УДК 518.9

А.О. Чикрій

ІГРОВІ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ*

Чикрій Аркадій Олексійович

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, orcid: 0000-0001-9665-9085,

g.chikrii@gmail.com

Математична теорія керування і теорія динамічних ігор мають широкий спектр фундаментальних методів дослідження керованих еволюційних процесів різної природи, що функціонують в умовах конфлікту та невизначеності. При цьому стан процесу може описуватись звичайними диференціальними рівняннями, нестаціонарними системами з параметрами, що залежать від часу, у вигляді багатозначних відображень, диференціально-різницевими та імпульсними системами, рівняннями з частинними похідними. У даній роботі схема методу розв'язуючих функцій (обернених функціоналів Мінковського) застосована до ігрових задач з класичними дробовими похідними Рімана–Ліувілля. Отримані достатні умови зближення за певний гарантований час у класі квазістратегій. Побудова керувань здійснюється на основі теорем вимірного вибору типу Філіпова–Кастена. Розв'язуючі функції при цьому є опорними до ключових багатозначних відображень. Для перевірки умов зближення використані асимптотичні представлення функцій Міттаг–Леффлера. Щоб підтвердити ефективність запропонованої методики, детально розглянуто конфліктно-керований процес з простою матрицею. При цьому розв'язуюча функція знайдена в явному аналітичному вигляді як більший позитивний корінь відповідного квадратного рівняння. На основі методу розв'язуючих функцій дані достатні умови завершення групового переслідування за скінчений час у класі квазістратегій. При нульових матрицях систем, що описують рух переслідувачів та втікача, отримані необхідні і достатні умови зближення типу оточення за Пшеничним.

Ключові слова: конфліктно-керований процес, багатозначне відображення, умова Понтрягіна, розв'язуюча функція.

Вступ

У теорії конфліктно-керованих процесів ключову роль відіграють методи Р. Айзекса [1], Л.С.Понтрягіна [2], М.М. Красовського [3], Б.М. Пшеничного [4].

* Робота виконана за часткової підтримки Національного фонду України. Грант № 2020. 02/0121 «Аналітичні методи та машинне навчання в теорії керування і прийняття рішень за умов конфлікту та невизначеності».

Перший з них пов'язаний з розв'язанням рівняння Гамільтона–Якобі–Белмана–Айзекса — основного рівняння диференціальних ігор. Прямі методи Л.С. Понтрягіна: перший прямий метод та метод альтернованого інтегралу дають умови закінчення гри в заданий час. Добре відома альтернатива М.М. Красовського та, зокрема, правило екстремального прицілювання. T_ε — оператори Б.М. Пшеничного, дають необхідні та достатні умови закінчення гри.

Крім згаданих методів, актуальним є метод розв'язувальних функцій [5]. Він у певній мірі використовує апарат багатозначних відображень та опуклого аналізу. Завдяки своїй універсальності дає можливість розв'язувати ігрові задачі з різною динамікою, задачі групового та почергового зближення, задачі з фазовими обмеженнями оптимізувати конфліктну взаємодію груп керованих об'єктів. Ідеологія розв'язувальних функцій отримала розвиток у вигляді матричних, верхніх та нижніх розв'язувальних функцій першого та другого типу, функцій зсуву, коли не виконана умова Понтрягіна. Згадана методика дозволила встановити функціональну форму першого прямого методу.

Важливою особливістю методу є те, що в конкретних прикладах з еліпсоподібними областями керування розв'язувальні функції — більші позитивні корені квадратних рівнянь, що дає можливість отримати їх в аналітичному вигляді. Крім того, метод розв'язувальних функцій дає повне теоретичне обґрунтування для простих рухів інженерних методів погонної кривої Ейлера, паралельного переслідування, зближення за променем та пропорційної навігації.

У даній роботі основна схема методу розв'язувальних функцій застосовується до дослідження конфліктно-керованих процесів з класичними дробовими похідними.

1. Постановка ігрової задачі зближення для квазілінійної системи з циліндричною термінальною множиною

Розглянемо конфліктно-керовану систему, еволюція якої описується системою дробового порядку в сенсі Римана–Ліувілля:

$$D^\alpha z = Az + \phi(u, v), \quad m-1 < \alpha < m. \tag{1}$$

Тут D^α означає оператор дробового диференціювання в сенсі Римана–Ліувілля. При цьому

$$D^\alpha z = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1} \int_0^t \frac{z(s)}{(t-s)^{\{\alpha\}}} ds,$$

де $[\alpha]$ і $\{\alpha\}$ — відповідно ціла та дробова частина числа α; D^α — лівостороння похідна Рімана–Ліувілля порядку α [6], $k-1 < \alpha < k,\ k \geq 1,\ k$ — натуральне число, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція, що представляє собою інтеграл Ейлера другого роду. Фазовий вектор z належить простору R^n, A — квадратна матриця порядку n, блок керування визначається неперервною за сукупністю змінних функцій $\phi(u, v)$, $\phi : U \times V \to R^n$, де u і v, $u \in U$, $v \in V$ — керуючі параметри відповідно першого і другого гравця, а множини допустимих керувань U і V належать множині $K(R^n)$ непорожніх компактів простору R^n.

Початкові умови процесу (1) задаються у вигляді

$$D^{\alpha-k} z(t)\big|_{t=0} = z_k^0,\ k = 1, ..., m. \tag{2}$$

ISSN 2786-6491

При цьому дробову похідну від'ємного порядку $\alpha - m$ треба розуміти як дробовий інтеграл J^{m-a}. Будемо позначати $z^0 = (z_1^0, ..., z_m^0)$.

Крім динаміки процесу (1) і початкових умов, задана циліндрична термінальна множина

$$M^* = M_0 + M, \tag{3}$$

де M_0 — лінійний підпростір простору R^n, $M \in K(L)$, а $L = M_0^{\perp}$ — ортогональне доповнення до підпростору M_0 в R^n.

При вибраних керуваннях першого і другого гравців у вигляді вимірних за Лебегом функцій $u(t)$ і $v(t)$ зі значеннями відповідно із областей U і V задача Коші для процесу (1) з початковими умовами (2) має єдиний розв'язок $z(t)$. Крім того, враховуючи припущення відносно параметрів процесу (1), цей розв'язок абсолютно неперервний: $z(\cdot) \in A^1(0, \infty)$.

Розглянемо таку ігрову ситуацію. Перший гравець намагається вивести траєкторію процесу (1) на множину (3), а другий — максимально віддалити момент попадання траєкторії на термінальну множину. Прийнявши сторону першого гравця, будемо вважати, що керування другого гравця належить класу $\Omega_V = \Omega_V[0, \infty) = \{v(\cdot) \in L_{\text{loc}}^1[0, \infty) : v(t) \in V,\ t \in R_+\}$, а перший гравець в кожний момент часу t, $t \in R_+$, формує своє керування на основі інформації про z^0 і попередньої історії $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ керувань другого гравця включно до моменту t:

$$u(t) = u(z^0, v_t(\cdot)),\ u(t) \in U. \tag{4}$$

Таким чином, перший гравець вибирає своє керування із класу квазістратегій [3].

2. Схема методу розв'язувальних функцій

Застосуємо схему методу розв'язувальних функцій, щоб отримати достатні умови закінчення динамічної гри (1), (3) за допомогою квазістратегій (4).

Позначимо Π оператор ортогонального проєктування із R^n на L. Покладемо $\phi(U, u) = \{\phi(u, v) : u \in U\}$.

Розглянемо багатозначне відображення

$$W(t, v) = \Pi t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})\phi(U, v),\ W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), \tag{5}$$

визначене на множинах $R_+ \times V$ і R_+ відповідно.

Умова 1.

$$W(t) \neq \varnothing,\ t \in R_+. \tag{6}$$

Дана умова — аналог умови Понтрягіна. Вона відображає деякий тип переваги першого гравця над другим за ресурсами керування (5), (6). У випадку, якщо умова 1 не виконується, тобто для деяких $t \in R_+$, $W(t) = \varnothing$, будемо використовувати модифіковану умову. Її суть така, що співвідношення між ресурсами керування гравців змінюється на користь першого гравця, а саме, в ті моменти, коли $W(t) = \varnothing$, ресурси керування вирівнюються, а витрачений на це ресурс надалі віднімається із термінальної множини. Формально процедура представляється таким чином.

