

УДК 519.8

С.В. Пашко, І.П. Сініцин

ВЕЛИЧИНИ ПРИСКОРЕННЯ В ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЯХ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ

Пашко Сергій Володимирович

Інститут програмних систем НАН України, м. Київ,
ORCID: 0000-0002-0453-4128,

pashko1955@gmail.com

Сініцин Ігор Петрович

Інститут програмних систем НАН України, м. Київ,
ORCID: 0000-0002-4120-0784,

ips2014@ukr.net

Розглядаються задачі переслідування втікача одним переслідувачем з неперервним часом, які вважаються задачами степені; критерієм є час захоплення втікача. З-поміж стратегій переслідування виділяються погонна стратегія та паралельного зближення. Погонна стратегія полягає в тому, що переслідувач рухається з максимальною швидкістю у напрямку втікача. У разі застосування стратегії паралельного зближення переслідувач, знаючи вектор швидкості втікача в поточний момент, вважає цей вектор постійним та на лінії руху втікача обчислює точку, в якій може відбутися захоплення, якщо переслідувач рухатиметься з максимальною швидкістю у напрямку цієї точки. В кожний момент часу вектор швидкості переслідувача направлений на точку захоплення, а величина швидкості максимальна. Визначаються множини стратегій, які можуть застосовуватися переслідувачем та втікачем; оптимальний час переслідування і втечі; ціна процесу; оптимальні стратегії. Кожна пара стратегій переслідування та втечі, яка належить прямому добутку допустимих множин стратегій переслідування і втечі, вважається сумісною. Наводяться доведення оптимальності погонної стратегії та стратегії паралельного зближення. Основна мета роботи — побудова оцінок модулів прискорення переслідувача, які неможливо покращити. Для стратегії паралельного зближення верхня оцінка модуля прискорення переслідувача залежить від величини швидкості переслідувача, максимальної швидкості втікача та модуля прискорення втікача; у випадку постійності величини швидкості втікача модуль прискорення переслідувача не перевищує модуля прискорення втікача. Для погонної стратегії переслідування верхня оцінка модуля прискорення переслідувача залежить від величини швидкості переслідувача, максимальної швидкості втікача та відстані між ними. Такі оцінки

дозволяють розрахувати максимальні значення модулів прискорення та використати їх для обґрунтування доцільності застосування стратегій в залежності від параметрів задачі.

Ключові слова: переслідування, втікач, оптимальна стратегія, швидкість, прискорення.

Вступ

Задачі втечі та переслідування, що займають одне з центральних місць в теорії конфліктно-керованих процесів та є актуальними як з точки зору практичних застосувань, так і в теоретичному аспекті, розділяються на задачі якості та степені. В задачах якості необхідно встановити, з яким результатом закінчиться процес, причому вважається, що можливий один з кількох результатів. Наприклад, вимагається дати відповідь на запитання, чи може переслідувач захопити втікача до деякого моменту часу. В задачах степені потрібно знайти найкращі стратегії поведінки переслідувача та втікача (агентів), траєкторії руху, ціну процесу. Багато з таких задач вивчалися в роботах [1–7]. В [8] стратегії переслідування досліджуються шляхом числового моделювання.

В даній роботі задачі переслідування вважаються задачами степені з неперервним часом, визначається ціна процесу та сідлові точки, утворені оптимальними стратегіями переслідування і втечі, критерієм є час захоплення втікача. У центрі уваги знаходяться дві стратегії переслідування втікача одним переслідувачем, що часто розглядаються в літературі, — погонна стратегія та стратегія паралельного зближення.

Відомо, що згадані стратегії оптимальні. Гарантований час захоплення втікача методом розв'язуючих функцій [2] при нульовому селекторі Понтрягіна збігається з часом першого прямого методу Понтрягіна, який є оптимальним [3] за умов, прийнятих у даній роботі. Тому стратегія паралельного зближення, яка реалізує метод [2], оптимальна. Ця стратегія є оптимальною для широкого кола задач зі складною динамікою; допустимими стратегіями при цьому вважаються довільні вимірні за Лебегом (Борелем) функції, що приймають значення з опуклих компактів. Оптимальність погонної стратегії впливає з правила екстремального прицілювання [4] за умов, прийнятих у даній статті, а також у більш складних випадках. Для кусково-постійних швидкостей втікача оптимальність погонної стратегії доведена у роботі [5]. У разі простого руху оптимальність стратегії паралельного зближення доведена в роботі [6]. В даній статті наводяться побудовані авторами короткі доведення оптимальності цих стратегій за умови, що застосовується простий рух.

Основна мета роботи — побудова оцінок модулів прискорення переслідувача, які неможливо покращити, для погонної стратегії та стратегії паралельного зближення. Такі оцінки дозволяють розрахувати максимальні значення модулів прискорення та використати їх для обґрунтування доцільності застосування стратегій в залежності від параметрів задачі.

