

КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.6, 539.3

Б.Є. Панченко, Ю.Д. Ковальов, Л.М. Буката, О.С. Жиронкіна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИМЕТРИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ШАРУ З ПОКРИТИМИ ДІАФРАГМОЮ ТОРЦЯМИ, ПОСЛАБЛЕНОГО ДВОМА НАСКРІЗНИМИ ОТВОРАМИ

Панченко Борис Євгенійович

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, м. Одеса,
ORCID: 0000-0002-8085-4043,

pr-bob@ukr.net

Ковальов Юрій Дмитрійович

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, м. Одеса,
ORCID: 0009-0007-0658-6830,

kovalev@ukr.net

Буката Людмила Миколаївна

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, м. Одеса,
ORCID: 0000-0003-1707-1633,

ygrikluda@gmail.com

Жиронкіна Олександра Сергіївна

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, м. Одеса,
c.khrenova@gmail.com

Наведено нову математичну модель розв'язання статичної симетричної крайової задачі для шару, ослабленого двома наскрізними отворами, з торцями, покритими діафрагмою. Розроблено та чисельно апробовано новий метод, заснований на системі шести сингулярних інтегральних рівнянь другого роду. В результаті високоточного чисельного дослідження виявлено, що запропонована математична модель є адекватною та ефективною. Алгоритм добре масштабується та надає можливість ефективного керування ресурсами — співвідношення оптимального числа процесів та точності обчислень є ефективним. Наведено графік залежності зниження часу кластерних обчислень від числа процесів. Також виявлено, що зі зменшення міжцентрової відстані чи коефіцієнта Пуассона відбувається ріст відносного окружного напруження. А зі збільшенням коефіцієнта Пуассона відбувається зсув максимуму відносного окружного напруження від основи шару у його глибину. Показано, що при певній комбінації параметрів ефект

присутності в шарі іншого отвору не спостерігається. Наведено значення залежностей та відповідні графіки.

Ключові слова: тривимірні крайові завдання, сингулярні інтегральні рівняння, чисельний експеримент, статичне розтягування–стискання, наскрізні отвори.

Вступ

Сучасні конструкції, що мають різні групи неоднорідностей, працюють в умовах не тільки статичних, а й динамічних навантажень. Для вирішення інженерних задач, що виникають при моделюванні таких елементів конструкцій, доводиться враховувати складність залучення вартісних досліджень експериментальними методами. Вартісний натурний експеримент можна замінити чисельним моделюванням, а обчислювальні методи, що базуються на ґрунтовно обумовлених алгоритмах, дозволяють гнучко налаштовувати програмні додатки залежно від зміни конфігурації елементів конструкції. Якщо ж такі методи мають ще й природний паралелізм та ефективно реалізовані на кластерних системах, результати аналізу стану систем з ускладненими властивостями можуть бути отримані з високою точністю.

Відомо, що розвиток математичних моделей є окремою галуззю, незалежно від того, з якої конкретної прикладної задачі вони походять. Методи розв'язання крайових задач математичної фізики — це потужний полігон відпрацювання нових моделей, адже тут поєднуються такі галузі, як математичний апарат для відпрацювання питань адекватності, обмежень та границь використання, технології чисельної реалізації отриманого формального апарату — питання методів та адекватності результатів програмування (точність та ресурсоемність обчислень). Дані методи також поєднують питання повного або часткового використання отриманих та відпрацьованих математичних моделей для розв'язання прикладних задач з віддалено поєднаних галузей досліджень, наприклад, застосування відомих математичних моделей крайових задач математичної фізики до задач мікробіології, хімії або навіть суспільних наук. На думку авторів, останні питання становлять нерозвинену галузь досліджень із-за невизначеності. Проте значний розвиток технологій штучного інтелекту дозволяє прогнозувати ефективне використання такого напрямку. Тому питання накопичення та систематизації математичних моделей, що підтвердили свою ефективність, дуже актуальне. Адже мета — ефективне використання їх для вирішення суміжних проблем. І питання цінності тих чи інших модельних задач, а саме, тривимірні статичні задачі математичної фізики для середовищ з ускладненими властивостями, також актуальні.

На противагу методам математичного моделювання потужний розвиток має згаданий вище метод фізичного моделювання, тобто натурний експеримент. Часто виникає зворотне питання: навіщо ставити та теоретично розв'язувати «застарілі» проблеми, якщо їх складність та інтелектуальна ємність часто неспівставні з отриманим прикладним результатом, який «давно відстав» від розвитку промислових галузей. І навіть літературні дослідження доводять, що між різними порівняльними результатами спостерігаються значні проміжки часу. Проте, на думку авторів, така ситуація не зменшує, а навпаки, підкреслює актуальність появи нових математичних моделей, які, вирішуючи класичні проблеми новими процедурами, мають ще й ознаки затребуваності у суміжних галузях.

