УДК 517.935; 681.5.03

О.Г. Мазко

ОЦІНКА ЗВАЖЕНОГО РІВНЯ ВПЛИВУ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ НА ЯКІСТЬ ДЕСКРИПТОРНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Мазко Олексій Григорович

Інститут математики НАН України, м. Київ,

mazkoag@gmail.com

У класичній теорії H_∞-керування критерієм якості неперервних систем з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх (екзогенних) збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів контрольованого виходу об'єкта і збурень. На практиці стабілізуючі закони керування у вигляді статичних або динамічних регуляторів за спостережуваним виходом, які мінімізують такі характеристики керованих об'єктів, забезпечують бажану якість і високу надійність їхнього функціонування в реальних умовах. У даній роботі для класу лінійних дескрипторних (сингулярних) систем керування з дискретним часом досліджуються задачі оцінки та досягнення узагальнених показників якості, які характеризують зважений рівень гасіння обмежених зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених невідомим початковим вектором. Встановлюються нові критерії виконання наперед заданої верхньої оцінки для вказаних показників якості, які зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Відомі методи оцінки H_∞-норми матричної передатної функції лінійної дескрипторної системи (твердження типу «bounded real lemma») є наслідками отриманих тверджень для зважених показників якості. Розглядаючи задачу синтезу для лінійної дескрипторної системи з керованими і спостережуваними виходами, у вигляді трьох матричних нерівностей встановлюються необхідні та достатні умови існування статичного регулятора за спостережуваним виходом, при якому замкнена система є допустимою (регулярною, стійкою і причинною) і досягаються бажані оцінки використовуваних зважених показників якості. У термінах ЛМН пропонується методика побудови еліпсоїдальної множини матриць статичного регулятора за виходом, який забезпечує замкненій системі вказані властивості. При цьому додатно визначені матриці, які визначають дану еліпсоїдальну множину, можуть бути як заданими, так і шуканими компонентами розв'язку ЛМН. Для ілюстрації отриманих результатів і можливості чисельної реалізації запропонованих методів за допомогою комп'ютерних засобів наводиться приклад дескрипторної системи стабілізації електричного кола.

Ключові слова: дескрипторна система, допустима система, рівень гасіння збурень, H_∞-керування, ЛМН.

Вступ

Дескрипторні (сингулярні) системи керування виникають при проєктуванні та дослідженні складних об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [1–6]). Задачі стабілізації та оптимізації таких систем теоретично ускладнюються порівняно з аналогічними задачами для звичайних систем. На практиці дискретні моделі систем керування мають деякі переваги щодо неперервних. Зокрема, використання різницевих рівнянь руху не потребують дослідження умов існування та єдиності розв'язків. Крім того, різницеві системи цілком придатні для їх чисельної реалізації комп'ютерними засобами.

Сучасні напрямки досліджень в теорії керування як звичайних, так і дескрипторних систем, складають методи робастної стабілізації та H_2 / H_∞-оптимізації, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й мінімізують негативний вплив невизначених зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Типовим показником якості у задачах H_∞-оптимізації дискретних систем з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх (екзогенних) збурень, якому відповідає максимальне значення відношення l_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. У [7–13] розроблені методи оцінки та досягнення бажаного значення даної характеристики у дискретних дескрипторних системах керування. В [14–16] при дослідженні звичайних систем використовувалися зважені показники якості, які враховують також вплив початкових збурень, обумовлених невідомим початковим вектором. За допомогою вагових коефіцієнтів у виразах, що визначають такі показники якості, можна встановити пріоритети між компонентами векторів контрольованого виходу, а також зовнішніх і початкових збурень у системі керування.

Продовжуючи дослідження [14, 15], у даній роботі вивчається клас дискретних дескрипторних систем із керованими і спостережуваними виходами і розробляються нові підходи до розв'язання задач оцінки та пониження зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень за допомогою статичних регуляторів за спостережуваним виходом. Практичну реалізацію отриманих результатів, яка включає розв'язання лінійних, квадратичних та деяких нелінійних матричних нерівностей, можна здійснювати за допомогою сучасних комп'ютерних засобів, зокрема LMI Toolbox системи Matlab [17] або Solve Block системи Mathcad Prime [18].

Будемо використовувати такі позначення: I (I_n) — одинична $(n \times n)$ матриця; $0_{n \times m}$ — нульова $n \times m$-матриця; $X = X^{\mathsf{T}} > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена симетрична матриця X; $\sigma(A)$ $(\rho(A))$ — спектр (спектральний радіус) матриці A; A^{-1} (A^{+}) — обернена (всевдообернена) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$; $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальне власне значення ермітової матриці; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_Q$ — зважена l_2-норма векторної послідовності w_t, $t = 0, 1, \ldots$.

Допоміжні твердження

Лема 1 (лема Шура [19]). *Для симетричної блокової матриці*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathsf{T}} & C \end{bmatrix}, \; A = A^{\mathsf{T}}, \; C = C^{\mathsf{T}}$$

виконуються такі твердження:

1) $M > 0 \Leftrightarrow A > 0, \; C > B^{\mathsf{T}} A^{-1} B \Leftrightarrow A > BC^{-1} B^{\mathsf{T}}$;

2) якщо $\det A \neq 0$, *то* $M \geq 0 \Leftrightarrow A > 0, \; C \geq B^{\mathsf{T}} A^{-1} B$;

3) якщо $\det C \neq 0$, *то* $M \geq 0 \Leftrightarrow C > 0, \; A \geq BC^{-1} B^{\mathsf{T}}$.