Оптимальні стратегії переслідування та втечі

Розглянемо задачу переслідування втікача переслідувачем, що вивчається в теорії диференціальних ігор. Вважаємо, що переслідувач прагне мінімізувати час захоплення втікача, а втікач — максимізувати його. Нехай вектор x n -вимірною дійсного евклідового простору R^n визначає місцезнаходження переслідувача P , а вектор y — втікача E . Вектори u, v розмірності n означають швидкості агентів

P та E відповідно. Вектори x, y, u, v залежать від часу, тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(t)$, $v = v(t)$.

Простір R^n складається з n -вимірних векторів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ з дійсними компонентами; вважаємо, що $2 \leq n < \infty$. Норма вектора x визначається формулою

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad \text{де} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{— скалярний добуток векторів} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{та} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Процес починається в момент часу $t = 0$. Моментом захоплення втікача вважається перший момент часу, в який координати втікача співпадають з координатами переслідувача. Рух агентів вважається простим, тобто в будь-який момент часу агент може вибрати довільний вектор швидкості руху, норма якого не більша заданої величини. Крім того, швидкості u, v вважаються кусково-неперервними функціями часу. Це означає, що функції $u(t), v(t)$ у кожному обмеженому часовому проміжку мають не більше скінченного числа точок розриву першого роду. Для визначеності вважаємо, що функції $u(t), v(t)$ у кожній точці розриву неперервні справа.

Вважаємо, що в будь-який момент виконуються нерівності $\|u\| \leq \alpha < \infty$, $\|v\| \leq \beta < \infty$; переслідувач може рухатися швидше за втікача, тобто $\alpha > \beta$; швидкості агентів з моменту захоплення дорівнюють нулю. Тут α, β — максимальні величини модулів швидкостей $\|u\|, \|v\|$; $\beta > 0$. Диференціальні рівняння руху мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t), \quad x(0) = x^0, \\ \dot{y}(t) &= v(t), \quad y(0) = y^0, \end{aligned} \tag{1}$$

де x^0, y^0 — початкові позиції агентів, $\|x^0 - y^0\| > 0$. Кожне із співвідношень (1) виконується у всі моменти, в які відповідна швидкість є неперервною функцією часу.

Позначимо $z = z(t) = (x, y)$ фазовий вектор, що містить координати агентів. Вважаємо, що швидкість втікача залежить тільки від фазового вектора, тобто має вигляд $v(z)$, а швидкість переслідувача — ще й від швидкості втікача та має вигляд $u(z, v)$. Функцію $v(z)$ назвемо стратегією втечі, а функцію $u(z, v)$ — стратегією переслідування.

Нехай з моменту часу $t = 0$ задіяні деякі стратегії втечі та переслідування, $z^0 = (x^0, y^0)$ — задане початкове значення фазового вектора. Розв'язком системи (1) вважається функція $z(t)$, $t \in [0, \infty)$, яка задовольняє наступні умови.

1) Функція $z(t)$ абсолютно неперервна на $[0, \infty)$, $z(0) = z^0$.

2) У всі моменти часу t , в які функція $\bar{u}(t) \equiv u(z(t), v(z(t)))$ неперервна, існує похідна за часом $\dot{x}(t)$ та виконується рівність $\dot{x}(t) = \bar{u}(t)$. Аналогічно у всі моменти t , в які функція $\bar{v}(t) \equiv v(z(t))$ неперервна, існує похідна за часом $\dot{y}(t)$ та виконується рівність $\dot{y}(t) = \bar{v}(t)$. У точці 0 мається на увазі похідна справа.

Вважаємо, що агенти застосовують сумісні стратегії, тобто такі, для яких існує єдиний розв'язок $z(t)$ системи (1), що задовольняє задані початкові умови, а вектори швидкостей $u(z(t), v(z(t)))$, $v(z(t))$ є кусково-неперервними функціями часу.

У деяких випадках для обчислення величин u, v потрібно використати час. Для забезпечення такої можливості при необхідності доповнимо вектори x та y двома допоміжними змінними x_{n+1} і y_{n+1} відповідно, для яких виконуються співвідношення $\dot{x}_{n+1} \equiv 1$, $\dot{y}_{n+1} \equiv 1$, і до системи (1) додамо два рівняння

$$\dot{x}_{n+1} = 1, x_{n+1}(0) = 0,$$

$$\dot{y}_{n+1} = 1, y_{n+1}(0) = 0.$$

За потреби час у вигляді x_{n+1} або y_{n+1} може бути використано для обчислення величин u, v .

Стратегію переслідування $u(z, v)$ позначимо ϕ , стратегію втечі $v(z)$ — ψ . Нехай Φ — множина стратегій, що застосовуються переслідувачем, а Ψ — множина стратегій, які використовуються втікачем. Вважаємо, що кожна пара стратегій (ϕ, ψ) , яка належить множині $\Phi \times \Psi$, сумісна. Прямокутність множини пар сумісних стратегій дозволяє визначити сідлову точку у звичайному розумінні [7]. Звісно, деякі сумісні пари стратегій можуть не належати множині $\Phi \times \Psi$. Прикладами стратегій є кусково-постійні стратегії Карліна [1]. Якщо множини Φ та Ψ складаються з таких стратегій, кожна пара з множини $\Phi \times \Psi$ сумісна.

