *Прикладная математика и механика.* 1982. № 2. С. 212–217.
16. Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г., Кривонос И.Ю. Об оптимальном управлении оценкой параметров. *ДАН УССР. Серія А.* 1989. № 7. С. 20–22.
17. Ананьев Б.И. О двойственности задач оптимального наблюдения и управления для линейных систем с запаздыванием. *Дифференциальные уравнения*. 1974. Т. 10. № 7. С. 1160–1167.
18. Ананьев Б.И. Минимаксные регуляторы для статистических неопределенных управляемых систем. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1989. № 4. С. 105–116.
19. Ананьев Б.И., Ширяев В.И. Определение наихудших сигналов в задачах гарантированного оценивания. *Автоматика и телемеханика*. 1987. № 3. С. 49–58.
20. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф., Наконечный А.Г. Минимаксные оценки и регуляторы в динамических системах. Киев : Ин-т кибернетики АН УССР, 1978. С. 48. (Препринт *АН УССР. Ин-т кибернетики.* С. 78–81.)
21. Кириченко Н.Ф., Слабоспицкий А.С. Минимаксные фильтры в задачах оценивания состояний, идентификации параметров и распознания образов. *Кибернетика и вычислительная техника*. 1985. Вып. 65. С. 23–33.
22. Кириченко Н.Ф., Наконечный А.Г. Минимаксный подход к рекуррентному оцениванию состояний линейных динамических систем. *Кибернетика.* 1977. № 4. С. 52–55.
23. Пшеничний Б.Н. Необходимые условия экстремума. М. : Наука, 1982. 144 с.
24. Кривонос И.Ю. Построение оптимальных процесов наблюдения. *Кибернетика и системный анализ*. 1991. № 5. С. 177–179.
25. Пшеничний Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений. *Докл. АН СССР.* 1981. № 4. С. 785–789.
26. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка. Киев : Наук. думка, 1978. 582 с.
27. Чикрий А.А., Шишкина Н.Б. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений. *Автоматика и телемеханика*. 1985. № 2. С. 59–69.
28. Chikrii A.A., Chikrii G.T. Matrix resolving functions in game problems of dynamics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015. P. 56–65. DOI: 10.1134/S0081543815090047.
29. Chikrii A.A., Rappoport I.S., Chikrii K.A. Multivalued mapping and their selectors in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 5. P. 719–730. DOI: 10.1007/s10559-007-0097-8.
30. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2016. P. 254–269. DOI: 10.1134/S0081543816050229.
31. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2009. С. 290–301.

Отримано 20.02.2023
Доопрацьовано 27.02.2023