Нехай $C(t)$ — вимірна обмежена по t матрична функція розміром $n \times n$. Розглянемо багатозначні відображення

$$W^*(t, v) = \Pi t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(At^{\alpha}) \phi(U, C(t)v), \; W^*(t) = \bigcap_{v \in V} W^*(t, v), \tag{7}$$

$$M(t) = M \overset{*}{-} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \Pi E_{\alpha, \alpha}(At^{\alpha}) \phi^*(\tau, U, V) d\tau,$$

де $\phi^*(t, u, v) = \phi(u, v) - \phi(u, C(t)v)$.

Умова 2. Існує така вимірна обмежена матрична функція $C(t)$, що виконується (7):

$$W^*(t) \neq \varnothing, \; \forall t \in R_+, \tag{8}$$

$$M(t) \neq \varnothing, \; \forall t \in R_+. \tag{9}$$

Таким чином, умова Понтрягіна 1 замінюється на пару умов (8), (9). Легко бачити, що при $C(t) = I$ умова (9) виконана автоматично, а умова (8) співпадає з умовою (6), оскільки в такому випадку $W^*(t) \equiv W(t)$. Звідси витікає, що модифікована умова Понтрягіна 2, взагалі кажучи, — менш обмежувальне припущення, ніж умова Понтрягіна 1.

У силу властивостей параметрів процесу (1) багатозначне відображення $\phi(U, C(t)v), v \in V,$ неперервне в метриці Хаусдорфа. Таким чином, враховуючи аналітичні властивості узагальненої матричної функції Міттаг–Леффлера, багатозначне відображення $W^*(t, v)$ вимірне по $t, t \in (0, \infty)$, і замкнутозначне по $v, v \in V$.

У силу властивостей параметрів системи (1) відображення $W^*(t, v)$ є $L \times B$-вимірним по t, v. Таким чином, згідно з [7], багатозначне відображення $W^*(t)$ також вимірне по $t, t \in R_+$. Отже, відображення $W^*(t, v), \; W^*(t)$ нормальне [8].

Із умови 2 і теореми про вимірний вибір витікає, що існує хоча б один вимірний селектор $\gamma(\cdot)$, такий що $\gamma(\cdot) \in W^*(t)$, $t \in R_+$. Позначимо Γ множину всіх таких селекторів.

Позначимо також $h(t, z^0)$ розв'язок однорідної системи (1) при $\phi(u, v) \equiv 0.$ Таким чином,

$$h(t, z^0) = \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha, \alpha-k+1}(At^{\alpha}) z_k^0,$$

де $z_k^0 = D^{\alpha-k} z(t)\big|_{t=0}$, $k = 1, ..., m.$

Введемо функцію

$$\xi(t) = \Pi h(t, z^0) + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau, \quad t \in R_+,$$

де $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ — деякий фіксований селектор. У силу припущень даний селектор сумований: $\gamma(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$.

Розглянемо багатозначне відображення

ISSN 2786-6491

$$R(t,\tau,v)=\{\rho\geq 0:[W^*(t-\tau,v)-\gamma(t-\tau)]\bigcap \rho[M(t)-\xi(t)]\neq\varnothing\},$$

задане на $\Delta\times V$, де $\Delta=\{(t,\tau):0\leq\tau\leq t<\infty\}$, і вивчимо його опорну функцію в напрямку $+1$:

$$\rho(t,\tau,v)=\sup\{\rho:\rho\in R(t,\tau,v)\},\ (t,\tau)\in\Delta,\ v\in V.$$

Цю функцію названо розв'язувальною [5].

Беручи до уваги властивості параметрів процесу (1), отримуємо, що відображення $W^*(t-\tau,v)-\gamma(t-\tau)$ замкнутозначне, вимірне по τ і неперервне по v, тобто каратеодорієве. Тоді, згідно з [7], багатозначне відображення $R(t,\tau,v)$ є $L\times B$-вимірним по $\tau, v, \tau\in[0,t], v\in V$, а розв'язувальна функція — $\rho(t,\tau,v)$ є $L\times B$-вимірною по τ, v при $\xi(t)\notin M(t)$ в силу властивостей опорної функції. Оскільки функція $\rho(t,\tau,v)$ $L\times B$-вимірна по τ, v, то вона суперпозиційно вимірна [7, 9].

Потрібно зазначити, що при $\xi(t)\in M(t)$ маємо $R(t,\tau,v)=[0,\infty)$. Отже, $\rho(t,\tau,v)=+\infty$ для всіх $\tau\in[0,t],\ v\in V$.

Позначимо

$$\Theta=\{t\in R_+:\int_0^t \inf_{v\in V}\rho(t,\tau,v)d\tau\geq 1\}. \tag{10}$$

Якщо для деякого $t>0$ $\xi(t)\notin M(t)$, припустимо, що функція $\inf\limits_{v\in V}\rho(t,\tau,v)$ вимірна по τ, $\tau\in[0,t]$. Як показано в [7], це припущення виконується для достатньо широких класів функцій. Якщо ж дане припущення не виконується, множина Θ може бути задана формулою

$$\Theta=\{t\in R_+:\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V[0,t]}\int_0^t \rho(t,\tau,v(\tau))d\tau\geq 1\}.$$

Якщо $\xi(t)\in M(t)$, то $\rho(t,\tau,v)=+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, і в такому випадку природно покласти значення інтеграла в (10) рівним $+\infty$. Тоді нерівність в (10) виконується автоматично. У випадку, коли нерівність у фігурних дужках в (10) не виконується при всіх $t>0$, покладемо $\Theta=\varnothing$.

Зафіксуємо деякий елемент $T\in\Theta\neq\varnothing$.

3. Достатні умови завершення гри за фіксований час

Наступна теорема дає достатні умови зближення з термінальною множиною (3) за фіксований скінчений час за допомогою керування, що належить до класу квазістратегій.

Теорема 1. *Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (3) існує така обмежена вимірна матрична функція $C(t)$, що виконана умова 2, і нехай множина M опукла. Якщо існує скінчене число T, таке що $T\in\Theta\neq\varnothing$, то траєкторія процесу (1) з початковими умовами (2) може бути виведена на множину (3) в момент T за допомогою керування вигляду (4).*

Доведення. Нехай $v(\cdot)\in\Omega_V[0,T]$ — довільна вимірна функція, що приймає значення із V. Розглянемо спочатку випадок $\xi(T)\notin M(T)$.

Введемо контрольну функцію

$$h(t)=1-\int_0^t \rho(T,\tau,v(\tau))d\tau,\ t\in[0,T].$$

Оскільки, як зазначалося, функція $\rho(T, \tau, v)$ суперпозиційно вимірна, контрольна функція $h(t)$ абсолютно неперервна, а отже, неперервна. Крім того, вона не зростає, $h(0)=1$ і $h(T)\le 0$. Таким чином, існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*)=0$.

Проміжки часу $[0, t_*)$ і $[t_*, T]$ будемо називати активними і пасивними відповідно.

Розглянемо багатозначне відображення

$$U(\tau, v)=\{u \in U : \Pi(T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^{\alpha})\phi(u, C(T-\tau)v)-$$

$$-\gamma(T-\tau)\in \rho(T, \tau, v)[M(T)-\xi(T)]\}. \tag{11}$$

Враховуючи, що функція $\rho(T, \tau, v)$ $L\times B$-вимірна, $M(T)\in K(R^n)$, оскільки $M \in K(R^n)$, а функція $\xi(T)$ обмежена, багатозначне відображення $\rho(T, \tau, v)\times$ $\times[M(T)-\xi(T)]$ вимірне по τ. Крім того, ліва частина включення в (11) $L\times B$-вимірна по (τ, v) і неперервна по u. Тому, згідно з [7], відображення $U(\tau, v)$ $L\times B$-вимірне.

Отже, згідно з [7], в ньому знайдеться $L\times B$-вимірний селектор $u(\tau, v)$, який, у свою чергу, є суперпозиційно вимірною функцією в силу [8]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку рівним $u(\tau)=u(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$.