На цей час розроблено декілька математичних методів розв'язання статичних тривимірних задач математичної фізики, на основі яких отримано рішення значного числа прикладних проблем, що мають ще й теоретичну цінність. Це методи однорідних рішень [1–3], суперпозиції [4–7], власних векторних функцій [8, 9],

інтегральних перетворень [10, 11], інтегральних рівнянь [12–15] та граничних елементів [16, 17]. Перелічені методи належать до так званих аналітико-чисельних моделей, в яких безпосередній чисельний результат отримується тільки після аналітичного зведення конкретних крайових задач до відповідних процедур, наприклад, систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), властивості яких обумовлюються самими моделями. Але значного розвитку набули підходи прямого чисельного розв’язання систем диференціальних рівнянь з урахуванням крайових умов, засновані на скінчених різницях, наприклад, метод скінчених елементів [18–20]. Він дозволяє значно розширити та узагальнити коло середовищ, компонентів та форм границь в крайових задачах. Проте часто виникають додаткові питання обумовленості та точності отриманих результатів [20].

У цьому дослідженні використано метод сингулярних інтегральних рівнянь [13–15], який має значні переваги в частині теоретичної обґрунтованості, зниження числа геометричних змінних та більш узагальненої форми границь досліджуваних середовищ.

Постановка задачі та метод розв’язання

Розглянемо пружний шар (рис. 1), де $-h \leq x_3 \leq h$, $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, послаблений двома наскрізними вздовж осі x_3 отворами, поперечні перерізи яких — гладкі криві Ляпунова довільної форми L_j ($j=1, 2$), що не перетинаються ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$).

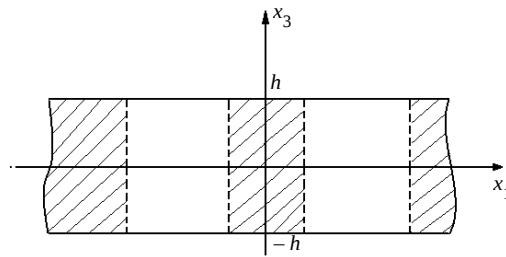


Рис. 1

Нехай на поверхнях отворів діє навантаження (N, T, Z) , а на нескінченності воно відсутнє. Припускаємо, що компоненти заданого навантаження розкладаються до ряду Фур’є за координатою x_3 на $[-h, h]$.

Нехай на торцях шару мають місце такі умови:

$$u_1(x_1, x_2, \pm h) = u_2(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = 0.$$

Запишемо компоненти вектора переміщення:

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad (i=1, 2), \quad (2)$$

$$u_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad \gamma_k = \frac{2k+1}{2h} \pi.$$

Подання компонентів вектора переміщення (2) автоматично задовольняють умови (1) на торцях шару. Після поділу змінних у рівняннях Ламе отримуємо систему

$$\kappa_k u_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0,$$

$$\kappa_k u_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0, \quad (3)$$

де $\kappa_k = \Delta - \gamma_k^2$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}$, $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ($i = 1, 2$), $\sigma = (1 - 2\nu)^{-1}$, яку можна інтегрувати наступним чином. Враховуючи, що в (3) θ_k — метагармонічна функція, введемо довільне рішення рівняння $\kappa_k^2 \psi_k = 0$ та покладемо $\theta_k = \kappa_k \psi_k$. Це дає можливість отримати:

$$u_{1k} = -\sigma \partial_1 \psi_k + \sigma \partial_2 \varphi_k,$$

$$u_{2k} = -\sigma \partial_2 \psi_k - \sigma \partial_1 \varphi_k, \quad (4)$$

$$u_{3k} = -\gamma_k \sigma \psi_k + \Phi_k,$$

де φ_k, Φ_k — довільні метагармонійні функції.

За умови, що вирази (4) задовольняють рівність $\theta_k = \kappa_k \psi_k$, приходимо до представлень:

$$u_{1k} - i u_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k),$$

$$u_{3k} = -\left(\frac{1+\sigma}{\gamma_k} \kappa_k + \sigma \gamma_k \right) \psi_k, \quad (5)$$

де $\kappa_k \varphi_k = 0$ та $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2)$, $z = x_1 + ix_2$.

Формули (2), (5) дають вирази пружних переміщень у шарі через функції φ_k, ψ_k , причому φ_k (вихрове рішення) описує поворот елемента відносно осі Ox_3 , тобто $\partial_2 u_{1k} - \partial_1 u_{2k} = \sigma \nabla^2 \varphi_k$.