Нехай величина $T(z^0, \phi, \psi)$ означає час захоплення втікача. Оптимальним часом втечі назовемо число

$$t_0^* = \sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\phi \in \Phi} T(z^0, \phi, \psi).$$

Стратегію $\psi^* \in \Psi$ назовемо оптимальною стратегією втечі, якщо для кожної стратегії $\phi \in \Phi$ виконується нерівність

$$T(z^0, \phi, \psi^*) \geq t_0^*. \quad (2)$$

Оптимальним часом переслідування є число

$$t_1^* = \inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\psi \in \Psi} T(z^0, \phi, \psi).$$

Стратегію $\phi^* \in \Phi$ назовемо оптимальною стратегією переслідування, якщо для кожної стратегії $\psi \in \Psi$ виконується співвідношення

$$T(z^0, \phi^*, \psi) \leq t_1^*. \quad (3)$$

Легко довести нерівність

$$t_0^* \leq t_1^*. \quad (4)$$

Якщо $t_0^* = t_1^*$, то для всіх $\phi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ маємо співвідношення

$$T(z^0, \phi^*, \psi) \leq T(z^0, \phi^*, \psi^*) \leq T(z^0, \phi, \psi^*), \quad (5)$$

тобто пара стратегій ϕ^*, ψ^* утворює сідлову точку (якщо ϕ^*, ψ^* існують). Дійсно, позначимо $V = t_0^*$. З нерівності (2) випливає співвідношення $T(z^0, \phi^*, \psi^*) \geq V$, а з нерівності (3) — співвідношення $T(z^0, \phi^*, \psi^*) \leq V$, тому $T(z^0, \phi^*, \psi^*) = V$. Маємо $T(z^0, \phi^*, \psi) \leq V \leq T(z^0, \phi, \psi^*)$, звідки випливає (5). Число V є ціною процесу.

Погонна стратегія та стратегія паралельного зближення

Припустимо, переслідувач P рухається з максимальною швидкістю у напрямку $\rightarrow x(t)y(t)$. Таку стратегію переслідування назвемо погонною та позначимо ϕ_0 . Вважаємо, що $\phi_0 \in \Phi$. Позначимо

$$h(t) = (y(t) - x(t)) / \|y(t) - x(t)\|. \quad (6)$$

Далі замість виразу $v(z(t))$ використовуємо v або $v(t)$, замість $u(z(t), v(z(t)))$ — u або $u(t)$. Для стратегії ϕ_0 швидкість переслідувача визначається формулою

$$u(t) = \alpha h(t). \quad (7)$$

Інша стратегія переслідування — стратегія паралельного зближення [6] — полягає в тому, що переслідувач, знаючи вектор швидкості втікача в поточний момент, вважає цей вектор постійним та на лінії руху втікача обчислює точку, в якій може відбутися захоплення, якщо переслідувач рухатиметься з максимальною швидкістю у напрямку цієї точки. В кожний момент часу вектор швидкості переслідувача направлений на точку захоплення, а величина швидкості максимальна. Стратегію паралельного зближення позначимо ϕ_1 . Вважаємо, що $\phi_1 \in \Phi$. Якщо застосовується стратегія паралельного зближення, вектор $h(t)$ з часом не змінюється, $h(t) = h(0) = h$, $0 \leq t < T$, де T — момент захоплення втікача, а для швидкості переслідувача u справедлива формула [6]

$$u(t) = v(t) - \lambda h, \quad (8)$$

де $\lambda = \lambda(t) = \langle v, h \rangle - \sqrt{\alpha^2 + \langle v, h \rangle^2 - \|v\|^2}$.

Наведемо приклад системи рівнянь (1) при погонній стратегії:

$$\dot{x}_i = \alpha(y_i - x_i) / \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

$$\dot{y}_i = 2\beta(x_i + y_i) / \left(1 + \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Рівняння (9) описують рух переслідувача відповідно (7), рівняння (10) — рух втікача, початкові значення в момент $t = 0$ дорівнюють $x_1^0, \dots, x_n^0, y_1^0, \dots, y_n^0$. За умови $x \neq y$ виконується співвідношення $\|\dot{x}\| = \alpha$, праві частини (9) неперервні, обмежені, мають неперервні частинні похідні за змінними $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ та локально ліпшицеві. Справедливі співвідношення $\|\dot{y}\| = 2\beta\|x + y\| / (1 + \|x + y\|^2)$, $\|\dot{y}\| \leq \beta$, за умови $\|x + y\| = 1$ виконується рівність $\|\dot{y}\| = \beta$, праві частини (10)

неперервні, обмежені, мають неперервні частинні похідні за змінними $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ та ліпшицеві. Рівняння (9), (10) виконуються до моменту захоплення втікача.