Розглянемо пасивний проміжок $[t_*, T]$. Покладемо $\rho(T, \tau, v)\equiv 0$ в (11) і позначимо $U_0(\tau, v)$ багатозначне відображення, отримане таким чином із $U(\tau, v)$:

$$U_0(\tau, v)=\{u \in U : \Pi(T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^{\alpha})\phi(u, C(T-\tau)v)=\gamma(T-\tau)\}.$$

Як і в попередньому випадку, із [8] випливає, що в $L\times B$-вимірному замкнутозначному відображенні $U_0(\tau, v)$ існує $L\times B$-вимірний селектор $u_0(\tau, v)$. Виберемо керування першого гравця на пасивному проміжку рівним $u(\tau)=$ $=u_0(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

У випадку $\xi(T)\in M(T)$ покладемо керування першого гравця рівним $u_0(\tau)=u_0(\tau, v(\tau))$ на всьому проміжку $\tau \in [0, T]$.

Покажемо, що в кожному із розглянутих вище випадків траєкторія процесу (1) буде виведена на термінальну множину в момент T.

Згідно з представленням розв'язку (1) справедлива формула

$$\Pi z(T)=\Pi h(t, z^0)+\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}\Pi E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^{\alpha})\phi(u(\tau), v(\tau))d\tau. \tag{12}$$

Розглянемо випадок $\xi(T)\notin M(T)$. Беручи до уваги вигляд множин $U(\tau, v)$, $U_0(\tau, v)$ і закон керування першого гравця, із (12) отримаємо включення

$$\Pi z(T)\in \xi(T)[1-\int_0^{t_*}\rho(T, \tau, v(\tau))d\tau]+\int_0^{t_*}\rho(T, \tau, v(\tau))M(T)d\tau+$$

$$+\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}\Pi E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^{\alpha})\phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau.$$

 ISSN 2786-6491

Оскільки $M(T)$ — опуклий компакт, враховуючи, що $M \in \operatorname{co} K(R^n)$, а $\rho(T, \tau, v)$ — невід'ємна функція і $\int_0^{t_*} \rho(T, \tau, v(\tau))d\tau = 1$, то

$$\int_0^{t_*} \rho(T, \tau, v(\tau))M(T)d\tau = M(T),$$

отже,

$$\Pi z(T) \in M(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \Pi E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^\alpha)\phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau.$$

Звідси, враховуючи вигляд множини $M(T)$, із визначення геометричної різниці [2] випливає включення $\Pi z(T) \in M$.

Нехай тепер $\xi(T) \in M(T)$. Тоді із рівності (12) з урахуванням визначення множини $U_0(\tau, v)$ отримаємо

$$\Pi z(T) = \xi(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \Pi E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^\alpha)\phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau \in$$

$$\in M(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} \Pi E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^\alpha)\phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau))d\tau.$$

Звідси випливає включення $\Pi z(T) \in M$ або $z(T) \in M^*$.

4. Випадок розділеної динаміки

Розглянемо випадок, коли еволюція стану кожного гравця описується незалежними рівняннями з дробовими похідними. Нехай динаміка першого гравця, якого будемо називати переслідувачем, описується рівнянням

$$D^\alpha x = Ax + u, \quad x \in R^{n_1}, \quad m_1 - 1 < \alpha < m_1. \tag{13}$$

Динаміка другого гравця, якого назвемо утікачем, задається рівнянням

$$D^\beta y = By + v, \quad y \in R^{n_2}, \quad m_2 - 1 < \beta < m_2. \tag{14}$$

Тут $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, A і B — квадратні матриці порядку n_1 і n_2 відповідно, $u \in U \in \operatorname{co}K(R^{n_1})$, $v \in V \in K(R^{n_2})$. Потрібно зауважити, що система (13), (14) не є окремим випадком процесу (1), оскільки числа α і β довільні. Нехай початкові умови для системи (13), (14) відповідно задані у вигляді

$$D^{\alpha-i}x(t)\big|_{t=0} = x_i^0, \quad i = 1, ..., m_1,$$

$$D^{\alpha-j}y(t)\big|_{t=0} = y_i^0, \quad j = 1, ..., m_2.$$

Термінальна множина задається ε-відстанню за першими s, де $s \le \min(n_1, n_2)$, компонентами векторів x і y, тобто гра вважається завершеною, як тільки

$$\|x - y\|_s \le \varepsilon, \tag{15}$$

ε — фіксоване число, $0 \le \varepsilon < \infty$.

Введемо ортопроєктори $\Pi_1 : R^{n_1} \to R^s$, $\Pi_2 : R^{n_2} \to R^s$, які виділяють у векторів x і y перші s координат. Тоді нерівність (15) можна переписати у вигляді

$$\|\Pi_1 x - \Pi_2 y\|_s \le \varepsilon. \tag{16}$$

Ситуацію, коли виконана нерівність (15), (16), назвемо поїмкою.

Траєкторії систем (13), (14) мають вигляд

$$x(t) = h_x(t, x^0) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^\alpha) u(t) d\tau,$$

$$y(t) = h_y(t, y^0) + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(B(t-\tau)^\beta) v(t) d\tau,$$

де $h_x(t, x^0)$ і $h_y(t, y^0)$ — загальні розв'язки однорідних систем $D^\alpha x = Ax$, $D^\beta y = By$ відповідно, з початковими умовами x^0, y^0:

$$h(t, x^0) = \sum_{i=1}^{m_1} t^{\alpha-i} E_{\alpha,\alpha-i+1}(At^\alpha) x_i^0,$$

$$h(t, y^0) = \sum_{j=1}^{m_2} t^{\beta-j} E_{\beta,\beta-j+1}(Bt^\beta) y_j^0.$$

Розглянемо багатозначне відображення

$$W_1(t, v) = t^{\alpha-1} \Pi_1 E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) U - t^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(Bt^\beta) C_1(t) v, \tag{17}$$

$$W_1(t) = t^{\alpha-1} \Pi_1 E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) U \overset{*}{-} t^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(Bt^\beta) C_1(t) V. \tag{18}$$

Тут $C_1(t)$ — матрична функція для вирівнювання ресурсів керування. Крім багатозначного відображення $W_1(t)$, модифікована умова Понтрягіна включає відображення

$$M_1(t) = \varepsilon S \overset{*}{-} \int_0^t \tau^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(B\tau^\beta)(C_1(\tau) - I) V d\tau. \tag{19}$$

Умова 3. Існує вимірна обмежена матрична функція $C_1(t)$ така, що в (17)–(19)

$$W_1(t) \ne \varnothing, \; M_1(t) \ne \varnothing \;\; \forall t \in R_+.$$

Оскільки відображення $W_1(t, v)$ $L \times B$-вимірне по t, v, то багатозначне відображення $W_1(t)$ вимірне по t, $t \in R_+$. Тому в ньому можна вибрати деякий вимірний селектор $\gamma_1(t)$ ($\gamma_1(t) \in W_1(t)$ $\forall t \ge 0$). Покладемо

$$\xi_1(t) = \Pi_1 h_x(t, x^0) - \Pi_2 h_y(t, y^0) + \int_0^t \gamma_1(\tau) d\tau.$$

Як і раніше, введемо багатозначне відображення

$$R_1(t, \tau, v) = \{\rho \ge 0 : [W_1(t-\tau, v) - \gamma_1(t-\tau)] \cap \rho[M_1(t) - \xi(t)] \ne \varnothing\}, \; R_1 : \Delta \times V \to 2^{R_+}$$

 ISSN 2786-6491

і його опорну функцію в напрямку + 1 (розв'язувальну функцію)

$$\rho_1(t, \tau, v) = \sup\{\rho : \rho \in R_1\}, \quad \rho_1 : \Delta \times V \to R_+.$$

Із наведених вище міркувань випливає $L \times B$ -вимірність відображення $R_1(t, \tau, v)$. Таким чином, $\rho_1(t, \tau, v)$ є $L \times B$ -вимірною по τ, v при $\xi_1(t) \notin M_1(t)$.

За допомогою розв'язувальної функції визначимо множину

$$\Theta_1 = \{t \geq 0 : \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V[0, t]} \int_0^t \rho_1(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1\}.$$

Нехай $T \in \Theta_1 \neq \varnothing$.

Теорема 2. *Нехай для ігрової задачі (13)–(16) з розділеною динамікою гравців існує обмежена вимірна матрична функція* $C_1(t)$, $t \geq 0$, *така що умова 3 виконана для всіх* $t \geq 0$. *Якщо існує скінчене число* T, *таке що* $T \in \Theta_1 \neq \varnothing$, *тоді поїмка у грі (13)–(16) трапляється в момент* T.