Візьмемо інтегральні представлення для функцій θ_k , φ_k і ψ_k :

$$\theta_k(z) = \sum_{j=1}^2 \int_{L_j} p_{jk}(\zeta_j) K_0(\gamma_k r_j) ds_j + \frac{2}{\gamma_k} \operatorname{Re} \int_{L_j} q_{jk}(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\gamma_k r_j) d\zeta_j, \quad (6)$$

$$i\varphi_k(z) - \psi_k(z) = \sum_{j=1}^2 \frac{2i}{\gamma_k} \int_{L_j} \bar{q}_{jk}^*(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\gamma_k r_j) d\bar{\zeta}_j +$$

$$+ \frac{1}{2\gamma_k} \int_{L_j} p_{jk}(\zeta_j) r_j K_1(\gamma_k r_j) ds_j + \frac{1}{\gamma_k^2} \operatorname{Re} \int_{L_j} q_{jk}(\zeta_j) \frac{\partial}{\partial \zeta_j} (r_j K_1(\gamma_k r_j)) d\zeta_j,$$

$$r_j = |\zeta_j - z|, \quad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in L_j,$$

де $K_n(\gamma_k r_j)$ — функції Макдональда порядку n , ds_j — елемент дуги контуру L_j ; необхідно визначити невідомі функції $p_{jk}(\zeta_j)$, $q_{jk}(\zeta_j)$, $q_{jk}^*(\zeta_j)$.

Граничні умови на циліндричних поверхнях порожнин запишемо у комплексній формі:

$$(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi} (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) = 2 (N - iT), \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} [e^{-i\psi} (\sigma_{13} + i\sigma_{23})] = Z,$$

де ψ — кут між зовнішньою нормаллю до поверхні порожнин тіл віссю Ox_1 .

Використовуючи закон Гука та формули (6), подаємо умови (7) у формі:

$$2\sigma e^{2i\psi} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (i\varphi_k - \psi_k) \right\} - \frac{1}{2} \theta_k - \frac{1}{2} \sigma \gamma_k^2 \psi_k = \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \quad (8)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[\sigma \gamma_k \frac{\partial}{\partial z} (i\varphi_k - \psi_k) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \gamma_k \psi_k + \frac{1+\sigma}{\gamma_k} \theta_k \right) \right] \right\} = \frac{1}{2\mu} Z_k.$$

Система інтегральних рівнянь

Крайова задача (7) з урахуванням представлень (6) за допомогою граничного переходу на L зводиться до системи з шести сингулярних інтегральних рівнянь (CIP) 2-го роду (при кожному фіксованому k):

$$\omega_{n2k} a_k + \omega_{n3k} b_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \int_{L_j} \omega_{jik} G_{jik} ds_j = \frac{1}{2\mu} (N_k - iT_k), \quad (9)$$

$$\omega_{n1k} c_k + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 \int_{L_j} \omega_{jik} G_{jik}^* ds_j = -\frac{1}{2\mu} Z_k,$$

$$\text{де } a_k = \frac{\pi i}{2\gamma_k} (1 + \sigma), \quad b_k = \frac{\pi}{2\gamma_k} (1 + \sigma), \quad c_k = -b_k,$$

$$G_{j1k}(\zeta_j, \zeta_0) = \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_j K_1(\gamma_k r_j) (e^{2i(\psi_0 - \alpha_0)} + 1) - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r_j),$$

$$G_{j2k}(\zeta_j, \zeta_0) = \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_j K_0(\gamma_k r_j) \left[\sin(\psi_j - \alpha_0) - \frac{ie^{2i\psi_0}}{2} h_{1j}(\psi_j, \alpha_0) \right] +$$

$$+ K_1(\gamma_k r_j) \left\{ \frac{\sigma}{2} \sin(\psi_j - \alpha_0) + \frac{ie^{2i\psi_0}}{2} \left[(1 + \sigma) e^{-i(\psi_j + \alpha_0)} - \frac{\sigma}{2} h_{2j}(\psi_j, \alpha_0) \right] \right\},$$

$$G_{j3k}(\zeta_j, \zeta_0) = \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_j K_0(\gamma_k r_j) \left[\cos(\psi_j - \alpha_0) + \frac{e^{2i\psi_0}}{2} h_{2j}(\psi_j, \alpha_0) \right] +$$

$$+ K_1(\gamma_k r_j) \left\{ \frac{\sigma}{2} \cos(\psi_j - \alpha_0) + \frac{e^{2i\psi_0}}{2} \left[(1 + \sigma) e^{-i(\psi_j + \alpha_0)} + \frac{\sigma}{2} h_{1j}(\psi_j, \alpha_0) \right] \right\},$$

$$h_{1j}(\psi_j, \alpha_0) = e^{i(\psi_j - 3\alpha_0)} - e^{-i(\psi_j + \alpha_0)},$$

$$h_{2j}(\psi_j, \alpha_0) = e^{i(\psi_j - 3\alpha_0)} + e^{-i(\psi_j + \alpha_0)},$$

$$G_{j1k}^*(\zeta_j, \zeta_0) = \frac{1}{2} [\sigma \gamma_k r_j K_0(\gamma_k r_j) - K_1(\gamma_k r_j) (1 + \sigma)] \cos(\psi_0 - \alpha_0),$$

$$G_{j2k}^*(\zeta_j, \zeta_0) =$$

$$= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_j K_1(\gamma_k r_j) [\sin(\psi_0 + \psi_j - 2\alpha_0) - \sin(\psi_0 - \psi_j)] - \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r_j) \sin(\psi_0 - \psi_j),$$

$$G_{j3k}^*(\zeta_j, \zeta_0) =$$

$$= \frac{\sigma \gamma_k}{4} r_j K_1(\gamma_k r_j) [\cos(\psi_0 + \psi_j - 2\alpha_0) + \cos(\psi_0 - \psi_j)] + \frac{1}{2} K_0(\gamma_k r_j) \cos(\psi_0 - \psi_j),$$

$$q_{jk}^* = q_{jk} \frac{i}{\sigma \gamma_k^2} (1 + \sigma), \quad \omega_{j1k} = p_{jk}, \quad \omega_{j2k} = \operatorname{Re} q_{jk}, \quad \omega_{j3k} = \operatorname{Im} q_{jk}.$$

$$\zeta_j - \zeta_0 = r_j e^{i\alpha_j}, \quad \zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in L_j, \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L_j.$$