Наведемо критерії сумісності матричних нерівностей

$$A + B^{\mathsf{T}} X C + C^{\mathsf{T}} X^{\mathsf{T}} B < 0, \tag{1}$$

$$A + B^{\mathsf{T}} X C + C^{\mathsf{T}} X^{\mathsf{T}} B + C^{\mathsf{T}} X^{\mathsf{T}} R X C < 0, \tag{2}$$

де $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{p \times n}$, $C \in \mathbf{R}^{q \times n}$ і $R \in \mathbf{R}^{p \times p}$ — задані матриці, причому $A = A^{\mathsf{T}}$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ і $R = R^{\mathsf{T}} \geq 0$.

Лема 2 [20]. *Лінійна матрична нерівність (1) має розв'язок* $X \in \mathbf{R}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли виконується одна із наступних умов:*

а) $\operatorname{rank} B = n, \ \operatorname{rank} C = n;$

б) $\operatorname{rank} B < n, \ \operatorname{rank} C = n, \ W_B^{\mathrm{T}} A W_B < 0;$

в) $\operatorname{rank} B = n, \ \operatorname{rank} C < n, \ W_C^{\mathrm{T}} A W_C < 0;$

г) $\operatorname{rank} B < n, \ \operatorname{rank} C < n, \ W_B^{\mathrm{T}} A W_B < 0, \ W_C^{\mathrm{T}} A W_C < 0.$

Лема 3 [21]. *Квадратична матрична нерівність (2) має розв'язок* $X \in \mathbf{R}^{p\times q}$ *тоді і лише тоді, коли:*

а) $\operatorname{rank} C = n$ *або б)* $\operatorname{rank} C < n, \ W_C^{\mathrm{T}} A W_C < 0$ *і виконується одна із наступних умов:*

в) $R = 0, \ \operatorname{rank} B = n;$

г) $R = 0, \ \operatorname{rank} B < n, \ W_B^{\mathrm{T}} A W_B < 0;$

д) $R > 0, \ A < B^{\mathrm{T}} R^{-1} B;$

е) $1 \le \operatorname{rank} R < p, \ \operatorname{rank} B_0 = n;$

є) $1 \le \operatorname{rank} R < p, \ \operatorname{rank} B_0 < n, \ W_{B_0}^{\mathrm{T}} (A - B^{\mathrm{T}} R^{+} B) W_{B_0} < 0, \ B_0 = W_R^{\mathrm{T}} B.$

Лема 4. *Позначимо симетричні блокові матриці*

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^{\mathrm{T}} & S_3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^{\mathrm{T}} & H_3 \end{bmatrix},$$

де $S_1, H_1 \in \mathbf{R}^{r\times r}, \ S_2, H_2 \in \mathbf{R}^{r\times d}, \ S_3, H_3 \in \mathbf{R}^{d\times d}$. *Якщо задані* $H > 0$ *і* $0 < S_1 < H_1$, *то існують блоки* S_2 *і* S_3 *матриці* S, *при яких* $0 < S < H$.

Доведення. Перепишемо співвідношення $0 < S < H$ на основі леми Шура у вигляді

$$0 < S_1 < H_1, \quad S_2^{\mathrm{T}} S_1^{-1} S_2 < S_3 < H_3 + (S_2 - H_2)^{\mathrm{T}} (S_1 - H_1)^{-1} (S_2 - H_2).$$

Очевидно, що блок S_3 можна визначити, якщо

$$S_2^{\mathrm{T}} S_1^{-1} S_2 + (S_2 - H_2)^{\mathrm{T}} (H_1 - S_1)^{-1} (S_2 - H_2) < H_3,$$

тобто

$$\begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -S_2 \\ 0 & S_1 - H_1 & S_2 - H_2 \\ -S_2^{\mathrm{T}} & S_2^{\mathrm{T}} - H_2^{\mathrm{T}} & -H_3 \end{bmatrix} < 0.$$

Подамо останню нерівність стосовно $X = S_2$ у вигляді (1), де

$$A = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 - H_1 & -H_2 \\ 0 & -H_2^{\mathrm{T}} & -H_3 \end{bmatrix}, \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I_r \\ I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_d \end{bmatrix}.$$

Критерій її сумісності за лемою 2 збігається з наведеними умовами, оскільки

$$W_B^{\mathsf T} A W_B = -H < 0, \ \ W_C^{\mathsf T} A W_C = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & S_1 - H_1 \end{bmatrix} < 0,$$

де

$$W_B = \begin{bmatrix} -I_r & 0 \\ I_r & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}, \ W_C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лему доведено.

Лема 5 [14]. *Нехай виконується матрична нерівність*

$$\begin{bmatrix} W + V^{\mathsf T} Q V & U^{\mathsf T} + V^{\mathsf T} Q D \\ U + D^{\mathsf T} Q V & R + D^{\mathsf T} Q D - P \end{bmatrix} < 0,$$

де $D, U, V, W = W^{\mathsf T} \le 0, \ R = R^{\mathsf T} \ge 0, \ P = P^{\mathsf T} > 0$ *і* $Q = Q^{\mathsf T} > 0$ *— матриці відповідних розмірів. Тоді для довільної матриці* K *із еліпсоїда* $\mathbf{K} = \{K : K^{\mathsf T} P K \le Q\}$ *визначений оператор* $\mathbf{D}(K) = (I - KD)^{-1} K$ *і виконується матрична нерівність*

$$W + U^{\mathsf T} \mathbf{D}(K) V + V^{\mathsf T} \mathbf{D}^{\mathsf T}(K) U + V^{\mathsf T} \mathbf{D}^{\mathsf T}(K) \ R \ \mathbf{D}(K) V < 0.$$

Зважений критерій якості допустимих дескрипторних систем

Розглянемо клас лінійних дискретних систем без керування

$$E x_{t+1} = A x_t + B w_t, \ \ z_t = C x_t + D w_t, \ \ t = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

де $x_t \in \mathbf{R}^n$, $w_t \in \mathbf{R}^s$ і $z_t \in \mathbf{R}^k$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу системи, E, A, B, C і D — матриці відповідних розмірів. Введемо показник якості даної системи стосовно її вектора виходу:

$$J = \sup_{(w, x_0) \in \mathbf{\Omega}} \frac{\| z \|_Q}{\sqrt{\| w \|_P^2 + x_0^{\mathsf T} X_0 x_0}}, \tag{4}$$

де $\| z \|_Q^2 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} z_t^{\mathsf T} Q z_t$, $\| w \|_P^2 = \sum\limits_{t=0}^{\infty} w_t^{\mathsf T} P w_t$, $\mathbf{\Omega}$ — множина пар (w, x_0), для яких система має розв'язок і виконується нерівність $0 < \| w \|_P^2 + x_0^{\mathsf T} X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^{\mathsf T} > 0$, $Q = Q^{\mathsf T} > 0$ та $X_0 = X_0^{\mathsf T} \ge 0$ — деякі вагові матриці.