Доведення. Зафіксуємо деяке керування утікача $v(\cdot) \in \Omega_V[0, T]$ — довільна вимірна функція зі значеннями із V. Розглянемо контрольну функцію

$$h_1(t) = 1 - \int_0^t \rho_1(T, \tau, v(\tau)) d\tau.$$

Із вимірності по τ розв'язувальної функції $\rho_1(T, \tau, v(\tau))$ випливає, що контрольна функція неперервна. Оскільки $h_1(0) = 1$ і $h_1(T) \leq 0$, знайдеться такий момент t_*, $h_1(t_*) = 0$.

Як і раніше, проміжок $[0, t_*)$ назвемо активним, а $[t_*, T]$ — пасивним.

Введемо відображення

$$U_1(\tau, v) = \{u \in U : (T-\tau)^{\alpha-1} \Pi_1 E_{\alpha, \alpha}(A(T-\tau)^{\alpha}) u - (T-\tau)^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta, \beta}(B(T-\tau)^{\beta}) \times$$

$$\times C_1(T-\tau) v - \gamma(T-\tau) \in \rho_1(T, \tau, v)[M_1(T) - \xi_1(T)]\}. \quad (20)$$

Як зауважували вище, розв'язувальна функція $\rho_1(T, \tau, v)$ вимірна по τ. Крім того, множина $M_1(T)$ є опуклим компактом, а вектор $\xi_1(T)$ — обмеженим. Таким чином, відображення $\rho_1(T, \tau, v)[M_1(T) - \xi_1(T)]$ вимірне по τ. З іншого боку, ліва частина включення в (20) $L \times B$ -вимірна по (τ, v) і неперервна по u. Звідси випливає, що відображення $U_1(\tau, v)$ $L \times B$ -вимірне, і в ньому знайдеться $L \times B$ -вимірний селектор $u_1(\tau, v)$, який є суперпозиційно вимірною функцією. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку рівним $u(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$.

На пасивному проміжку задамо керування переслідувача таким чином. Покладемо в (20) $\rho_1(T, \tau, v) \equiv 0$ і позначимо $U_1^0(\tau, v)$ багатозначне відображення, отримане таким чином із $U_1(\tau, v)$. Виберемо керування переслідувача у вигляді $u_1^0(\tau) = u_1^0(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$, де $u_1^0(\tau, v)$ — вимірний селектор відображення $U_1^0(\tau, v)$.

Згідно з представленням розв'язку має місце рівність

$$\Pi_1 x(T) - \Pi_2 y(T) = \Pi_1 h_x(T, x^0) - \Pi_2 h_y(T, y^0) +$$

$$+ \int_0^T [(T-\tau)^{\alpha-1} \Pi_1 E_{\alpha,\alpha}(A(T-\tau)^{\alpha}) u(\tau) - (T-\tau)^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(B(T-\tau)^{\beta}) v(\tau)] d\tau. \quad (21)$$

Додамо і віднімемо із правої частини рівності (21) величини

$$\int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(B(T-\tau)^{\beta}) C_1(T-\tau) v(\tau) d\tau, \quad \int_0^T \gamma_1(T-\tau) d\tau.$$

Тоді, враховуючи (20), отримаємо включення

$$\Pi_1 x(T) - \Pi_2 y(T) \in \xi_1(T)(1 - \int_0^{t_*} \rho_1(T, \tau, v(\tau)) d\tau) + \int_0^{t_*} \rho_1(T, \tau, v(\tau)) M_1(T) d\tau +$$

$$+ \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(B(T-\tau)^{\beta})(C_1(T-\tau) - I) v(\tau) d\tau,$$

звідси, беручи до уваги формулу (19), а також те, що $\int_0^{t_*} \rho_1(T, \tau, v(\tau)) d\tau = 1$, отримаємо

$$\Pi_1 x(T) - \Pi_2 y(T) \in \varepsilon S.$$

Якщо ж $\xi_1(T) \in M_1(T)$, побудуємо керування переслідувача таким чином. Покладемо керування переслідувача рівним $u_1^0(\tau) = u_1^0(\tau, v(\tau)), \quad \tau \in [0, T]$, де $u_1^0(\tau, v)$ — вимірний селектор відображення $U_1^0(\tau, v)$. Тоді із рівності (21) з урахуванням множини $U_1^0(\tau, v)$ отримаємо

$$\Pi_1 x(T) - \Pi_2 y(T) = \xi_1(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(B(T-\tau)^{\beta})(C_1(T-\tau) - I) \times$$

$$\times v(\tau) d\tau \in M_1(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} \Pi_2 E_{\beta,\beta}(B(T-\tau)^{\beta})(C_1(T-\tau) - I) v(\tau) d\tau.$$

Звідси випливає включення $\Pi_1 x(T) - \Pi_2 y(T) \in \varepsilon S$.

5. Конфліктно-керовані процеси з простою матрицею, асимптотична поведінка функцій Міттаг–Леффлера

Наведемо деякі факти [7, 8], що стосуються асимптотичних розкладань узагальненої скалярної функції Міттаг–Леффлера. Припустимо, що $0 < \alpha < 2$. Нехай $\mu, \mu \in R$, задовольняє нерівність $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \alpha\pi\}$.

Тоді при будь-якому $N \in \mathbb{N}$ і $|z| \to \infty$ мають місце наступні асимптотичні формули:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(|z|^{-N-1}), \quad |\arg z| \le \mu, \quad (22)$$

 ISSN 2786-6491

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha k)} + O(|z|^{-N-1}), \quad \mu \le |\arg z| \le \pi. \tag{23}$$

Якщо $\alpha \ge 2,$ справедливе асимптотичне розкладення

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_{n} z^{\frac{1}{n}} \exp[e^{\frac{2n\pi i}{\alpha}} z^{\frac{1}{\alpha}}] - \sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta-\alpha k)} + O(|z|^{-N-1}), \tag{24}$$

де перша сума береться по всіх $n \in Z,$ таких що

$$|\arg z + 2\pi n| \le \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Формула [10] використовується при інтегруванні узагальненої функції Міттаг–Леффлера

$$\int_0^t \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda\tau^{\alpha}) d\tau = \tau^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(\lambda\tau^{\alpha}), \quad \beta > 0. \tag{25}$$

Врахуємо в подальшому формули (22)–(25). У дійсному евклідовому просторі R^n розглянемо конфліктно-керований процес [11, 12], еволюція якого описується системою диференціальних рівнянь з дробовими похідними Рімана–Ліувілля

$$D^{\alpha} z = \lambda z + u - v, \quad z \in R^{n_1}, \quad u \in \alpha S, \quad v \in S, \quad \alpha > 1, \tag{26}$$

де λ — дійсне число, $m-1 < \alpha \le m,$ з початковими умовами (2) і термінальною множиною $M^* = \varepsilon S,$ $\varepsilon \ge 0.$ Вочевидь, тут $A = \lambda I$, $\phi(u, v) = u - v,$ $U = \alpha S,$ $V = S,$ $M_0 = \{0\},$ а $M = \varepsilon S.$ Тому $L = M_0^{\perp} = R^n$, а ортопроєктор Π є оператором тотожного перетворення, оскільки для матриці $A = \lambda I$ справедлива рівність

$$E_{\rho,\mu}(A) = E_{\rho,\mu}(\lambda) I,$$

де $E_{\rho,\mu}(\lambda)$ — узагальнена скалярна функція Міттаг–Леффлера. Розв'язок задачі Коші для системи (26) з початковими умовами (2) має вигляд

$$z(t) = \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})(u(\tau) - v(\tau)) d\tau.$$

Застосуємо до поставленої ігрової задачі схему методу розв'язувальних функцій, викладену у розд. 2.

Покладемо $C(t) \equiv I$ і перевіримо виконання умови 2. Маємо

$$W^*(t, v) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})(\alpha S - v), \; W^*(t) = \left| t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha}) \right| (\alpha - 1) S.$$

Таким чином, $W(t) \ne \varnothing$, а $\phi(U, v)$ є замкнутою кулею радіуса $\alpha - 1$ для всіх $t \in R_+$. Отже, умова 2 виконана.