Тут невідомі функції, що підлягають визначенню, позначені ω_{jik} .

Схема чисельного дослідження

Розглянемо, наприклад, шар, ослаблений двома наскрізними отворами еліптичного поперечного перерізу:

$$L_1 : \xi_{11} = R_{11} \cos \varphi_1 + d_{11}, \quad \xi_{21} = R_{21} \sin \varphi_1 + d_{21}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi;$$

$$L_2 : \xi_{12} = R_{12} \cos \varphi_2 + d_{12}, \quad \xi_{22} = R_{22} \sin \varphi_2 + d_{22}, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi,$$

або двома наскрізними отворами квадратного поперечного перерізу (квадрати з округленими кутами):

$$L_1 : \xi_{11} = a (\cos \varphi_1 + c \cos 3\varphi_1) + d_{11}, \quad \xi_{21} = a (\sin \varphi_1 - c \sin 3\varphi_1) + d_{21},$$

$$L_2 : \xi_{12} = a (\cos \varphi_2 + c \cos 3\varphi_2) + d_{12}, \quad \xi_{22} = a (\sin \varphi_2 - c \sin 3\varphi_2) + d_{22},$$

$$0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi, \quad c = 0,14036.$$

На поверхнях порожнин діє навантаження $N = -P (h^2 - x_3^2)$, $P = \text{const}$.

Для характеристики напруженого стану поверхні порожнини розраховується напруження

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \quad \theta = \psi - \pi. \quad (10)$$

При чисельній реалізації алгоритму методом механічних квадратур [21, 22] система інтегральних рівнянь (СІР) (9) зводилася до СЛАР. Високоточні обчислення здійснювалися за схемою, запропонованою в [23]. Послідовність обчислень така: після чисельного розв'язання СІР (9) визначалися коефіцієнти Фур'є тензора напружень $\sigma_{ij}^{(k)}$. Далі за формулою (10) розраховувалося шукане напруження на поверхні порожнин.

Нехай СІР зведена до СЛАР, всі елементи матриці якої є результатом дискретизації контурів. Очевидно, що розмір матриці пропорційний числу отворів. Для дослідження описаного методу при значному числі отворів, а також для отримання високоточних результатів з похибкою обчислень до 10^{-6} і перевірки збіжності рішень при значному числі колокацій виникає потреба у суттєвих обчислювальних ресурсах. Застосуємо розпаралелювання алгоритму згідно з [23, 24]. Зі структури СІР (9) випливає, що кожен елемент матриці СЛАР визначається координатами вузлів дискретизації контурів кожного отвору.

Як показано на рис. 2, метод обчислень зводиться до обходу кожного контуру позаінтегральною змінною ζ_0 за точками колокації і одночасному обходу кожного контуру за аналогічними чи іншими вузлами змінною інтегрування ζ_j .

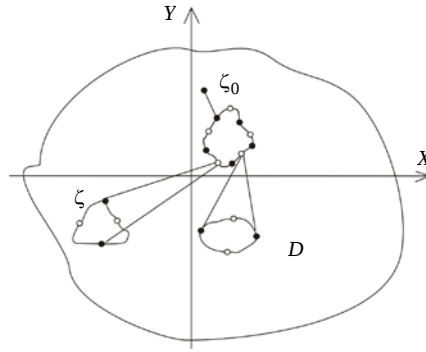


Рис. 2

Важлива особливість алгоритму такого обходу полягає в тому, що матриця СЛАР формально є результатом декартова добутку цих множин. Це означає, що елементи матриці незалежні один від одного, що неформально доводить можливість застосування паралельного обчислення.

Таким чином, змінна ζ_0 формує рядки матриці СЛАР, а змінна ζ_j — її стовпці. Діагональні елементи матриці відповідають коефіцієнтам системи, обчисленим у спільних для кожного отвору вузлах ζ_0 і ζ_j . Інші коефіцієнти обчислюються так, що значення ζ_0 належать множині точок колокації з одних контурів, а значення змінних інтегрування ζ_j — з інших.