Нехай надалі $X_0 = E^{\mathsf T} H E$, де $H = H^{\mathsf T} > 0$ — задана матриця, $\operatorname{rank} E = \rho \ne 0$ і $E_0 = W_{E^{\mathsf T}}$.

Вважаємо, що вектор зовнішніх збурень w_t обмежений за зваженою l_2-нормою $\| w \|_P$, а x_0 — невідомий початковий вектор. Вектор збурень w_t і початковий вектор x_0 називаються найгіршими стосовно показника якості J, якщо на їхніх значеннях у (4) досягається супремум, тобто $\| z \|_Q^2 = J^2 (\| w \|_P^2 + x_0^{\mathsf T} X_0 x_0)$. У [22] запропоновано метод знаходження таких векторів.

 ISSN 2786-6491

Вираз (4) при $x_0 \in \operatorname{Ker} E$ позначимо J_0. Очевидно, що $J_0 \le J$. Значення J_0 (J) характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх (зовнішніх і початкових) збурень у системі (3). У випадку вагових матриць $P = I_s$, $Q = I_k$ і $X_0 = \beta I_n$ показник якості (4) відомий [16]. При цьому J_0 збігається з H_∞-нормою передатної матричної функції системи

$$\| G_{zw} \|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(G^\top(-i\omega)G(i\omega))}, \ \ G(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1} B + D.$$

Якщо $J \le 1$, то система (3) є неекспансивною щодо її характеристики J.

Нехай в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ регулярна, тобто $\det F(\lambda) \ne 0$ $(\lambda \in \mathbf{C})$. Канонічна форма Веєрштрасса регулярної в'язки матриць має вигляд [23]

$$LF(\lambda)R = \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ 0 & N - \lambda I_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де власні значення матриці A_1 утворюють скінченний спектр $\sigma(F)$, N — нільпотентна матриця індексу ν, а L і R — деякі невироджені матриці. В'язка матриць $F(\lambda)$ називається стійкою, якщо $|\lambda| < 1$ $\forall \lambda \in \sigma(F)$, тобто $\rho(A_1) < 1$, і причинною, якщо $\nu = 1$, тобто $N = 0$. Система (3) називається допустимою, якщо відповідна в'язка матриць $F(\lambda)$ регулярна, стійка і причинна [6].

Згідно з (5) динамічна підсистема причинної системи має вигляд

$$x_{1t+1} = A_1 x_{1t} + B_1 w_t, \ \ z_t = C_1 x_{1t} + D_1 w_t, \ \ t = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

де $x_{1t} \in \mathbf{R}^r$, $x_{2t} \in \mathbf{R}^{n-r}$, $x_t = R \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}$, $LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, $CR = [C_1 \ C_2]$, $D_1 = D - C_2 B_2$,

причому показники якості типу (4) для систем (3) і (6) збігаються.

Лема 6. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) система (3) є допустимою;

2) існує невироджена матриця $X = X^\top$, яка задовольняє систему ЛМН

$$A^\top XA - E^\top XE < 0, \ \ E^\top XE \ge 0;$$

3) існують матриці $S = S^\top > 0$ і $\Delta = \Delta^\top$, що задовольняють співвідношення

$$A^\top (S + \Delta) A - E^\top SE < 0, \ \ E^\top \Delta E = 0;$$

4) існують матриці $S = S^\top > 0$ і F, що задовольняють ЛМН

$$A^\top SA - E^\top SE + FE_0^\top A + A^\top E_0 F^\top < 0.$$

Еквівалентність тверджень 1) та 2) леми 6 встановлена в [7], а доведення еквівалентності тверджень 1) та 4) наведено в [8]. Очевидно, що твердження 2) є наслідком твердження 3), оскільки $E^\top XE = E^\top SE$ при $X = S + \Delta$. Навпаки, якщо у твердженні 2)

$$X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^\top & X_3 \end{bmatrix} L, \ \ LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \ \ LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

то $N=0,\ \ X_1=X_1^{\mathsf T}>0,\ \ X_1-A_1^{\mathsf T}X_1A_1>0$ і матриці S і Δ у твердженні 3) можна побудувати у вигляді

$$S=X-\Delta=L^{\mathsf T}\begin{bmatrix} X_1 & X_2-\Delta_2 \\ X_2^{\mathsf T}-\Delta_2^{\mathsf T} & X_3-\Delta_3 \end{bmatrix}L,\ \ \Delta=L^{\mathsf T}\begin{bmatrix} 0 & \Delta_2 \\ \Delta_2^{\mathsf T} & \Delta_3 \end{bmatrix}L, \tag{7}$$

де $\Delta_3<X_3-(X_2-\Delta_2)^{\mathsf T}X_1^{-1}(X_2-\Delta_2)$.