Розглянемо питання про існування, єдиність та продовжуваність розв'язку системи диференціальних рівнянь (1) за умови, що застосовується погонна стратегія переслідування. Нехай R^{2n+1} — евклідов простір розмірності $2n+1$, координатами точки у якому є числа $t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. Позначимо M замкнуту множину простору R^{2n+1} , що складається з точок, для яких виконується умова $x = y$; відкрита множина Γ визначається співвідношенням $\Gamma = R^{2n+1} \setminus M$. Швидкість u має вигляд $u(z) = (y - x) / \|y - x\|$ та не визначена на множині M , а на Γ функція $u(z)$ неперервна, обмежена, має неперервні частинні похідні за змінними $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ та локально ліпшицева. Якщо до того ж функція $v(z)$ неперервна та має неперервні частинні похідні за змінними $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ на множині Γ , то з [9, теорема 2 та § 22 (A)] випливає, що для кожної точки початкових значень (t_0, z^0) , яка належить множині Γ , існує єдиний неперодовжуваний на Γ розв'язок системи (1). Нехай в теоремі 2 роботи [9] умову неперервності частинних похідних замінено умовою локальної ліпшицевості правих частин системи диференціальних рівнянь. Використовуючи теорему Пікара–Ліндельофа [10], легко впевнитися в тому, що після такої заміни теорема 2 та всі міркування і висновки § 22(A) роботи [9] залишаються вірними. Отже, за умови локальної ліпшицевості функції $v(z)$ на Γ для кожної точки початкових значень, яка належить множині Γ , існує єдиний неперодовжуваний на Γ розв'язок системи (1).

Нехай на множині Γ функція $v(z)$ локально ліпшицева та обмежена, $\bar{z}(t)$, $t_1 < t < t_2$, — неперодовжуваний на Γ розв'язок системи (1), що задовольняє початкову умову $\bar{z}(0) = z^0$, випадки $t_1 = -\infty$, $t_2 = \infty$ не виключено. Інтегральна крива цього розв'язку $(t, \bar{z}(t))$ належить множині Γ , $(t, \bar{z}(t)) \in \Gamma$, $t_1 < t < t_2$ [9]. Використовуючи розв'язок $\bar{z}(t)$, побудуємо розв'язок $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, що задовольняє умови 1), 2). Якщо $t_2 = \infty$, виберемо $z(t) = \bar{z}(t)$, $0 \leq t < \infty$. Нехай $t_2 < \infty$. Оскільки норми кусково-неперервних правих частин системи (1) обмежені числами α та β , існує лівостороння границя $\xi = \lim_{t \uparrow t_2} \bar{z}(t)$, $\|\xi\| < \infty$. Припустимо, $(t_2, \xi) \in \Gamma$. Виберемо точку (t_2, ξ) як початкову. Використовуючи теорему про існування та єдиність розв'язку системи диференціальних рівнянь Пікара–Ліндельофа [10], продовжимо розв'язок $\bar{z}(t)$ вправо. Це суперечить тому, що розв'язок $\bar{z}(t)$ неперодовжуваний на Γ . Отже, припущення $(t_2, \xi) \in \Gamma$ невірне. Нехай $(t_2, \xi) \in M$. Виберемо

$$z(t) = \begin{cases} \bar{z}(t), & 0 \leq t < t_2, \\ \xi, & t_2 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Побудована функція $z(t)$ являє собою єдиний розв'язок системи (1) на проміжку $0 \leq t < \infty$, що задовольняє умови 1), 2). Функція $z(t)$ задовольняє систему (1) у всі

моменти часу, за винятком моменту t_2 , який є часом захоплення втікача (якщо $t_2 < \infty$) і в який права частина системи (1) має розрив першого роду. Тут враховано, що швидкості агентів з моменту захоплення дорівнюють нулю.

Розглянемо ситуацію, в якій права частина системи (1) (точніше, функція $v(t)$) може мати розриви першого роду. Нехай задана послідовність моментів часу $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \infty$. Припустимо, на кожному проміжку

$[\tau_i, \tau_{i+1})$ застосовується швидкість втікача $v(t) = v^i(z(t))$, $i = 0, 1, \dots$. Функції $v^i(z)$ вважаються локально ліпшицевими та обмеженими, $\|v^i(z)\| \leq \beta < \infty$. Очевидно,

в моменти часу $\tau_1, \tau_2, \dots$ можливі розриви першого роду функції $v(t)$. Доведення існування, єдиності та продовжуваності розв'язку системи диференціальних рівнянь (1) у даному випадку несуттєво відрізняється від доведення за умови, що всі функції $v^i(z)$ тотожно рівні, яке наведено вище; не будемо його повторювати. У даному випадку розв'язок $z(t)$, $0 \leq t < \infty$, системи (1) задовольняє умови 1), 2) та має похідні $\dot{z}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ у всі моменти часу, можливо, за винятком, $\tau_1, \tau_2, \dots$ і моменту захоплення T , в який похідна має розрив першого роду.

Стратегії втечі, що задовольняють описані умови, можуть входити в множину Ψ . Існування, єдиності та продовжуваності розв'язку системи (1) для стратегії паралельного зближення обґрунтовуються аналогічно. Абсолютна неперервність розв'язку системи (1) впливає з його неперервності, кускової неперервності та обмеженості функцій $u(t), v(t)$.