Паралельно-конвеєрна схема обчислень складається з чотирьох етапів, число процесів яких обернено-пропорційне тривалості інтервалів часу обчислень. Це синтез масивів вихідних даних, синтез матриці СЛАР, розв'язання СЛАР (наприклад, методом Гаусса) та синтез масивів підсумкових рішень. Перший, другий та четвертий етапи макроконвеєра не потребують пересилань даних, що означає незалежність обчислень: чим більша матриця, тим більше число процесів для мінімізації загального часу обчислень. На третьому етапі для розв'язання СЛАР завжди існує оптимальне число процесів, що визначається специфікою самої матриці, наприклад, числом її обумовленості [24–26]. Це означає, що для розв'язання СЛАР оптимальне число процесів значно менше, ніж для незалежних обчислень — «пропорційній» мінімізації результуючого часу (замовленню все більшого й більшого числа процесів) «заважають» пересилки даних. Такий несиметричний алгоритм підтримує, наприклад, операційна система МРІ-2 за допомогою процедури *spawn* («ікрометання»). Проте в цих дослідженнях таке забезпечення не використовувалося. Тому підсумкове оптимальне число процесів чисельної реалізації СІР (9) отримувалося експериментальним шляхом.

На рис. 3 надано графік залежності загального часу кластерних обчислень масиву напруження (10) на отворі еліптичного контуру від числа процесів для одного варіанта навантаження. З графіка випливає, що весь алгоритм добре масштабується і має оптимальне число процесів.

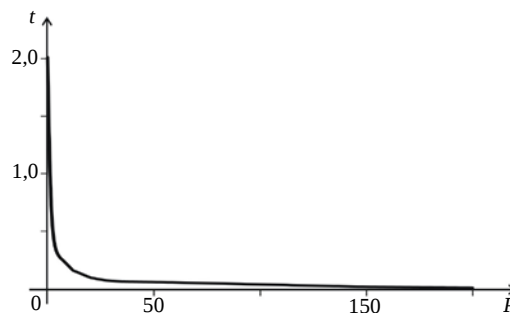


Рис. 3

Як і в [27], для алгоритму обчислення параметрів (10) оптимальним виявилось 150–200 процесів. Проте тут точність — 10^{-6} , яка досягалася при числі точок колокації контуру кожного отвору $N = 700$ та числі наближень ряду Фур'є (2) $k = 5$ (дослідження питання подальшого зростання точності результату не проводилося).

Слід зазначити, що отримано очікуваний результат, який можна прогнозувати спостерігати на СІР як для більш спрощених задач математичної фізики (дифракція гармонічних хвиль зсуву [27]), так і для тривимірних статичних. Адже структура процесу обчислень в моделях, заснованих на СІР, здебільшого незмінна та побудована на добре обумовлених процедурах. Причому алгоритм трьох етапів з чотирьох дозволяє отримувати оптимальне число процесів теоретично, не використовуючи кластер. А обсяг пересилок етапу СІАР також теоретично можна оцінити для того чи іншого СІР [26], що й надає прогнозованість підсумкового оптимального числа процесів. Як зазначалося вище, основна ідея побудови моделі цього дослідження — представити розв'язок тривимірної задачі як нескінченний ряд рішень задач рівня плоских. І оскільки для точності 10^{-6} достатньо 5–7 членів ряду, то це не впливає на підсумкове значення оптимального числа процесів.

Оскільки для даної методики розв'язання крайової задачі основна операція при обчисленні кожного елемента матриці — визначення різницевого аргумента циліндричних функцій Макдональда, заданого на множині значень параметричних координат отворів, а також обчислення цих функцій і коефіцієнтів при них, то на наступному кроці на кожному клоні хоста запускаються цикли процедур визначення зазначених коефіцієнтів. При цьому синхронізація процесів на четвертому етапі не потрібна, оскільки підсумкова матриця збирається за фактом завершення останнього.

Обчислювальний процес розв'язання СІАР розпаралелюється відповідно до [23, 24, 28]. Паралельне обчислення шуканих напружень здійснюється внесенням отриманих на попередньому етапі масивів значень шуканих функцій ω_{jik} до представлень (10) аналогічно процедурі формування матриці СІАР.

Результати чисельного дослідження

На рис. 4–6 наведено епюри розподілу відносного окружного напруження $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} / P$:

- 1) вздовж координати за товщиною у точці їх максимального значення;
- 2) за контуром напрямної циліндричної поверхні.

Чисельні результати отримані для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,15$.

Нехай контур L_2 знаходиться ліворуч від осі Ox_2 , а контур L_1 — праворуч. Позначимо l_x відстань між центрами отворів у випадку, коли їх центри розташовані на осі Ox_1 . Отже, $l_x = |d_{11}| + |d_{12}|$, $d_{21} = d_{22} = 0$.

Значення, наведені на рис. 4, відповідають контуру L_2 у випадку кругових порожнин наступної геометрії: $R_{11} = R_{21} = R_{12} = R_{22} = 1$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$.