У [9] встановлено, що система (3) є допустимою тоді і лише тоді, коли

$$A^{\mathsf T}(S+E_0^{\mathsf T}TE_0)A-E^{\mathsf T}SE<0$$

для деяких матриць $S=S^{\mathsf T}>0$ і $T=T^{\mathsf T}$. Даний факт є наслідком еквівалентності тверджень 1) і 3) леми 6 при використанні розв'язків матричного рівняння $E^{\mathsf T}\Delta E=0$ типу $\Delta=E_0TE_0^{\mathsf T}$. Довільний симетричний розв'язок даного рівняння у випадку $N=0$ має таку структуру:

$$\Delta=E_0G^{\mathsf T}+GE_0^{\mathsf T}=L^{\mathsf T}\begin{bmatrix} 0 & G_1 \\ G_1^{\mathsf T} & G_2+G_2^{\mathsf T} \end{bmatrix}L, \tag{8}$$

де $G=L^{\mathsf T}\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix},\ \ E_0=L^{\mathsf T}\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$.

Для системи (3) визначимо матричні оператори

$$\Phi(X)=\begin{bmatrix} A^{\mathsf T}XA-E^{\mathsf T}XE+C^{\mathsf T}QC & A^{\mathsf T}XB+C^{\mathsf T}QD \\ B^{\mathsf T}XA+D^{\mathsf T}QC & B^{\mathsf T}XB+D^{\mathsf T}QD-\gamma^2P \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(\Delta)=\begin{bmatrix} A^{\mathsf T} \\ B^{\mathsf T} \end{bmatrix}\Delta[A\ B],\ \ \Gamma_1(F)=\begin{bmatrix} A^{\mathsf T} \\ B^{\mathsf T} \end{bmatrix}E_0F^{\mathsf T}+FE_0^{\mathsf T}[A\ B].$$

Лема 7. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) система (3) є допустимою і виконується оцінка $J_0<\gamma$;

2) існує матриця $X=X^{\mathsf T}$, *що задовольняє систему ЛМН*

$$\Phi(X)<0,\ \ E^{\mathsf T}XE\ge 0;$$

3) існують матриці $S=S^{\mathsf T}>0$ *і* $\Delta=\Delta^{\mathsf T}$, *що задовольняють співвідношення*

$$\Phi(S)+\Gamma(\Delta)<0,\ \ E^{\mathsf T}\Delta E=0;$$

4) існують матриці $S=S^{\mathsf T}>0$ *і* $T=T^{\mathsf T}$, *що задовольняють ЛМН*

$$\Phi(S)+\Gamma(\Delta)<0,\ \ \Delta=E_0TE_0^{\mathsf T};$$

5) існують матриці $S=S^{\mathsf T}>0$ *і* G, *що задовольняють ЛМН*

$$\Phi(S)+\Gamma(\Delta)<0,\ \ \Delta=E_0G^{\mathsf T}+GE_0^{\mathsf T};$$

ISSN 2786-6491

6) існують матриці $S = S^{\mathsf T} > 0$ і F, що задовольняють ЛМН

$$\Phi(S) + \Gamma_1(F) < 0.$$

Доведення. Покладемо $\tilde w_t = \tilde P w_t$ і $\tilde z_t = \tilde Q z_t$, де $\tilde P$ і $\tilde Q$ — множники в розкладах додатно визначених матриць $P = \tilde P^{\mathsf T} \tilde P$ і $Q = \tilde Q^{\mathsf T} \tilde Q$. Тоді система (3) набуває вигляду

$$Ex_{t+1} = Ax_t + \tilde B \tilde w_t, \quad \tilde z_t = \tilde C x_t + \tilde D w_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

де $\tilde B = BP^{-1}$, $\tilde C = \tilde Q C$ і $\tilde D = \tilde Q D \tilde P^{-1}$. При цьому $\| z \|_Q = \| \tilde z \|_{I_k}$, $\| w \|_P = \| \tilde w \|_{I_s}$ і

$$\Phi(X) = U^{\mathsf T} \tilde\Phi(X) U, \tag{10}$$

$$\tilde\Phi(X) = \begin{bmatrix} A^{\mathsf T} XA - E^{\mathsf T} XE + \tilde C^{\mathsf T} Q \tilde C & A^{\mathsf T} X \tilde B + \tilde C^{\mathsf T} Q \tilde D \\ \tilde B^{\mathsf T} XA + \tilde D^{\mathsf T} Q \tilde C & \tilde B^{\mathsf T} X \tilde B + \tilde D^{\mathsf T} Q \tilde D - \gamma^2 P \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & \tilde P \end{bmatrix}.$$

Згідно з [7] система (9) є допустимою і її показник якості $\tilde J_0 = J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН $\tilde\Phi(X) < 0$ і $E^{\mathsf T} XE \ge 0$. Оскільки $\tilde\Phi(X) < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Phi(X) < 0$, то твердження 1) і 2) еквівалентні (див. також [22]).

Очевидно, що твердження 2) є наслідком твердження 3). Дійсно, якщо шукати розв'язок матричної нерівності $\Phi(X) < 0$ у вигляді $X = S + \Delta$ при $S = S^{\mathsf T} > 0$, то

$$\Phi(X) = \Phi(S) + \Gamma(\Delta) < 0, \quad E^{\mathsf T} XE = E^{\mathsf T} SE \ge 0.$$

Навпаки, при виконанні твердження 2) з матрицею X система (3) є допустимою і матриці S і Δ у твердженні 3) можна вибрати у вигляді (7). Отже, твердження 2) і 3) еквівалентні.