Стратегію втечі, яка полягає в тому, що втікач за умови $t \geq 0$ рухається з максимальною швидкістю у напрямку $\overrightarrow{x(0)y(0)}$, позначимо ψ_0 . Вважаємо, що $\psi_0 \in \Psi$. Нехай $d(t) = \|x(t) - y(t)\|$ — відстань між агентами, $V(t) = \frac{d(t)}{\alpha - \beta}$, $t \geq 0$.

Якщо переслідуювач та втікач застосовують пару стратегій ϕ_0, ψ_0 або ϕ_1, ψ_0 , точка захоплення A лежить на прямій $x(0)y(0)$ на відстані $\beta V(0)$ від точки $y(0)$.

Далі наводяться побудовані авторами короткі доведення оптимальності описаних стратегій за умов, що наведені раніше. Доведемо, що $V(0)$ — ціна процесу, а стратегії ϕ_0 та ψ_0 оптимальні і утворюють сідлову точку. Очевидно, до досягнення точки A , тобто до моменту $V(0)$, втікач не може бути захопленим. Тому для всіх $\phi \in \Phi$ виконується нерівність

$$T(z^0, \phi, \psi_0) \geq V(0), \quad (11)$$

з якої випливає співвідношення $\sup_{\psi \in \Psi} \inf_{\phi \in \Phi} T(z^0, \phi, \psi) \geq V(0)$, тобто

$$t_0^* \geq V(0). \quad (12)$$

Припустимо, в деякий момент $t \geq 0$ швидкості u, v є неперервними функціями часу. Похідна $\dot{V}(t)$ обчислюється за формулою (за умови $d(t) > 0$)

$\dot{V}(t) = -\frac{\langle u(t) - v(t), h(t) \rangle}{\alpha - \beta}$; в момент $t = 0$ обчислюється похідна справа. Оскільки використовується стратегія ϕ_0 , переслідуювач вибирає вектор швидкості за формулою (7), тому $\dot{V}(t) = -\frac{\alpha - \langle v(t), h(t) \rangle}{\alpha - \beta} \leq -1$. Враховуючи, що $\dot{V}(t)$ — кусково-неперервна функція, для моменту T захоплення втікача отримуємо

$$V(0) = -\int_0^T \dot{V}(t) dt \geq -\int_0^T (-1) dt = T, \quad (13)$$

тобто $T \leq V(0)$. Отже, для всіх $\psi \in \Psi$ виконується нерівність

$$T(z^0, \phi_0, \psi) \leq V(0), \quad (14)$$

з якої випливає співвідношення $\inf_{\phi \in \Phi} \sup_{\psi \in \Psi} T(z^0, \phi, \psi) \leq V(0)$, тобто

$$t_1^* \leq V(0). \quad (15)$$

Із співвідношень (4), (12), (15) випливає, що $t_0^* = t_1^* = V(0)$, отже число $V(0)$ — ціна процесу. Із (11) і (14) випливають співвідношення $V(0) = T(z^0, \phi_0, \psi_0)$,

$$T(z^0, \phi_0, \psi) \leq T(z^0, \phi_0, \psi_0) \leq T(z^0, \phi, \psi_0),$$

які виконуються для всіх $\phi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$, тобто стратегії ϕ_0 та ψ_0 оптимальні і утворюють сідлову точку.

Припустимо, переслідуювач застосовує стратегію паралельного зближення. У цьому разі з формули (8) випливає рівність $\langle u - v, h \rangle = \|u - v\|$. Маємо $\langle u - v, h \rangle = \|u - v\| \geq \|u\| - \|v\| \geq \alpha - \beta$. Отже, виконується співвідношення $-\frac{\langle u - v, h \rangle}{\alpha - \beta} \leq -1$, а разом з ним і нерівність $\dot{V}(t) \leq -1$. Використовуючи співвідношення (13), отримуємо $T \leq V(0)$. Тому стратегія паралельного зближення оптимальна, тобто забезпечує захоплення втікача за час, що не перевищує ціну процесу. Пара стратегій ϕ_1, ψ_0 утворює сідлову точку, для всіх $\phi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ справедливий співвідношення

$$T(z^0, \phi_1, \psi) \leq T(z^0, \phi_1, \psi_0) \leq T(z^0, \phi, \psi_0).$$

Нехай u' — швидкість переслідування погонної стратегії, u'' — швидкість переслідування стратегії паралельного зближення, $\|u'\| = \|u''\| = \alpha$. Легко довести, що стратегія переслідування, швидкість якої u''' обчислюється за формулою

$$u''' = \alpha(\gamma u' + (1 - \gamma)u'') / \|\gamma u' + (1 - \gamma)u''\|,$$

де $0 \leq \gamma \leq 1$, є оптимальною (за умови, що стратегія u''' належить множині Φ і сумісна з усіма стратегіями з множини Ψ). Дійсно, оскільки до моменту захоплення втікача справедливі нерівності $\langle u', h \rangle > 0$, $\langle u'', h \rangle > 0$, $0 < \|\gamma u' + (1 - \gamma)u''\| \leq \alpha$, маємо

$$\begin{aligned}\langle u''' - v, h \rangle &= \left\langle \alpha \frac{\gamma u' + (1-\gamma)u''}{\|\gamma u' + (1-\gamma)u''\|} - v, h \right\rangle \geq \langle \gamma u' + (1-\gamma)u'' - v, h \rangle = \\ &= \gamma \langle u' - v, h \rangle + (1-\gamma) \langle u'' - v, h \rangle.\end{aligned}\quad (16)$$