Покладемо $\gamma(t) \equiv 0,$ тоді

$$\bar{\xi}(t) = \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) z_k^0.$$

Розв’язувальна функція матиме вигляд

$$\widehat{\rho}(t,\tau,v)=\sup\{\rho\ge 0:(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})(\alpha S-v)\bigcap\rho[\varepsilon S-\widehat{\xi}(t)]\ne\varnothing\}. \qquad (27)$$

Позначимо $w(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})$. Розв’язувальну функцію (27) можна знайти в явному вигляді як більший позитивний корінь квадратного рівняння

$$\left\|w(t-\tau)v-\rho\widehat{\xi}(t)\right\|=\alpha w(t-\tau)-\rho\varepsilon$$

відносно ρ.

У результаті знаходимо

$$\widehat{\rho}(t,\tau,v)=\frac{w(t-\tau)[\widehat{\xi}(t)\cdot v+\alpha\varepsilon]+\left|w(t-\tau)\right|\sqrt{\Delta}}{\left\|\widehat{\xi}(t)\right\|^{2}-\varepsilon^{2}},$$

де $\Delta=(\widehat{\xi}(t)\cdot v+\alpha\varepsilon)^{2}-(\left|v\right|^{2}-a^{2})(\left\|\widehat{\xi}(t)\right\|^{2}-\varepsilon^{2})$. Розв’язувальна функція $\widehat{\rho}(t,\tau,v)$ досягає мінімального значення

$$\min_{\|v\|\le 1}\widehat{\rho}(t,\tau,v)=w(t-\tau)\frac{a-1}{\left\|\widehat{\xi}(t)\right\|-\varepsilon}$$

при $v=-\dfrac{\widehat{\xi}(t)}{\left\|\widehat{\xi}(t)\right\|}$. Тоді час закінчення гри визначається як найменший позитивний корінь рівняння

$$(a-1)\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})d\tau=\left\|\sum_{k=1}^{m}t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha})z_{k}^{0}\right\|-\varepsilon. \qquad (28)$$

Оскільки із формули (25) випливає рівність

$$\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^{\alpha})d\tau=t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha}),$$

отримаємо рівняння

$$t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha})=\frac{\left\|\sum_{k=1}^{m}t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha})z_{k}^{0}\right\|-\varepsilon}{a-1}$$

для визначення моменту закінчення гри (26), (2).

Природно припустити, що при $t=0$ вектор $z_{0}^{0}=z(0)$ не належить кулі εS. У протилежному випадку гра вважається завершеною, ще не почавшись. Таким чином, в момент $t=0$ ліва частина рівняння (28) дорівнює нулю, а права є позитивною.

Дослідимо швидкість росту при $t\to\infty$ лівої і правої частин рівняння (28). Згідно з формулою (22) при $\alpha<2$, будь-якому β і $\lambda>0$ для довільного натурального N маємо

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}(\lambda t^{\alpha})^{\frac{1-\beta}{\alpha}}e^{(\lambda t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}-\sum_{j=1}^{N}\frac{(\lambda t^{\alpha})^{-j}}{\Gamma(\beta-j\alpha)}+O((t^{\alpha})^{-1-N}).$$

 ISSN 2786-6491

Використовуючи це представлення, отримуємо

$$t^{\alpha} E_{\alpha,\,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}(\lambda^{-1}) e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} t} - \lambda^{-1} + \ldots, \quad t^{\alpha-i} E_{\alpha,\,\alpha-i+1}(\lambda t^{\alpha}) = \frac{1}{\alpha}(\lambda^{\frac{i-\alpha}{\alpha}}) e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} t} + \ldots .$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha} E_{\alpha,\,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha})}{\left\| \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha,\,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) z_k^0 \right\| - \varepsilon} = \frac{\frac{1}{\alpha}\lambda^{-1}}{\left\| \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{k-\alpha}{\alpha}} z_k^0 \right\|} = \frac{1}{\left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda^{\frac{k}{\alpha}} z_k^0 \right\|} .$$

Таким чином, корінь рівняння (28) існує, якщо

$$a - 1 > \left\| \sum_{k=1}^{m} \lambda^{\frac{k}{\alpha}} z_k^0 \right\|. \tag{29}$$

Розглянемо випадок $\lambda < 0,\ \alpha < 2,\ \beta$ — будь-яке. Тоді, згідно з формулою (23), при любому натуральному N

$$E_{\alpha,\,\beta}(\lambda t^{\alpha}) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{(\lambda t^{\alpha})^{-j}}{\Gamma(\beta - j\alpha)} + O((t^{\alpha})^{-1-N}).$$

Використовуючи це асимптотичне представлення, маємо

$$t^{\alpha} E_{\alpha,\,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha}) = -\lambda^{-1} - \frac{\lambda^{-2} t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \ldots,$$

$$t^{\alpha-k} E_{\alpha,\,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) = t^{\alpha-k} \left[-\sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda^{-j} t^{-j\alpha}}{\Gamma(\alpha+1-k-j\alpha)} + \ldots \right] =$$

$$= t^{\alpha-k} \left[-\frac{\lambda^{-2} t^{-2\alpha}}{\Gamma(1-k-\alpha)} - \ldots \right] = -\frac{\lambda^{-2} t^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-k-\alpha)} - \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{30}$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha} E_{\alpha,\,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha}) = -\lambda^{-1},$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{m} t^{\alpha-k} E_{\alpha,\,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha}) z_k^0 \right\| = 0.$$

Звідси з огляду на (29), (30) рівняння (28) має скінчений позитивний корінь при будь-яких початкових умовах.

Питання про розв'язність рівняння (28) при $\alpha \geq 2$ більш складне, що досить природно. У цьому випадку асимптотичні формули (24) замінюються представленням

$$E_{\alpha,\,\beta}(\lambda t^{\alpha}) = \frac{1}{\alpha} \lambda^{\frac{1-\beta}{\alpha}} t^{1-\beta} \sum_{|\arg\lambda + 2\pi n| \leq \frac{\alpha\pi}{2}} e^{\frac{2\pi i n(1-\beta)}{\alpha}} \exp(e^{\frac{2\pi i n(1-\beta)}{\alpha}} \lambda^{\frac{1}{\alpha}} t) -$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\frac{(\lambda t^{\alpha})^{-j}}{\Gamma(\beta-j\alpha)}+O((t^{\alpha})^{-1-N}), \tag{31}$$

де $N\in\mathbb{N}$, а перша сума береться за значеннями $n=0,\pm1,\pm2,...,$ для яких $\left|\arg z+2\pi n\right|\le\frac{\alpha\pi}{2}$.

Нехай $\lambda>0$, а $\alpha\in[2,4)$. Тоді $\arg\lambda=0$ і в формулі (31) перша сума складається з єдиного члена, що відповідає $n=0$. Отже, при достатньо великих значеннях t маємо

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}\lambda^{\frac{1-\beta}{\alpha}}t^{1-\beta}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}t}+...,$$

звідки

$$E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}\lambda^{-1}t^{-\alpha}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}t}+...,\quad t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}\lambda^{-1}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}t}+...,$$

$$t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}\lambda^{\frac{k}{\alpha}-1}e^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}t}+....$$

Тоді, з урахуванням отриманих асимптотик, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\lambda t^{\alpha})}{\left\|\sum_{k=1}^{m}t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(\lambda t^{\alpha})z_k^0\right\|-\varepsilon}=\frac{1}{\left\|\sum_{k=1}^{m}\lambda^{\frac{k}{\alpha}}z_k^0\right\|}.$$

Таким чином, позитивний скінчений корінь рівняння (28) існує, якщо виконана нерівність (29).

У загальному випадку для великих значень α рівняння (31) стає громіздким через збільшення кількості складників у першій сумі. Тому визначення загальних умов розв’язності задачі зближення з термінальною множиною $M^{*}=\varepsilon S$ для системи (26), (2) — складна проблема.

Окремо розглянемо випадок $\lambda=0$. Тоді рівняння (28) має вигляд

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}=\frac{\left\|\sum_{k=1}^{m}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha+1-k)}z_k^0\right\|-\varepsilon}{a-1}. \tag{32}$$

При $t=0$ ліва частина рівняння (32) дорівнює нулю, а права дорівнює $+\infty$, якщо $z_m^0\neq0$. При $t\to\infty$ ліва частина росте швидше, ніж права, тому позитивний корінь рівняння (32) існує при будь-яких початкових умовах, крім $z_m^0\neq0$.