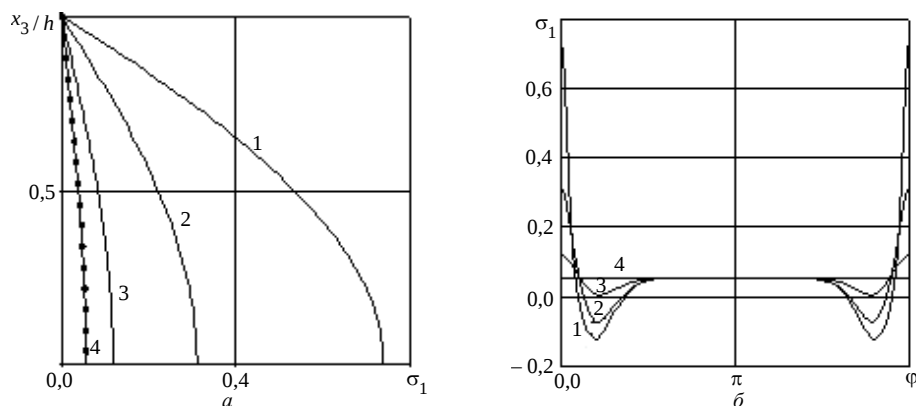


Рис. 4

Криві 1–4 (див. рис. 4, *a*) побудовано для значення $h/R_{11} = 0,5$ в точці $\varphi = 0$ при $l_x/R_{11} = 2,02; 2,1; 2,5; 4$ відповідно. Значення відносного окружного напруження, що визначаються кривою 4, співпадають з відповідними значеннями для схеми зі збільшеною відстанню між отворами (від 4–5 радіусів при $\nu = 0,15$), коли взаємний вплив концентраторів малий, тобто лише з одним концентратором напружень геометрії [29].

Точками вздовж кривої 4 нанесені результати розв’язання симетричної крайової задачі для шару, послабленого одним наскрізним отвором відповідної геометрії, отримані методом рядів. Збіг результатів, отриманих цим методом, показує коректність та достовірність запропонованого алгоритму.

На рис. 4, *б* наведено розподіл величини σ_1 вздовж контуру напрямної циліндричної поверхні перетину $x_3 = 0$. Криві 1–4 рис. 4, *б* відповідають кривим рис. 4, *a* за механічними та геометричними характеристиками. Пряма 4 також відповідає схемі з відсутністю взаємного впливу концентраторів напружень — значення збігаються зі значеннями розв’язку осесиметричної крайової задачі для шару, послабленого одним круговим отвором.

Криві, наведені на рис. 5, відповідають контуру L_2 у випадку порожнини квадратного поперечного перерізу (з округленими кутами): $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

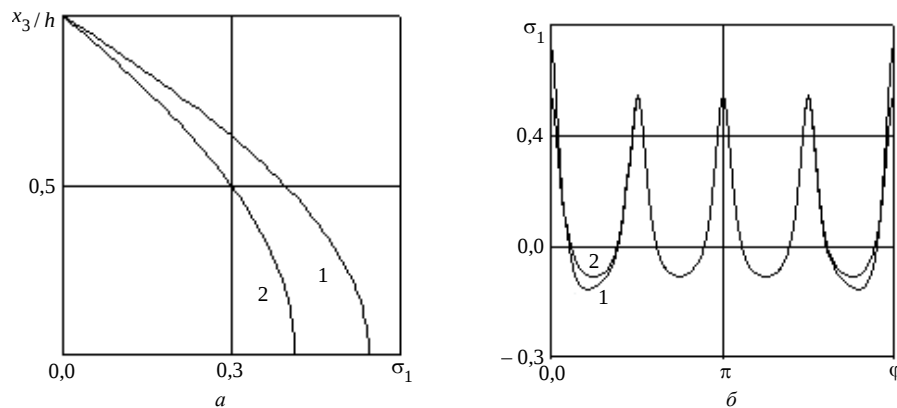


Рис. 5

Криві 1, 2 (рис. 5, *a*) побудовані для значення $h/a = 0,5$ в точці $\varphi = 0$ при $l_x/a = 2,5; 8$ відповідно. Крива 2 відповідає схемі з одним концентратором напружень відповідної геометрії.

На рис. 5, *б* наведено розподіл напружень σ_1 вздовж контуру напрямної циліндричної поверхні перетину $x_3 = 0$. Криві 1, 2 відповідають аналогічним кривим рис. 5, *a* за механічними та геометричними параметрами.

Значення відносного окружного напруження, наведені на рис. 6, відповідають контуру L_2 у випадку еліптичних отворів наступної геометрії: $R_{11} = R_{12} = 1$; $R_{21} = R_{22} = 0,3$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$.

Криві 1–4 (рис. 6, *a*) побудовані для значення $h/R_{11} = 1$ в точці $\varphi = 0$ при $R_{21} = R_{22} = 0,3$ та $l_x/R_{11} = 2,1; 2,2; 2,6; 8$ відповідно. Контури концентраторів напружень відповідають геометрії з [30, 31], а точками вздовж кривої 4 нанесені результати розв’язання окремої крайової задачі для шару, послабленого одним наскрізним отвором.