Оскільки виконуються співвідношення (10) і

$$\Phi(S) + \Gamma(\Delta) = U^{\mathsf T} [\tilde\Phi(S) + \tilde\Gamma(\Delta)] U, \quad \tilde\Gamma(\Delta) = \begin{bmatrix} A^{\mathsf T} \\ \tilde B^{\mathsf T} \end{bmatrix} \Delta [A \; \tilde B],$$

то згідно з [9] система (9) є допустимою і її показник якості $\tilde J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли $\tilde\Phi(S) + \tilde\Gamma(\Delta) < 0$ і $\Delta = E_0 T E_0^{\mathsf T}$ для деяких матриць $S = S^{\mathsf T} > 0$ і $T = T^{\mathsf T}$. Це означає, що твердження 1) і 4) еквівалентні. Аналогічно еквівалентність тверджень 1) і 6) є наслідком теореми 5.6 із [8] та співвідношень (10) і

$$\Phi(S) + \Gamma_1(F) = U^{\mathsf T} [\tilde\Phi(S) + \tilde\Gamma_1(\tilde F)] U, \quad \tilde\Gamma_1(\tilde F) = \begin{bmatrix} A^{\mathsf T} \\ \tilde B^{\mathsf T} \end{bmatrix} E_0 \tilde F^{\mathsf T} + \tilde F E_0^{\mathsf T} [A \; \tilde B],$$

де $\tilde F = U^{-1\mathsf T} F$. Еквівалентність тверджень 3) і 5) випливає із зображення довільного розв'язку рівняння $E^{\mathsf T} \Delta E = 0$ у вигляді (8).

Лему доведено.

Лема 8. *Наступні твердження еквівалентні:*

1) система (3) є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$;

2) існує матриця $X = X^{\mathsf T}$, що задовольняє співвідношення

$$\Phi(X) < 0,\ \ 0 \le E^{\mathsf T} X E \le \gamma^2 X_0,\ \ \mathrm{rank}\,(E^{\mathsf T} X E - \gamma^2 X_0) = \rho; \tag{11}$$

3) існують матриці $S = S^{\mathsf T} > 0$ *і* $\Delta = \Delta^{\mathsf T}$, *що задовольняють співвідношення*

$$\Phi(S) + \Gamma(\Delta) < 0,\ \ E^{\mathsf T} \Delta E = 0,\ \ S < \gamma^2 H; \tag{12}$$

4) існують матриці $S = S^{\mathsf T} > 0$ *і* G, *що задовольняють систему ЛМН*

$$\Phi(S) + \Gamma(\Delta) < 0,\ \ \Delta = E_0 G^{\mathsf T} + G E_0^{\mathsf T},\ \ S < \gamma^2 H. \tag{13}$$

Доведення. Застосуємо конгруентне перетворення

$$V^{\mathsf T} \Phi(X) V = \begin{bmatrix} \Phi_1(X_1) & & A_1^{\mathsf T} X_2 + C_1^{\mathsf T} Q C_2 \\ & & B_1^{\mathsf T} X_2 + D_1^{\mathsf T} Q C_2 \\ X_2^{\mathsf T} A_1 + C_2^{\mathsf T} Q C_1 & X_2^{\mathsf T} B_1 + C_2^{\mathsf T} Q D_1 & X_3 + C_2^{\mathsf T} Q C_2 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

де $V = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & I_{n-r} \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}$, $X = L^{\mathsf T} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^{\mathsf T} & X_3 \end{bmatrix} L.$

За умов (11) система (3) є допустимою (див. лему 7) і виконуються такі співвідношення:

$$\Phi_1(X_1) < 0,\ \ 0 < X_1 < \gamma^2 H_1, \tag{15}$$

$$E^{\mathsf T} X E - \gamma^2 X_0 = R^{-1\mathsf T} \begin{bmatrix} X_1 - \gamma^2 H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1} \le 0,$$

$$x_0^{\mathsf T} X_0 x_0 = x_{10}^{\mathsf T} H_1 x_{10},\ \ H = L^{\mathsf T} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^{\mathsf T} & H_3 \end{bmatrix} L.$$

При цьому $\rho(A_1) < 1$ і $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли система ЛМН (15) сумісна [15].

Отже, при виконанні співвідношень (11) система (3) допустима і виконується оцінка $J < \gamma$. Навпаки, якщо система (3) допустима і $J < \gamma$, то $\rho(A_1) < 1$ і для деякої матриці $X_1 = X_1^{\mathsf T}$ виконуються співвідношення (15). При цьому, якщо покласти $X_2 = 0$ і $X_3 = -C_2^{\mathsf T} Q C_2 - \varepsilon^{-1} I_{n-r}$, то згідно з (14) і лемою Шура матрична нерівність $\Phi(X) < 0$ набуває вигляду

$$\Phi_1(X_1) + \varepsilon \begin{bmatrix} C_1^{\mathsf T} \\ D_1^{\mathsf T} \end{bmatrix} Q C_2 C_2^{\mathsf T} Q\, [C_1, D_1] < 0.$$

Умова $\Phi_1(X_1) < 0$ дозволяє вибрати таке $\varepsilon > 0$, при якому ця нерівність виконується. Це означає, що твердження 2) є наслідком твердження 1).

Якщо виконуються співвідношення (12), то матриця $X = S + \Delta$ задовольняє співвідношення (11), тобто твердження 2) є наслідком твердження 3). Навпаки, якщо для деякої матриці X виконуються співвідношення (11), то мат-

 ISSN 2786-6491

риці S і Δ, що задовольняють (12), можна побудувати у вигляді (7). При цьому $0 < X_1 < \gamma^2 H_1$ і на основі леми 4 можна вибрати блоки Δ_2 і Δ_3 так, щоб

$$0 < \begin{bmatrix} X_1 & X_2 - \Delta_2 \\ X_2^{\mathsf{T}} - \Delta_2^{\mathsf{T}} & X_3 - \Delta_3 \end{bmatrix} < \gamma^2 \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^{\mathsf{T}} & H_3 \end{bmatrix},$$

тобто $0 < S < \gamma^2 H$.

Еквівалентність тверджень 3) і 4) для відповідних співвідношень (12) і (13) є наслідком зображення довільного розв'язку рівняння $E^{\mathsf{T}} \Delta E = 0$ у вигляді (8).