6. Групове переслідування для систем дробового порядку

Розглянемо задачу ігрової взаємодії μ гравців, яких будемо називати переслідувачами, і одного гравця, якого назвемо утікачем.

Нехай зміна стану об’єкта $z=\mathrm{col}(z_1,...,z_{\mu})$, $z_i\in R^{n_i}$, в просторі R^{n_i}, $n=$ $=n_1+...+n_{\mu}$, задається дробовими диференціальними рівняннями

$$D^{\beta}z_i=A_iz_i+\phi_i(u_i,v),\ 0<\beta\le1,\ i=1,...,\mu. \tag{33}$$

 ISSN 2786-6491

Тут A_i — квадратні матриці порядку n_i, блок керувань визначається функціями $\phi_i(u_i, v)$, $\phi_i : U_i \times V \to R^{n_i}$, неперервними по сукупності змінних, де u_i і v, $u_i \in U_i, v \in V$, параметри керувань i-го переслідувача і утікача відповідно, а області вибору керувань U_i і V належать класу $K(R^{n_{ii}})$ всіх непустих компактів простору R^{n_i}.

Нехай $g_i(t, z_i^0)$ — розв'язок однорідної системи $D^\beta z_i = A_i z_i$. Тоді матимемо

$$g_i(t, z_i^0) = t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(At^\beta) z_i^0,$$

де $z_i^0 = J^{1-\beta} z_i(t)|_{t=0}$.

Термінальна множина M^* складається з множин $M_1^*, ..., M_\mu^*, M_i^* \subset R^{n_i}$, таких що

$$M_i^* = M_i^0 + M_i, \tag{34}$$

де M_i^0 — лінійний підпростір простору R^{n_i}, M_i — опуклий компакт із ортогонального доповнення L_i до підпростору M_i^0 в R^{n_i}.

Диференціальна гра (33), (34) вважається завершеною, якщо для деякого i, $i \in \{1, ..., \mu\}$, виконується включення $z_i \in M_i^*$. Позначимо $\phi_i(U_i, v) = \{\phi_i(u_i, v) :$ $: u_i \in U_i\}$.

Умова 4. Множини $\phi_i(U_i, v)$ опуклі для всіх $i = 1, ..., \mu$, $v \in V$.

Позначимо також Π_i оператор ортогонального проектування із R^{n_i} на L_i. Розглянемо наступні багатозначні відображення:

$$W_i(t, v) = t^{\beta-1} \Pi_i E_{\beta,\beta}(At^\beta) \phi_i(U_i, v),$$

$$W_i(t) \bigcap_{v \in V} W_i(t, v), \; i = 1, ..., \mu, \; t \in R_+, \; v \in V.$$

Умова 5. Значення відображень $W_i(t)$ — непусті множини для всіх $i = 1, ..., \mu$, $t \in R_+$.

Із припущень відносно параметрів процесу (33) випливає, що відображення $W_i(t, v)$ $L \times B$-вимірні по $t, v, t \in R_+$, $v \in V$, для всіх $i = 1, ..., \mu$. Таким чином, згідно з попереднім відображенням, $W_i(t)$ вимірні. Отже, згідно з теоремою про вимірний вибір, у кожному з них існує вимірний селектор $\gamma_i(\cdot)$, $\gamma_i(\cdot) \in W_i(t)$, $t \geq 0$, для всіх i, $i = 1, ..., \mu$. Зафіксуємо ці селектори і покладемо

$$\xi_i(t, z_i) = \Pi_i g_i(t, z_i) + \int_0^t \gamma_i(\tau) d\tau. \tag{35}$$

Розглянемо багатозначні відображення

$$R_i(t, \tau, z_i, v) = \{\rho \geq 0 : [W_i(t-\tau, v) - \gamma_i(t-\tau)] \cap \rho [M_i - \xi_i(t, z_i)] \neq \varnothing\}$$

і їх опорні функції у напрямку + 1

$$\rho_i(t, \tau, z_i, v) = \sup\{\rho : \rho \in R_i(t, \tau, z_i, v)\}, \quad \rho : \Delta \times V \to R_+.$$

Ці функції назвемо розв'язувальними [5].

Припустимо, що $\xi_i(t, z_i) \notin M_i$ при деяких фіксованих значеннях $t, z,\ t \in R_+$, $z \in R^n$. При цьому відображення $R_i(t, \tau, z_i, v)$ $L \times B$-вимірні по $\tau, v, \tau \in [0, t]$, $v \in V$. Тоді, згідно з [7], їх опорні функції $\rho_i(t, \tau, z_i, v)$ також $L \times B$-вимірні по τ, v.

Зауважимо, що при $\xi_i(t, z_i) \in M_i$ маємо $R_i(t, \tau, z_i, v) = [0, \infty)$, отже, $\rho_i(t, \tau, z_i, v) = +\infty$ для всіх $\tau \in [0, t]$, $v \in V$.

Оскільки $\rho_i(t, \tau, z_i, v)$ $L \times B$-вимірні по τ, v, то вони суперпозиційно вимірні, тобто $\rho_i(t, \tau, z_i, v(\tau))$ вимірні по τ для будь-якої вимірної функції $v(\tau)$, $v(\tau) \in V$.

Позначимо

$$T_\mu(z) = \inf\{t \geq 0 : \inf_{v(\cdot)} \max_i \int_0^t \alpha_i(t, \tau, z_i, v(\tau))d\tau \geq 1\}. \tag{36}$$

Якщо нерівність у фігурних дужках не виконана для всіх $t \geq 0$, покладемо $T_\mu(z) = +\infty$. Якщо ж для деякого $i,\ i \in \{1, ..., \mu\}$, виконується $\rho_i(t, \tau, z_i, v) = +\infty$ при $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, вважатимемо, що $\int_0^t \rho_i(t, \tau, z_i, v(\tau))d\tau = +\infty$ і нерівність в (10) виконана автоматично.

Теорема 3. *Якщо для конфліктно-керованого процесу (33), (34) виконані умови 4, 5 і* $T_\mu(z^0) < \infty$ *для деякого початкового стану* z^0, *то хоча б для одного* $i,\ i \in \{1, ..., \mu\}$, *траєкторія системи (33) може бути виведена із початкового стану* z_i^0 *на відповідну термінальну множину* M_i^* *в момент* $T_\mu(z^0)$.

Доведення. Нехай $T = T_\mu(z^0)$, а $v(\tau)$, $v : [0, T] \to V$ — довільна вимірна функція.

Розглянемо випадок, коли $\xi_i(T, z_i^0) \notin M_i$ для всіх $i = 1, ..., \mu$. Введемо контрольну функцію

$$h_\mu(t) = 1 - \max_i \int_0^t \rho_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau))d\tau.$$

Оскільки розв'язувальні функції $\rho_i(T, \tau, z_i^0, v)$, як зазначалося, суперпозиційно вимірні, то $\rho_i(T, \tau, z_i^0, v(\tau))$ вимірні по τ. Таким чином, контрольна функція $h_\mu(t)$ абсолютно неперервна, не зростає і $h_\mu(0) = 1$. Так як $h_\mu(T) \leq 0$, то існує момент t_*, $t_* \in (0, T]$, такий що

$$h_\mu(t_*) = 0. \tag{37}$$

Введемо багатозначне відображення

$$U_1(\tau, v) = \{u_i \in U_i : \Pi_i (T-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(A(T-\tau)^\beta)\phi_i(u_i, v) -$$

$$-\gamma_i(T-\tau) \in \rho_i(T, \tau, z_i^0, v)[M_i - \xi_i(T, z_i^0)]\},\quad i = 1, ..., \mu. \tag{38}$$

У силу того, що функції $\rho_i(T, \tau, z_i^0, v)$ є $L \times B$-вимірні, $M_i \in K(R_i^n)$, функції $\xi_i(T, z_i^0)$ обмежені, багатозначне відображення

$$\rho_i(T,\tau,z_i^0,v)[M_i-\xi_i(T,z_i^0)]$$

вимірне по τ. Крім того, ліва частина включення в (38) $L\times B$-вимірна по (τ, v) і неперервна по u. Тому, згідно з [8], відображення (38) $L\times B$-вимірне. Тоді в $U_1(\tau, v)$ міститься хоча б один $L\times B$-вимірний селектор $u_1(\tau, v)$, який суперпозиційно вимірний. Покладемо керування переслідувачів на інтервалі $[0, t_*)$ рівними $u_1(\tau)=u_1(\tau, v(\tau))$.