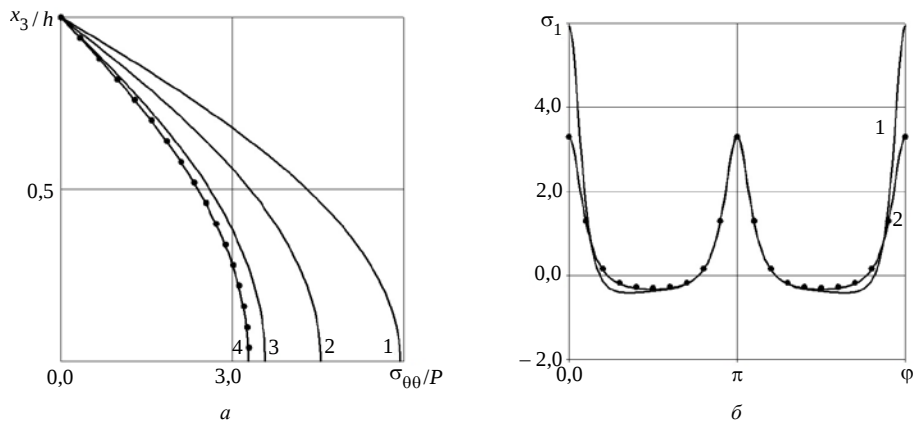


Рис. 6

На рис. 6, б наведено розподіл величини σ_1 вздовж контуру напрямної циліндричної поверхні перетину $x_3 = 0$ при $R_{21} = R_{22} = 0,3$. Криві 1, 2 (див. рис. 6, б) побудовані для значення $h/R_{11} = 1$ при $l_x/R_{11} = 2,1; 8$ відповідно. Точками вздовж кривої 2 також нанесені результати для розв'язання крайової задачі для шару, послабленого одним наскрізним отвором відповідної геометрії.

Висновок

Запропонована математична модель розв'язання тривимірних статичних осесиметричних крайових задач для шару в умовах розтягування-стискування з системою наскрізних отворів та торцями, покритими діафрагмою, адекватна та ефективна. Алгоритм добре масштабується та надає можливість ефективного керування ресурсами — співвідношення оптимального числа процесів та точності обчислень є ефективним.

Для поставленої задачі за результатами чисельного дослідження можна зробити такі висновки:

- а) зі зменшенням міжцентрової відстані та коефіцієнта Пуассона зростає відносне окружне напруження;
- б) для $\nu = 0,15$ ефект присутності у шарі іншого отвору перестає спостерігатися з $l_x/R_{11} = 4$ при $h/R_{11} = 0,5$ та з $l_x/a = 4$ при $h/a = 0,5; 1$.

B. Panchenko, Yu. Kovalev, L. Bukata, O. Zhironkina

MATHEMATICAL MODELING OF A SYMMETRIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LAYER WITH DIAPHRAGM-COVERED ENDS WEAKENED BY TWO THROUGH HOLES

Boris Panchenko

State University of Intellectual Technologies and Communication, Odesa,
pr-bob@ukr.net

Yuriy Kovalev

State University of Intellectual Technologies and Communication, Odesa,
kovalev@ukr.net

Liudmila Bukata

State University of Intellectual Technologies and Communication, Odesa,
ygrikluda@gmail.com

Olexandra Zhironkina

State University of Intellectual Technologies and Communication, Odesa,
c.khrenova@gmail.com

The paper presents a new mathematical model for the solution of a static symmetric boundary value problem for a layer weakened by two through holes with sliding sealing of its ends. A new method based on a system of six singular integral equations has been developed and tested numerically. As a result of a high-precision numerical study, it was found that with a decrease in the center-to-center distance or Poisson's ratio, an increase in the relative circumferential stress occurs. And with an increase in the Poisson's ratio, the maximum relative circumferential stress shifts from the bases of the layer to its depth. Under certain combinations of parameters, the effect of the presence of the second hole in the layer ceases to affect. The corresponding values are given. The paper presents the respective dependency graphs.

Keywords: three-dimensional boundary value problems, singular integral equations, numerical experiment, static stretching–compression, through holes.