Лему доведено.

Із лем 7 і 8 випливають алгоритми обчислення характеристик J_0 і J системи (3) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач. Наприклад,

$$J_0 = \inf \{\gamma : \Phi(S) + \Gamma(\Delta) < 0, S = S^{\mathsf{T}} > 0, E^{\mathsf{T}} \Delta E = 0\},$$

$$J = \inf \{\gamma : \Phi(S) + \Gamma(\Delta) < 0, 0 < S < \gamma^2 H, E^{\mathsf{T}} \Delta E = 0\}.$$

Лінійні дескрипторні системи керування зі збуреннями

Розглянемо лінійну дескрипторну систему з керованими і спостережуваними виходами:

$$\begin{aligned} E x_{t+1} &= A x_t + B_1 w_t + B_2 u_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \\ y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u_t, \end{aligned} \tag{16}$$

де $x_t \in \mathbf{R}^n$, $u_t \in \mathbf{R}^m$, $w_t \in \mathbf{R}^s$, $z_t \in \mathbf{R}^k$ і $y_t \in \mathbf{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\operatorname{rank} E = \rho \le n$. Нас цікавлять закони керування, які понижують характеристики J_0 і J типу (4) і, зокрема, забезпечують умови неекспансивності замкненої системи щодо даних характеристик. Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують значення J, називаються J-оптимальними. J_0-оптимальне керування у разі одиничних вагових матриць P і Q є H_∞-оптимальними.

Нехай керування у системі (16) виконує статичний регулятор за спостережуваним виходом

$$u_t = K y_t, \quad K \in \mathbf{R}^{m \times l}. \tag{17}$$

Тоді за умови $\det(I_m - K D_{22}) \ne 0$ замкнена система має вигляд

$$E x_{t+1} = A_0 x_t + B_0 w_t, \quad z_t = C_0 x_t + D_0 w_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

де

$$A_0 = A + B_2 K_0 C_2, \quad B_0 = B_1 + B_2 K_0 D_{21}, \quad C_0 = C_1 + D_{12} K_0 C_2,$$

$$D_0 = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21}, \quad K_0 = (I_m - K D_{22})^{-1} K.$$

Перепишемо матричну нерівність $\Phi(X) < 0$ для системи (18) у вигляді квадратичної матричної нерівності щодо K_0:

$$\Phi_0(X) = W(X) + U^{\mathsf{T}}(X)K_0V + V^{\mathsf{T}}K_0^{\mathsf{T}}U(X) + V^{\mathsf{T}}K_0^{\mathsf{T}}R(X)K_0V < 0, \tag{19}$$

де

$$W(X) = \begin{bmatrix} A^{\mathsf{T}}XA - E^{\mathsf{T}}XE + C_1^{\mathsf{T}}QC_1 & A^{\mathsf{T}}XB_1 + C_1^{\mathsf{T}}QD_{11} \\ B_1^{\mathsf{T}}XA + D_{11}^{\mathsf{T}}QC_1 & B_1^{\mathsf{T}}XB_1 + D_{11}^{\mathsf{T}}QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$U(X) = [B_2^{\mathsf{T}}XA + D_{12}^{\mathsf{T}}QC_1 \;\; B_2^{\mathsf{T}}XB_1 + D_{12}^{\mathsf{T}}QD_{11}], \;\; V = [C_2 \;\; D_{21}],$$

$$R(X) = B_2^{\mathsf{T}}XB_2 + D_{12}^{\mathsf{T}}QD_{12}.$$

Якщо виконуються додаткові умови

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} = m, \;\; \operatorname{rank}[E \;\; B_2] = \operatorname{rank} E, \tag{20}$$

то $R(X) = B_2^{\mathsf{T}}SB_2 + D_{12}^{\mathsf{T}}QD_{12} > 0$ при $X = S + \Delta$, $S = S^{\mathsf{T}} > 0$ і $E^{\mathsf{T}}\Delta E = 0.$ Зазвичай матриця при керуванні B_2 у практичних задачах має повний ранг m, при цьому перша умова в (20) виконується автоматично. Друга умова в (20) означає, що $B_2 = EZ$ для деякої матриці Z.

Отже, застосовуючи леми 7 і 8, а також умови *б*) і *д*) леми 3 для матричної нерівності (19), маємо таке твердження.

Теорема 1. *Нехай існують матриці* $S = S^{\mathsf{T}} > 0$ *і* G, *при яких виконується система матричних нерівностей*

$$R(X) > 0, \;\; W(X) < U^{\mathsf{T}}(X)R^{-1}(X)U(X), \;\; W_V^{\mathsf{T}}W(X)W_V < 0, \tag{21}$$

де $X = S + E_0G^{\mathsf{T}} + GE_0^{\mathsf{T}}$. *Тоді існує керування (17), при якому замкнена система (18) є допустимою і її критерій якості* $J_0 < \gamma$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо разом з (21) виконується ЛМН*

$$S < \gamma^2 H. \tag{22}$$

Навпаки, якщо для деякого керування (17) система (18) допустима і її критерій якості $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, *то за додаткових умов (20) система матричних нерівностей (21) ((21) і (22)) сумісна щодо* $S = S^{\mathsf{T}} > 0$ *і* G.

За умов теореми 1 матрицю шуканого регулятора (17) можна побудувати у вигляді $K = K_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}$, де K_0 — розв'язок квадратичної матричної нерівності (19). Зазначимо, що у випадку застосування статичного регулятора за станом $V = [I_n \;\; 0]$, $W_V^{\mathsf{T}} = [0 \;\; I_s]$ і остання нерівність в (21) спрощується і має вигляд $B_1^{\mathsf{T}}XB_1 < \gamma^2 P - D_{11}^{\mathsf{T}}QD_{11}$.