Для погонної стратегії та стратегії паралельного зближення виконуються співвідношення

$$-\frac{\langle u' - v, h \rangle}{\alpha - \beta} \leq -1, \quad -\frac{\langle u'' - v, h \rangle}{\alpha - \beta} \leq -1$$

або

$$\langle u' - v, h \rangle \geq \alpha - \beta, \quad \langle u'' - v, h \rangle \geq \alpha - \beta.$$

З двох останніх нерівностей та (16) випливає $\langle u''' - v, h \rangle \geq \alpha - \beta$, тобто $-\frac{\langle u''' - v, h \rangle}{\alpha - \beta} \leq -1$. Це означає, що похідна $\dot{V}(t)$ для стратегії u''' не перевищує -1 .

Із співвідношень (13) випливає, що час захоплення втікача не перевищує ціну гри, тобто стратегія u''' оптимальна.

Оцінки модуля прискорення переслідувача

Модулі прискорення переслідувача оцінимо при застосуванні стратегії паралельного зближення та погонної стратегії. Вважаємо, що всі компоненти вектора швидкості втікача v неперервні та мають неперервні похідні за часом. Вектор $\dot{v}$, що складається з похідних від компонент вектора v за часом, являє собою вектор прискорення втікача. Аналогічно вектор $\dot{u}$ — вектор прискорення переслідувача.

Оцінимо модуль прискорення переслідувача $\|\dot{u}\|$ за умови застосування стратегії паралельного зближення. Нехай $\dot{v} = \bar{\dot{v}} + \tilde{\dot{v}}$, де $\bar{\dot{v}} = \langle \dot{v}, h \rangle h$, вектор $h = h(t)$ визначається за формулою (6). Вектори $\dot{v}, \bar{\dot{v}}, \tilde{\dot{v}}$ залежать від часу, $\dot{v} = \dot{v}(t)$, $\bar{\dot{v}} = \bar{\dot{v}}(t)$, $\tilde{\dot{v}} = \tilde{\dot{v}}(t)$. Підкреслимо, що у разі стратегії паралельного зближення вектор h не залежить від часу. Позначимо

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \langle v, h \rangle^2 - \|v\|^2}.$$

Використовуючи (8) та враховуючи співвідношення $\langle \tilde{\dot{v}}, h \rangle = 0$, $\langle \bar{\dot{v}}, h \rangle = \langle \dot{v}, h \rangle$, отримуємо

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{v} - \dot{\lambda}h = \bar{\dot{v}} + \tilde{\dot{v}} - \langle \dot{v}, h \rangle h + r^{-1}(\langle v, h \rangle \langle \dot{v}, h \rangle - \langle v, \dot{v} \rangle) h = \\ &= \bar{\dot{v}} + \tilde{\dot{v}} - \bar{\dot{v}} + r^{-1}(\langle v, h \rangle \langle \bar{\dot{v}}, h \rangle - \langle v, \bar{\dot{v}} \rangle - \langle v, \tilde{\dot{v}} \rangle) h = \\ &= \tilde{\dot{v}} + r^{-1}(\langle v, h \rangle \langle \bar{\dot{v}}, h \rangle - \langle v, \langle \bar{\dot{v}}, h \rangle h \rangle - \langle v, \tilde{\dot{v}} \rangle) h = \tilde{\dot{v}} - r^{-1} \langle v, \tilde{\dot{v}} \rangle h,\end{aligned}$$

тому

$$\|\dot{u}\|^2 = \|\tilde{\dot{v}}\|^2 + r^{-2} \langle v, \tilde{\dot{v}} \rangle^2,$$

звідки випливає співвідношення

$$\|\dot{u}\| = \sqrt{\|\tilde{v}\|^2 + \frac{\langle v, \tilde{v} \rangle^2}{\alpha^2 + \langle v, h \rangle^2 - \|v\|^2}}. \quad (17)$$

Позначимо модулі прискорення переслідувача та втікача a та b відповідно,

$a = \|\dot{u}\|$, $b = \|\dot{v}\|$. З рівності (17) отримуємо $a \leq b \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}}$, тобто

$$a \leq \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} b. \quad (18)$$

У разі стратегії паралельного зближення та постійності модуля швидкості втікача $\|v(t)\| = \text{const}$ дамо точнішу оцінку модуля прискорення переслідувача. Маємо

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{v} - \dot{\lambda}h = \bar{v} + \tilde{v} - \langle \dot{v}, h \rangle h + r^{-1} \langle v, h \rangle \langle \dot{v}, h \rangle h = \\ &= \bar{v} + \tilde{v} - \bar{v} + r^{-1} \langle v, h \rangle \langle \dot{v}, h \rangle h = \tilde{v} + r^{-1} \langle v, h \rangle \langle \bar{v}, h \rangle h, \end{aligned}$$

$$\|\dot{u}\|^2 = \|\tilde{v}\|^2 + r^{-2} \langle v, h \rangle^2 \|\bar{v}\|^2,$$