Із (37) випливає, що знайдеться число i_*, таке що

$$1-\int_0^{t_*}\rho_{i_*}(T,\tau,z_{i_*}^0,v(\tau))d\tau=0. \tag{39}$$

Поклавши в (38) $\rho_i(T,\tau,z_i^0,v)\equiv 0$ при $\tau\in[t_*,T]$, отримаємо відображення

$$U_i^0(\tau,v)=\{u_i\in U_i:\Pi_i(T-\tau)^{\beta-1}E_{\frac{1}{\beta}}(A(T-\tau)^{\beta};\beta)\phi_i(u_i,v)-\gamma_i(T-\tau)=0\}.$$

Як і раніше, згідно з [7, 9], у відображенні $U_i^0(\tau,v)$ існує $L\times B$-вимірний селектор $u_i^0(\tau,v)$, який є суперпозиційно вимірним. Задамо керування i_*-го переслідувача на інтервалі $[t_*,T]$ у вигляді $u_{i_*}^0(\tau)=u_{i_*}^0(\tau,v(\tau))$. Керування інших переслідувачів покладемо довільними.

Тепер припустимо, що існує номер i такий, що $\xi_i(T,z_i^0)\in M_i$. У цьому випадку покладемо керування i-го переслідувача рівним

$$u_i(\tau)=u_i(\tau,v(\tau)),\ \tau\in[0,T].$$

Керування інших переслідувачів довільні.

Покажемо, що побудовані таким чином керування забезпечують завершення гри в момент T. Спочатку розглянемо випадок, коли $\xi_i(T,z_i^0)\notin M_i$ для всіх $i=1,...,\mu$. Із формули (39) та рівності $\rho_{i_*}(T,\tau,z_{i_*}^0,v)\equiv 0$, $\tau\in[t_*,T]$, випливає, що

$$\int_0^T\rho_{i_*}(T,\tau,z_{i_*}^0,v(\tau))d\tau=1. \tag{40}$$

Справедливий вираз

$$\Pi_{i_*}z_{i_*}(T)=\Pi_{i_*}g_{i_*}(t,(z_{i_*}^0)+\int_0^T(T-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}(A(T-\tau)^{\beta})\phi_{i_*}(u_{i_*}(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Додаючи і віднімаючи $\int_0^T\gamma_{i_*}(T-\tau)d\tau$ із правої частини останньої рівності, а також беручи до уваги спосіб побудови керування, описаний вище, отримаємо включення

$$\Pi_{i_*}z_{i_*}(T)\in\xi_{i_*}(T,z_{i_*}^0)[1-\int_0^T\rho_{i_*}(T,\tau,z_{i_*}^0,v(\tau))d\tau]+\int_0^T\rho_{i_*}(T,\tau,z_{i_*}^0,v(\tau))M_{i_*}d\tau.$$

Враховуючи рівність (40), остаточно приходимо до включення $\Pi_{i_*}z_{i_*}(T)\in M_{i_*}$.

Якщо $\xi_i(T, z_i^0) \in M_i$ для деякого номера i, тоді, враховуючи закон керування i -го переслідувача і вираз (35), отримаємо включення $\Pi_i z_i(T) \in M_i$.

7. Випадок простого руху

Розглянемо задачу групового переслідування, в якій беруть участь μ переслідувачів, динаміка яких описується рівняннями

$$D^\beta x_i = u_i, \quad \|u_i\| \le 1, \quad i = 1, ..., \mu, \tag{41}$$

і один утікач, рух якого задається рівнянням

$$D^\beta y = v, \quad \|v\| \le 1. \tag{42}$$

Процес переслідування вважається завершеним, як тільки $x_i = y$ для деякого номера $i, \ i \in \{1, ..., \mu\}$.

Приведемо дану задачу до вигляду (33), (34). Для цього покладемо $z_i = x_i - y.$ Тоді рівняння (41), (42) набувають вигляду

$$D^\beta z_i = u_i - v, \quad z_i \in R^n, \quad \|u_i\| \le 1, \quad \|v\| \le 1 \tag{43}$$

з термінальною множиною, що складається з множин

$$M_i^* = M_i^0 = M_i = \{z_i : z_i = 0\}, \quad i = 1, ..., \mu. \tag{44}$$

Таким чином, у цьому прикладі $L_i = R^n$, ортопроектори $\Pi_i = I$ є операторами тотожного перетворення, а A_i — нуль-матриця порядку n. Отже,

$$E_{\beta,1}(At^\beta) = E_\beta(At^\beta) = 1, \quad E_{\beta,\beta}(At^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

Перевіримо виконання умови 5:

$$W_i(t, v) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} S - \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} v, \quad W_i(t) = \{0\} \ne \varnothing, \ i = 1, ..., \mu.$$

Оскільки $W_i(t) = \{0\}$, покладемо $\gamma_i(t) \equiv 0$ для всіх $i = 1, ..., \mu.$ Позначимо $\xi_i(t, z_i) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z_i$. Розв'язувальні функції мають вигляд

$$\rho_i(t, \tau, z_i, v) = \sup\{\rho \ge 0 : -\rho \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z_i \in \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} (S - v)\} =$$

$$= \sup\{\rho \ge 0 : -\rho t^{\beta-1} z_i \in (t-\tau)^{\beta-1} (S - v)\}.$$

Їх значення можуть бути знайдені аналітично, як великий корінь наступного квадратного рівняння відносно ρ :

$$\left\| (t-\tau)^{\beta-1} v - \rho t^{\beta-1} z_i \right\| = (t-\tau)^{\beta-1},$$

звідси знаходимо

 ISSN 2786-6491

$$\rho_i(t,\tau,z_i,v)=\frac{(t-\tau)^{\beta-1}[(v;z_i)+\sqrt{(v;z_i)^2+\|z_i\|^2(1-\|v\|^2)}]}{t^{\beta-1}\|z_i\|^2}.$$

Введемо позначення $\widehat{\rho}_i(z_i,v)=\dfrac{(v;z_i)+\sqrt{(v;z_i)^2+\|z_i\|^2(1-\|v\|^2)}}{\|z_i\|^2}$, тоді

$$\rho_i(t,\tau,z_i,v)=\left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{\beta-1}\widehat{\rho}_i(z_i,v).$$

Час закінчення гри може бути визначений із (36). Позначимо $\Delta^{\mu-1}$ стандартний $(\mu-1)$-мірний симплекс. Справедливі такі нерівності:

$$\inf_{v(\cdot)}\max_i\int_0^t\rho_i(t,\tau,z_i,v(\tau))d\tau=\inf_{v(\cdot)}\max_{v\in\Delta^{\mu-1}}\sum_{i=1}^{\mu}v_i\int_0^t\rho_i(t,\tau,z_i,v(\tau))d\tau\geq$$

$$\geq\inf_{v(\cdot)}\sum_{i=1}^{\mu}\frac{1}{\mu}\int_0^t\rho_i(t,\tau,z_i,v(\tau))d\tau=\frac{1}{\mu}\inf_{v(\cdot)}\int_0^t\sum_{i=1}^{\mu}\rho_i(t,\tau,z_i,v(\tau))d\tau\geq$$

$$\geq\frac{1}{\mu}\int_0^t\min_{\|v\|\leq1}\max_i\rho_i(t,\tau,z_i,v)d\tau=\frac{1}{\mu}\int_0^t\min_{\|v\|\leq1}\max_i\left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{\beta-1}\widehat{\rho}_i(z_i,v)d\tau=$$

$$=\frac{t}{\mu\beta}\min_{\|v\|\leq1}\max_i\widehat{\rho}_i(z_i,v).$$

Звідси отримаємо оцінку для часу закінчення гри:

$$T_\mu(z)\leq\frac{\beta\mu}{\delta(z)}. \tag{45}$$

Тут і надалі використаємо позначення

$$\delta(z)=\min_{\|v\|\leq1}\max_i\widehat{\rho}_i(z_i,v).$$

Оскільки $\delta(z)\geq0$ для всіх $z\in R^{\mu n}$, то для забезпечення виконання нерівності $T_\mu(z)<+\infty$ в (45), достатньо визначити такі стани z, для яких $\delta(z)>0.$