Визначимо у просторі матриць регулятора (17) еліпсоїд

$$\mathsf{K} = \{K \in \mathrm{R}^{m \times l} : K^{\mathsf{T}}\Lambda K \le \Theta\},$$

де $\Lambda = \Lambda^{\mathsf{T}} > 0$ і $\Theta = \Theta^{\mathsf{T}} > 0$ — задані матриці. На основі лем 5, 7, 8 і співвідношення (19) маємо наступний результат.

Теорема 2. *Нехай для деяких матриць* $S = S^{\mathsf{T}} > 0$ *і* G *виконується система ЛМН*

$$R(X) \geq 0, \quad \begin{bmatrix} W(X)+V^{\mathsf{T}}\Theta V & U^{\mathsf{T}}(X)+V^{\mathsf{T}}\Theta D_{22} \\ U(X)+D_{22}^{\mathsf{T}}\Theta V & R(X)+D_{22}^{\mathsf{T}}\Theta D_{22}-\Lambda \end{bmatrix} < 0, \tag{23}$$

де $X = S + E_0 G^{\mathsf{T}} + G E_0^{\mathsf{T}}$. *Тоді для будь-якого керування (17) при* $K \in \mathsf{K}$ *замкнена система (18) є допустимою і її критерій якості* $J_0 < \gamma$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо разом з (23) виконується ЛМН (22).*

Зазначимо, що матриці Λ і Θ, які визначають еліпсоїд K, входять у вираз (23) лінійно. Тому в теоремі 2 вони можуть бути як заданими, так і шуканими компонентами розв'язку ЛМН (23). Очевидно, що для виконання умов (23) необхідно $D_{22}^{\mathsf{T}}\Theta D_{22} < \Lambda$. За додаткових умов (20) перша нерівність в (23) виконується автоматично.

Можна отримати аналоги теорем 1 і 2 для системи (16) з динамічним регулятором порядку $r \leq n$

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

де $\xi \in \mathbf{R}^r$ і $\xi_0 = 0$, застосовуючи зображення замкненої системи у розширеному фазовому просторі $\mathbf{R}^{n+r}$ у вигляді (18) (див. аналогічне зображення для неперервних систем [21]).

Чисельний приклад

Розглянемо дискретну модель керування електричного кола, яка описується у вигляді (16) з такими матрицями [24]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ -0,05 & -0,05 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,05 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [5 \; 0], \; C_2 = I_2, \; D_{11} = 0, \; D_{12} = 0, \; D_{21} = 0_{2\times 1}, \; D_{22} = 0_{2\times 1}.$$

Визначимо показник якості системи J у вигляді (4) при $P = 1$, $Q = 1$ і $H = 5I_2$. За відсутності керування дана система допустима і її характеристики $J_0 = 0,70711 < J = 1,84196$.

Поклавши $\gamma = 2,5$ і застосовуючи блок розв'язку (Solve Block) комп'ютерної системи Mathcad Prime 7.0 [18], знайдено матриці

$$S = \begin{bmatrix} 12,50100 & -4,79817 \\ -4,79817 & 30,02196 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 16,23211 \\ -13,65501 \end{bmatrix},$$

що задовольняють умови теореми 1, а також статичний регулятор за станом

$$u_t = K_* x_t, \quad K_* = -[7,89937 \; 1,96724],$$

при якому замкнена система (18) є допустимою і має критерій якості $J = 1,58113 < \gamma$. При цьому $J_0 = 0,35362$ і її скінченний спектр формує одне власне значення: $\lambda_1 = 0,0002$.

Далі, розв’язуючи систему ЛМН (23) стосовно $S = S^{\mathsf{T}} > 0$ і G за допомогою засобів LMI Toolbox комп’ютерної системи Matlab [17], на основі теореми 2, знайдено еліпсоїдальну множину матриць статичного регулятора за станом

$$u_t = Kx_t, \quad K = K_* + \tilde{K}, \quad \|\tilde{K}\| \le 1,46647,$$

при якому система (18) є допустимою і для її критерію якості J виконується задана оцінка $J < \gamma = 2,5$. При цьому $\tilde{K}^{\mathsf{T}} \Lambda \tilde{K} \le \Theta$ або, що те саме, $\tilde{K}\Theta^{-1}\tilde{K}^{\mathsf{T}} \le \Lambda^{-1}$, де $\Lambda = 0,465$ і $\Theta = I_2$.

Висновок

Для класу лінійних дескрипторних систем з дискретним часом досліджено узагальнену задачу H_∞-керування із застосуванням показників якості, що характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Запропоновано нові методи оцінки таких показників якості, що зводяться до розв’язання ЛМН. Відомі методи оцінки H_∞-норми матричної передатної функції системи (твердження типу «bounded real lemma» [7–9,11]) є наслідками отриманих тверджень для зважених показників якості. Встановлено необхідні та достатні умови існування статичного регулятора за спостережуваним виходом, при якому замкнена система є допустимою (регулярною, стійкою і причинною) та виконується бажана оцінка використовуваних показників якості. У термінах ЛМН запропоновано методику побудови еліпсоїдальної множини матриць таких регуляторів, що забезпечують замкненій системі вказані властивості.

Основні висновки роботи (леми 7, 8 і теореми 1, 2) отримано на основі допоміжних тверджень, які мають перспективу застосування у багатьох задачах аналізу та синтезу динамічних систем. Допоміжна лема 4, яка використана при доведенні леми 8, у даній роботі сформульована вперше.