тобто

$$\|\dot{u}\| = \sqrt{\|\tilde{v}\|^2 + \frac{\langle v, h \rangle^2}{\alpha^2 + \langle v, h \rangle^2 - \|v\|^2} \|\bar{v}\|^2}. \quad (19)$$

Оскільки справедлива нерівність $\langle v, h \rangle^2 \leq \alpha^2 + \langle v, h \rangle^2 - \|v\|^2$, з рівності (19) випливають співвідношення

$$\|\dot{u}\| \leq \sqrt{\|\tilde{v}\|^2 + \|\bar{v}\|^2} = \|\dot{v}\|,$$

тобто модуль прискорення переслідувача не перевищує модуль прискорення втікача,

$$a \leq b. \quad (20)$$

Припустимо, застосовується погонна стратегія переслідування. Оцінимо модуль прискорення переслідувача $\|\dot{u}\|$. Швидкість переслідувача u визначається за формулою (7). Позначаючи $w = y(t) - x(t)$, отримуємо $u = \alpha w / \|w\|$,

$$\dot{u} = \alpha \frac{\dot{w}\|w\| - w\langle \dot{w}, w \rangle / \|w\|}{\|w\|^2} = \frac{\alpha}{\|w\|^3} (\dot{w}\langle w, w \rangle - w\langle \dot{w}, w \rangle),$$

$$\|\dot{u}\| = \frac{\alpha}{\|w\|^3} \sqrt{\langle \dot{w}, \dot{w} \rangle \langle w, w \rangle^2 - \langle w, w \rangle \langle \dot{w}, w \rangle^2}$$

або

$$\|\dot{u}\| = \frac{\alpha}{d^2} \sqrt{d^2 \langle \dot{w}, \dot{w} \rangle - \langle \dot{w}, w \rangle^2},$$

де $d = \|w\|$. Оскільки $\dot{w} = \frac{d}{dt}(y - x) = v - u$, $w/d = h$, де $h = h(t)$ визначається за формулою (6), отримуємо

$$\|\dot{u}\| = \frac{\alpha}{d} \sqrt{\langle v-u, v-u \rangle - \langle v-u, h \rangle^2}. \quad (21)$$

Розглянемо підкореневий вираз в (21). Враховуючи співвідношення (7), отримуємо

$$\begin{aligned} \langle v-u, v-u \rangle - \langle v-u, h \rangle^2 &= \langle v, v \rangle - 2\langle v, u \rangle + \langle u, u \rangle - \langle v, h \rangle^2 + 2\langle v, h \rangle \langle u, h \rangle - \\ &- \langle u, h \rangle^2 = \langle v, v \rangle - 2\alpha \langle v, h \rangle + \alpha^2 - \langle v, h \rangle^2 + 2\alpha \langle v, h \rangle - \alpha^2 = \langle v, v \rangle - \langle v, h \rangle^2. \end{aligned}$$

З цих співвідношень та (21) випливає

$$\|\dot{u}\| = \frac{\alpha}{d} \sqrt{\langle v, v \rangle - \langle v, h \rangle^2}, \quad (22)$$

тому справедлива нерівність $\|\dot{u}\| \leq \frac{\alpha}{d} \|v\|$, звідки випливає оцінка

$$a \leq \frac{\alpha\beta}{d}. \quad (23)$$

Оцінки (18), (20), (23) неможливо покращити. Точніше кажучи, за умови $b > 0$ в оцінці (18) коефіцієнт $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$ не може бути зменшено, а оцінка модуля прискорення переслідувача (20) не може мати вигляд $a \leq kb$, де $k < 1$. Існує такий допустимий вектор швидкості втікача, що співвідношення (23) перетворюється на рівність.

Негравітаційні сили, що викликають прискорення, можуть завдати шкоди пілотам літаків та літальним апаратам, тому під час переслідування потрібно враховувати перевантаження. Це особливо важливо, коли втікач здатен виконати маневри, метою яких є створення перевантажень для переслідувача. З (18), (23) випливає, що для уникнення значних перевантажень у разі

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} b < \frac{\alpha\beta}{d}, \quad \text{тобто} \quad d < \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{b},$$

бажано використовувати стратегію паралельного зближення, а у разі $d > \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{b}$ — погонну стратегію. Не

завжди можливо дотримуватися цієї поради, оскільки потрібно враховувати різні обставини, наприклад те, що для погонної стратегії достатньо знати напрямок на втікача, а для стратегії паралельного зближення — швидкість втікача та напрямок на втікача у початковий момент часу. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Нехай $\alpha = 700$ м/с, $\beta = 300$ м/с, $b = 8g = 8 \times 9,81$ м/с², $d = 200$ м. З (18) випливає, що у разі застосування стратегії паралельного зближення модуль прискорення переслідувача не перевищує $9g$. Вибираючи швидкість v так, що $\langle v, v \rangle = \beta^2$, $\langle v, h \rangle = 0$, при погонній стратегії отримуємо із співвідношення (22) модуль прискорення переслідувача $\alpha\beta/d \approx 107g$.