Покладемо

$$\sigma(z)=\min_{\|v\|=1}\max_i\left(\frac{z_i}{\|z_i\|}\cdot v\right).$$

Легко бачити, що $\sigma(z)>0$ тоді і тільки тоді, коли $\delta(z)>0.$ Дійсно, якщо $\sigma(z)>0,$ то, розглянувши окремо випадки $\|v\|=0$ і $\|v\|=1,$ одразу отримаємо $\delta(z)>0.$ Якщо $\delta(z)>0,$ тоді, зокрема, $\min\limits_{\|v\|=1}\max\limits_i\widehat{\rho}_i(z_i,v)>0,$ звідки випливає нерівність $\sigma(z)>0.$

З іншого боку, справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Функція* $\sigma(z) > 0$ *тоді і тільки тоді, коли нуль простору* R^n *належить внутрішності опуклої оболонки, натягнутої на вектори* $z_i / \|z_i\|$, $i = 1, ..., \mu$:

$$0 \in \operatorname{int} co\left\{\frac{z_i}{\|z_i\|}\right\}.$$

Доведення. Припустимо, $0 \in \operatorname{int} co\left\{\frac{z_i}{\|z_i\|}\right\}$. Це включення може бути переписано в термінах опорних функцій:

$$0 < \max_i \left(\frac{z_i}{\|z_i\|} \cdot v\right) \quad \forall v, \ \| v \| = 1,$$

або

$$\min_{\| v \| = 1} \max_i \left(\frac{z_i}{\|z_i\|} \cdot v\right) = \sigma(z) > 0.$$

Достатність можна довести, використавши ці ж міркування в зворотному порядку.

Наслідок 1. $0 \notin \operatorname{int} co\left\{\frac{z_i}{\|z_i\|}\right\}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sigma(z) \le 0.$

Наслідок 2. *Гра переслідування (43), (44) може бути закінчена за скінчений час тоді і тільки тоді, коли*

$$0 \in \operatorname{int} co\left\{\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}\right\}. \tag{46}$$

Доведення. Припустимо, $0 \in \operatorname{int} co\left\{\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}\right\}$. Тоді, згідно з лемою 1, $\sigma(z^0) > 0$, отже, $\delta(z^0) > 0$. У силу оцінки (45) звідси випливає, що час закінчення гри $T_\mu(z^0)$ скінчений.

Нехай тепер $0 \notin \operatorname{int} co\left\{\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}\right\}$. Тоді $\sigma(z^0) \le 0$ і множина

$$V_0 = \left\{ \|v\| = 1 : \max_i \left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|} \cdot v\right) \le 0 \right\}$$

непуста. Якщо $v_0 \in V_0$, то $\widehat{\alpha}_i(z_i^0, v_0) = 0$ для всіх $i = 1, ..., \mu$.

Маємо

$$\rho_i(t, \tau, z_{i\,i}^0, v_0) = \left(\frac{t - \tau}{t}\right)^{\beta - 1} \widehat{\rho}_i(z_{i\,i}^0, v_0) = 0, \quad i = 1, ..., \mu, \quad 0 < \tau < t.$$

Звідси, згідно з визначенням функції $\rho_i(t, \tau, z_{i\,i}^0, v_0)$, випливає, що

$$\left\{- \rho_i \frac{t^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} z_i^0\right\} \cap \frac{(t - \tau)^{\beta - 1}}{\Gamma(\beta)} (S - v_0) = \varnothing \ \ \forall \rho_i > 0, \ \ 0 < \tau < t, \ \ i = 1, ..., \mu,$$

 ISSN 2786-6491

або

$$\rho_i \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z_i^0 + \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(S - v_0) \bigcap \{0\} = \varnothing.$$

Покладемо $\rho_i = \beta(t-\tau)^{\beta-1} / t^{\beta}$ в останньому виразі, отримаємо

$$0 \notin \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} z_i^0 + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}(S - v_0).$$

Враховуючи попереднє,

$$\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}(S - v_0) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(S - v_0) d\tau =$$

$$= \left\{ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}(u(\tau) - v_0) d\tau : u(\tau) \in S \right\}, \qquad (47)$$

отримаємо, що $z_i(t) \neq 0$ для всіх $i = 1, ..., \mu,$ $t > 0,$ тобто гра не може бути закінчена за скінчений час.

Зауважимо, що умова (46) — деякий аналог умови «оточення», отриманий для диференціальної гри групового переслідування з похідними цілих порядків [5].

Висновок

Для класичних похідних Рімана–Ліувілля на основі методу розв'язувальних функцій отримані достатні умови закінчення гри за скінчений час у класі квазістратегій. Однією з цих умов є умова Понтрягіна, яка дозволяє побудувати гарантовані стратегії на основі теорем вимірного вибору. Головний об'єкт методу: розв'язувальні функції є опорними до багатозначних відображень, побудованих через параметри конфліктно-керованого процесу. У конкретних прикладах з еліпсоподібними областями керування та тілесною складовою циліндричної термінальної множини розв'язувальні функції — більш позитивні корені відповідних квадратних рівнянь. Перевірка умов зближення здійснюється на основі асимптотичних представлень функцій Міттаг–Леффлера. Результати ілюструються на прикладах ігрових задач з простою матрицею, а також задачі групового переслідування об'єктів з простим рухом. В останньому випадку отримані необхідні та достатні умови зближення у вигляді належності початкового положення втікача внутрішності опуклої оболонки, натягнутої на початкові положення переслідувачів.

A. Chikrii

GAME CONTROL PROBLEMS FOR FRACTIONAL ORDER SYSTEMS

Arkadii Chikrii

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,

g.chikrii@gmail.com

The mathematical theory of control and the theory of dynamic games possess a wide range of fundamental methods to study controlled evolutionary processes of various natures, functioning in condition of conflict and uncertainty. The state of the process therewith can be described by the ordinary differential equations, non-stationary systems whose parameters dependence on time is expressed through the set-valued mappings, difference-differential and impulse systems, and partial differential equations. In this paper the scheme of the method of resolving functions (inverse Minkowski functionals) is applied to the game problems with Riemann–Liouville fractional derivatives. Sufficient conditions for convergence in a finite guaranteed time in the class of quasi-strategies are obtained. The construction of control is performed on the basis of Filippov-Cactaing theorem. In so doing, the resolving functions appear as support to the key set-valued mappings. To verify the convergence conditions we use the Mittag–Leffler asymptotic representations. To support the efficiency of suggested methodology we analyze in detail the conflict-controlled process with simple matrix. In so doing, the resolving function is found in explicit analytic form as the greater positive root of the corresponding quadratic equation. On the basis of the method of resolving function, we deduce sufficient conditions for termination of the group pursuit in a finite time in the class of quasi-strategies. We separately examine the case, when the matrices of the systems, describing the motions of the pursuers and the evader, are zero. Also we deduce the necessary and sufficient conditions for the convergence of Pshenichnyi' encirclement type.

Keywords: conflict-controlled process, set-valued mapping, Pontryagin's condition, resolving function.

ПОСИЛАННЯ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. : Мир, 1967. 480 с.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М. : Наука, 1988. Т. **2**. 576 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 455 с.
4. Пшеничный Б.Н. , ОстапенкоВ.В. Дифференциальные игры. Киев : Наук. думка, 1992. 264 с.
5. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London : Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
6. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Изв. АН Армянской ССР*. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 3–29.
7. Aubin J.-P., Frankowska H. Set–valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
8. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 479 с.
9. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*. New York : Springer. 2008. Vol. 17. P. 349–387.
10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
11. Chikrii A., Matychyn I., Gromaszek K., Smolarz A. Control of fractional-order dynamic systems under uncertainty. In book: Modelling and Optimization. Lublin : Politechnica Lubelska, 2011. P. 3–56. https://www.researchgate.net/publication/230725154_Control_of_fractional-order_dynamic_systems_under_uncertainty.
12. Matychyn I., Chikrii A., Gromaszek K. Dynamics games involving impulses. In book: Current problems in information and computational technologies. Lublin : Politechnica Lubelska, 2012. Vol. 2. P. 51–106.

Отримано 14.02.2023