A. Mazko

ESTIMATION OF THE WEIGHTED INFLUENCE LEVEL OF BOUNDED DISTURBANCES ON THE QUALITY OF DESCRIPTOR DISCRETE-TIME CONTROL SYSTEMS

Alexey Mazko

Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

mazkoag@gmail.com

In the classical H_∞-control theory, the performance measure of continuous systems with zero initial state is the damping level of external (exogenous) disturbances corresponding to the maximal value of the ratio of the L_2-norms for vectors of regulated output of the object and disturbances. In practice, stabilizing control laws in the form of static or dynamic output feedback controllers that minimizing such characteristics of controlled objects ensure the desired quality and high reliability of their functioning in real conditions. In this paper, for a class of linear descriptor (singular)

 ISSN 2786-6491

discrete-time control systems, the problems of evaluation and achievement of the generalized performance measure are investigated, the measure characterize the weighted damping level of the bounded external disturbances, as well as the initial disturbances caused by an unknown initial vector. New criteria are established for satisfying the prescribed upper estimate of the specified performance measure, which are reduced to solving the linear matrix inequalities (LMI). The well-known methods for estimating the H_∞-norm of the matrix transfer function of a linear descriptor system (statements of the «bounded real lemma» type) follow from the obtained statements for weighted performance measure. When considering the problem of synthesis for a linear descriptor system with regulated and observed outputs, the necessary and sufficient conditions in the form of three matrix inequalities are established for the existence of a static output-feedback controller under which the closed-loop system is admissible (regular, stable and causal) and the desired estimates of the used weighted performance measure are achieved. In terms of LMI, a technique is proposed for constructing an ellipsoidal set of matrices of a static output-feedback controller which provides the closed-loop system with the specified properties. Moreover, the positive definite matrices that define this ellipsoidal set can be both given and sought components of the LMI solution. To illustrate the obtained results and the possibility of numerical implementation of the proposed methods with the help of computer tools, an example of a descriptor control system of an electric circuit is presented.

Keywords: descriptor system, admissible system, damping level of perturbations, H_∞-control; linear matrix inequality (LMI).

ПОСИЛАННЯ

1. Dai L. Singular control systems. New York : Springer, 1989. 343 p. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0002475.
2. Riaza R. Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications. Singapore : World Sci., 2008. 344 p. DOI: https://doi.org/10.1142/6746.
3. Guang-Ren Duan. Analysis and design of descriptor linear systems. New York etc. : Springer, 2010. 516 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6397-0.
4. Yu Feng, Mohamed Yagoubi. Robust control of linear descriptor systems. Singapore : Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2017. 156 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-10-3677-4.
5. Campbell S., Ilchmann A., Mehrmann V., Reis T. (Eds.). Applications of differential-algebraic equations: examples and benchmarks. *Differential-Algebraic Equations Forum*. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019. 320 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-03718-5.
6. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М. : Физматлит, 2015. 272 с.
7. Hsiung K.-L., Lee L. Lyapunov inequality and bounded real lemma for discrete-time descriptor systems. *IEE Proc.-Control Theory Appl.* 1999. Vol. 146, N 4. P. 327–331. DOI: https://doi.org/10.1049/ip-cta:19990451.
8. Xu S., Lam J. Robust control and filtering of singular systems. *Lecture Notes in Control and Informati on Sciences.* Berlin : Springer-Verlag, 2006. 246 p. DOI: https://doi.org/2006.10.1007/11375753.
9. Zhang G., Xia Y., Shi P. New bounded real lemma for discrete-time singular systems. *Automatica.* 2008. Vol. 44. P. 886–890. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.07.017.
10. Yung C.-F. H_∞ control for linear discrete-time descriptor systems: State feedback and full information cases. *IFAC Proceedings Volumes*. 2008. Vol. 41, N 2. P. 10003–10008. DOI: https://doi.org/10.3182/20080706 -5-KR-1001.01693.
11. Chadli M., Darouach M. Novel bounded real lemma for discrete-time descriptor systems: Application to H_∞ control design. *Automatica.* 2012. Vol. 48. P. 449–453. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.10.003.

12. Feng Y., Yagoubi M. On state feedback H_∞ control for discrete-time singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2013. Vol. 58, N 10. P. 2674–2679. DOI: https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2256051.
13. Belov A.A., Andrianova O.G. Robust state-feedback H_∞ control for discrete-time descriptor systems with norm-bounded parametric uncertainties. *International Journal of Systems Science*. 2019. P. 1–10. DOI: https://doi.org/10.1080/00207721.2019.1599079.
14. Мазко А.Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств. *Пр. Ін-ту математики НАН України*. 2016. Т. 102. 332 с.
15. Mazko A.G., Kusii S.N. Output stabilization and weighted suppression of disturbances in discrete-time control systems. *Problems of Control and Informatics*. 2020. Vol. 2, N 13. P. 309–321. DOI: 10.1080/17538947.2019.1610807.
16. Balandin D.V., Kogan M.M., Krivdina L.N., Fedyukov A.A. Design of generalized discrete-time H_∞-optimal control over finite and infinite intervals. *Automation and Remote Control*. 2014. Vol. 75, N 1. P. 1–17. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117914010019.
17. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. The LMI control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick : The MathWorks Inc. 1995. 356 p.
18. Воскобойников Ю.Е., Задорожный А.Ф. Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME. Санкт-Петербург : Изд-во «Лань», 2016. 225 с.
19. Fuzhen Zhang (Ed.). The Schur complement and its applications. *Numerical methods and algorithms*. Springer-Verlag New York Inc. 2005. 295 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b105056.
20. Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*. 1994. Vol. 4, N 4. P. 421–448. DOI: https://doi.org/10.1002/rnc.4590040403.
21. Mazko A.G. Weighted estimation and reduction of the influence of bounded perturbations in descriptor control systems. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. Vol. 72, N 11. P. 1742–1757. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-021-01885-3.
22. Мазко О.Г. Зважена оцінка гасіння обмежених збурень у дескрипторних дискретних системах керування. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2019. Т. 16, № 2. С. 85–100.
23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 552 с.
24. Chang X.-H., Wang J. $l_2 - l_\infty$ control for discrete-time descriptor systems. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 144017–144024. DOI: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3121996.

Отримано 01.12.2022