В наведеному прикладі швидкість та прискорення втікача можуть бути швидкістю та прискоренням сучасного бойового літака, а швидкість переслідувача — швидкістю зенітної ракети. Можливий модуль прискорення переслідувача при

застосуванні погонної стратегії значно перевищує його модуль прискорення у разі стратегії паралельного зближення та є занадто великим для сучасних зенітних ракет. Тому при погонній стратегії втікач має більше шансів здійснити успішний протиракетний маневр, ніж при стратегії паралельного зближення.

Приклад 2. Нехай $\alpha = 150$ м/с, $\beta = 140$ м/с, $b = 8g = 8 \times 9,81$ м/с². Припустимо, переслідувач здатен вразити втікача з відстані $d = 500$ м. Оскільки оцінку (18) неможливо покращити, з неї випливає, що при стратегії паралельного зближення модуль прискорення переслідувача може бути рівним приблизно $22g$. Використовуючи (23), отримуємо оцінку модуля прискорення переслідувача для погонної стратегії: $a < 4,3g$.

В цьому прикладі агентами можуть бути два сучасні бойові літаки. Можливий модуль прискорення переслідувача при стратегії паралельного зближення значно перевищує його модуль прискорення у разі погонної стратегії та занадто великий для пілота. При погонній стратегії модуль прискорення є прийнятним.

Висновок

В роботі отримані оцінки модулів прискорення переслідувача для стратегії паралельного зближення та погонної стратегії, які неможливо покращити, в залежності від модулів швидкостей, прискорення втікача та відстані між агентами. Це дозволяє розрахувати максимальні величини модулів прискорення в обох випадках та використати їх для визначення доцільності застосування стратегій переслідування.

S. Pashko, I. Sinitsyn

THE MAGNITUDES OF ACCELERATION IN THE OPTIMAL PURSUIT STRATEGIES

Serhii Pashko

Institute of Software Systems of the NAS of Ukraine, Kyiv,

pashko1955@gmail.com

Igor Sinitsyn

Institute of Software Systems of the NAS of Ukraine, Kyiv,

ips2014@ukr.net

The problems of pursuit of an evader by one pursuer with continuous time are considered, which are treated as the problems of degree, the criterion is the time of capturing the evader. Among the pursuit strategies, the chasing strategy and the parallel approach strategy stand out. The chasing strategy consists in the fact that the pursuer moves at maximum speed in the direction of the evader. The parallel approach strategy consists in the fact that the pursuer, knowing the evader's velocity vector at the current moment, considers this vector to be constant and calculates a point on the evader's line of motion at which capture can occur if the pursuer moves at maximum speed toward this point. At each instant of time, the pursuer's velocity vector is directed to the capture point, and the speed is maximal. The sets of strategies that can be used by the pursuer and the evader, the optimal time of pur-

suit and escape, the cost of the process, and the optimal strategies are determined. Each pair of pursuit and escape strategies that belongs to the direct product of admissible sets of pursuit and escape strategies is considered compatible. Proofs of the optimality of the chasing strategy and the parallel approach strategy are given. The main purpose of the work is to construct estimates of the pursuer's acceleration magnitude, which cannot be improved. For the parallel approach strategy, the upper estimate of the pursuer's acceleration magnitude depends on the pursuer's speed, the evader's maximum speed, and the evader's acceleration magnitude; in the case of constancy of the evader speed, the magnitude of acceleration of the pursuer does not exceed the magnitude of acceleration of the evader. For a chasing strategy, the upper estimate of the pursuer's acceleration magnitude depends on the pursuer's speed, the evader's maximum speed, and the distance between the agents. Such estimates make it possible to calculate the maximum magnitudes of the acceleration and use them to justify the feasibility of applying strategies depending on the parameters of the problem.

Keywords: pursuit, evader, optimal strategy, velocity, acceleration.

ПОСИЛАННЯ

1. Isaacs R. Differential games. New York : Dover Publications, 1999. 384 p.
2. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. К. : Наук. думка, 1992. 384 с.
3. Гусятников П.Б., Никольский М.С. Об оптимальном времени преследования. *ДАН СССР*. 1969. Том 184(3). С. 518–521. <https://www.mathnet.ru/rus/dan/v184/i3/p518>.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва : Наука, 1974. 455 с.
5. Петросян Л.А., Томский Г.В. Геометрия простого преследования. Новосибирск : Наука, 1983. 140 с.
6. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент : ФАН, 1989. 232 с.
7. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2012. 424 с.
8. Пашко С.В. Моделирование оптимальных стратегий переслідування з простим рухом. *Проблеми програмування*. 2022. № 3-4. С. 478–484. <https://doi.org/10.15407/pp2022.03-04.478>.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Наука, 1965. 331 с.
10. Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, 1964. 720 p.

Отримано 20.03.2023

Доопрацьовано 09.05.2023