ПОСИЛАННЯ

1. Лур'є А.І. До теорії товстих плит. *Прикладна математика та механіка*. 1942. Т. 6, вип. 2/3. С. 151–168.
2. Аксентян О.К., Ворovich І.І. Напружений стан товстої плити. *Прикладна математика та механіка*. 1962. Т. 26, вип. 4. С. 687–696.
3. Ворovich І.І., Малкіна О.С. Напружений стан товстої плити. *Прикладна математика та механіка*. 1967. Т. 31, вип. 2. С. 230–241.
4. Грінченко В.Т. Рівновага і коливання пружних тіл кінцевих розмірів. К. : Наук. думка, 1978. 264 с.
5. Грінченко В.Т., Улітко А.Ф. Динамічна задача теорії пружності для прямокутної призми. *Прикладна механіка*. 1971. Т. 8, № 9. С. 50–57.
6. Lamé G. Lecons sur la theorie mathematique de l'elasticite des corps solides. Paris, Bechelier, 1852. 335 p.
7. Байда Е.М. Деякі просторові задачі теорії пружності. Л. : Вид-во ЛДУ, 1983. 231 с.
8. Улітко А.Ф. Метод власних векторних функцій у просторових задачах теорії пружності. К. : Наук. думка, 1979. 261 с.
9. Грінченко В.Т., Улітко А.Ф., Шульга Н.А. Електропружність. К. : Наук. думка, 1989. 280 с.
10. Лейбензон Л.С. Курс теорії пружності. М. : Гостехіздат, 1947. 646 с.
11. Ліфшиц П.З. Напружений стан у пружному циліндрі, навантаженому з бокової поверхні дотичними зусиллями. *Інж. збірка*. 1960. Т. 30. С. 47–57.
12. Купрадзе В.Д., Гегелія Т.Г., Башелейшвілі М.О., Бурчуладзе Т.В. Тривимірні задачі математичної теорії пружності та термопружності. М. : Наука, 1976. 658 с.
13. Міхлін С.Г. Багатовимірні сингулярні інтеграли та інтегральні рівняння. М. : Фізматгиз, 1962. 379 с.
14. Мусхелішвілі Н.І. Сингулярні інтегральні рівняння. М. : Наука, 1968. 514 с.
15. Панченко Б.Є, Ковальов Ю.Д., Сайко І.М. Чисельне дослідження систем сингулярних інтегральних рівнянь першого роду та з невизначеним індексом у задачі про дифракцію плоских хвиль на нерухомому включенні. *Кібернетика та системний аналіз*. 2020. Т. 56, № 4. С. 3–17.
16. Farid A.F., Rashed Y.F. BEM for thick plates on unilateral Winkler springs. *Innov. Infrastruct. Solut.* 2018. Vol. 3. 12 p.

17. John T. Katsikadelis, Nick G. Baboukos, Flutter instability of laminated thick anisotropic plates using BEM. *Acta Mechanica*. 2018. Vol. 229. P. 613–628.
18. Карпіловський В.С., Метод скінченних елементів і задачі теорії пружності. Київ : Софія А, 2022. 275 с.
19. Wenchun Jiang, Wanchuck Woo, Yu Wan, Yun Luo, Xuefang Xie. Evaluation of through-thickness residual stresses by neutron diffraction and finite-element method in thick weld plates. *J. Pressure Vessel Technol.* 2017. 139 (3). 10 p.
20. Мусаєв В.К., Оцінка точності й достовірності чисельного моделювання при розв'язанні задач про дифракцію та інтерференцію нестационарних пружних хвиль напружень. *Успіхи сучасного природознавства*. 2015. № 1. С. 1184–1187.
21. Олександрович А.І. Застосування теорії функцій двох комплексних змінних до розв'язання просторових задач теорії пружності. *Вісті АН СРСР. Механіка твердого тіла*. 1977. № 2. С. 164–168.
22. Алтухов Є.В. Метод І.І. Воровича тривимірної теорії термодинаміки пластин. *Теорет. та прикладна механіка*. 2005. Вип. 41. С. 3–8.
23. Панченко Б.Є., Назаренко А.М. Каркасний аналіз предметної області: стаціонарні динамічні задачі теорії пружності для ізотропних середовищ з довільними неоднорідностями. *Кібернетика і системний аналіз*. 2013. № 1. С. 172–187.
24. Хіміч О.М., Полянюк В.В. Ефективність двовимірних блочно-циклічних паралельних алгоритмів. *Проблеми програмування*. 2008. № 3. С. 145–149.
25. Панченко Б.Є. Про чисельне дослідження систем сингулярних інтегральних рівнянь першого роду та з невизначеним індексом з урахуванням числа обумовленості СЛАР. *Вісник ХПІ, Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2019. № 8. С. 155–164.
26. Шешко М.А., Шуляєв Д.С., Расолько Г.А., Мастяниця В.С. До питання обумовленості матриці лінійної алгебраїчної системи, що виникають при апроксимації сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коши. *Диференц. рівн.* 1999. Т 35, № 9. С. 1278–1285
27. Панченко Б.Є. Високоточне кластерне розв'язання задачі дифракції хвиль зсуву на системі отворів в полунескінченному ізотропному середовищі з защемленою границею. *Проблеми програмування*. 2012. № 1. С. 121–131
28. Хіміч О.М., Молчанов І.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Паралельні алгоритми рішення задач обчислювальної математики. К. : Наук. думка, 2008. 247 с.
29. Александров А.Я., Соловйов Ю.І. Про узагальнення способу розв'язання осесиметричних задач теорії пружності за допомогою аналітичних функцій на просторові задачі без осової симетрії. *ДАН СРСР*. 1964. Т. 154, № 2. С. 294–297.
30. Аксентян О.К., Ворович І.І. Напружений стан товстої плити. *Прикладна математика та механіка*. 1962. Т. 26, вип. 4. С. 687–696.
31. Олександрович А.І. Застосування теорії функцій двох комплексних змінних теорії пружності. *ДАН СРСР*. 1977. Т. 232, № 3. С. 542–544.

Отримано 30.03.2023

Після доопрацювання 02.05.2023