

КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНІ ПРОЦЕСИ ТА МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 518.9

А.О. Чикрій, В.А. Пепеляєв, О.А. Чикрій, Л.В. Барановська

КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ ТА НЕВИЗНАЧЕНОСТІ*

Чикрій Аркадій Олексійович

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
ORCID: 0000-0001-9665-9085,

g.chikrii@gmail.com

Пепеляєв Володимир Анатолійович

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
ORCID: 0009-0009-3169-1776,

pepelaev@yahoo.com

Чикрій Олексій Аркадійович

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
ORCID: 0000-0002-8234-6499,

g.chikrii@gmail.com

Барановська Леся Валеріївна

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», ORCID: 0000-0003-0024-8180,

lesia@baranovsky.org

Робота присвячена вивченню ігрових задач зближення для лінійних конфліктно-керованих процесів з дробовими похідними довільного порядку. При цьому розглядаються класичні дробові похідні Рімана–Ліувілля, регуляризовані похідні Джрбашяна–Нерсесяна або Капуто і секвенціальні похідні Міллера–Росса. При фіксованих керуваннях гравців встановлюються представлення розв’язків у вигляді аналогів формули Коші з використанням узагальнених матричних функцій Міттаг–Леффлера. При дослідженні в ролі базового використовується метод розв’язувальних функцій, що дозволяє отримати достатні умови розв’язності задачі зближення за деякий гарантований час. При цьому використовується аналог умови Понтрягіна, що розпадається на дві умови за рахунок введення спеціальної матричної функції. Ця функція пов’язана з ресурсами керування гравців та тілесною складовою термінальної множини. Вищезгадана умова виражається за допомогою геомет-

* Робота виконана за часткової підтримки Національного фонду України. Грант №2020. 02/0121 «Аналітичні методи та машинне навчання в теорії керування і прийняття рішень за умов конфлікту та невизначеності».

ричної різниці множин і означає непорожність відповідних багатозначних відображень. Вона дає можливість на основі теореми про вимірний вибір побудувати контркерування переслідувача, яке є суперпозиційно вимірною функцією і дозволяє завершити гру. У прикладі з простою матрицею отримані умови ε -зближення з використанням асимптотик скалярних функцій Міттаг–Леффлера. Результати ілюструються на модельному прикладі ігрової задачі з розділеними рухами дробового порядку π і e .

Ключові слова: дробова похідна, ігрова задача, багатозначне відображення, умова Понтрягіна, функція Міттаг–Леффлера.

Вступ

З відомою часткою суб'єктивізму методи дослідження динамічних ігор зближення можна умовно поділити на два типи. Перший відповідає конструкціям, для яких характерна спроба побудувати оптимальні стратегії гравців. Це методики, пов'язані з альтернативами М.М. Красовського [1, 2], обернені процедури Л.С. Понтрягіна–Б.М. Пшеничного [3, 4] та ідеологія Р. Айзекса [5], що стосується основного рівняння теорії диференціальних ігор — рівняння типу Гамільтона–Якобі і знаходження його в'язкосних розв'язків [6]. Кожний із цих підходів так чи інакше пов'язаний з динамічним програмуванням. Другий тип — це методи, що забезпечують гарантований результат. У цьому випадку питання про оптимальність не виноситься на передній план. Важливою обставиною є досягнення мети і виконання задачі за тих чи інших реальних умов. Задовольняють вищеперерахованим вимогам, перш за все, правило екстремального прицілювання М.М. Красовського [7, 8], перший прямий метод Л.С. Понтрягіна [3, 9] і метод розв'язувальних функцій [10]. Зауважимо, що в лінійному випадку умови завершення гри, скажімо, за час першого поглинання, при описі множин використовують апарат опорних функцій, в той час як метод розв'язувальних функцій базується на функціоналах Мінковського, точніше, на обернених до них відображеннях. Останній дає теоретичне обґрунтування добре відомих проектувальникам ракетної і космічної техніки методів погонної кривої Л. Ейлера, паралельного зближення, переслідування за променем та пропорційної навігації.

Оскільки об'єктом дослідження є лінійні конфліктно-керовані процеси з дробовими похідними, то, певно, потрібно заздалегідь зауважити деякі відмінні моменти порівняно з рівняннями цілого порядку. Так, якщо рівняння з дробовою похідною Рімана–Ліувілля, то замість звичайних даних Коші в початковий момент часу $t = 0$ потрібно задавати інтеграл відповідного дробового порядку. Це пов'язано з тим, що розв'язок такого рівняння має особливість в нулі, і тільки такі початкові умови природні в даному випадку. Однак із фізичних міркувань бажано мати звичайну задачу Коші для рівнянь з дробовими похідними [11]. Тому М.М. Джрбашян, А.Б. Нерсисян [12] і М. Капуто [13] запропонували замість похідних Рімана–Ліувілля розглядати їх регуляризовані значення, а як початкові дані використовувати звичайні умови Коші.

Інші обставини призвели до розгляду секвенціальних дробових похідних Міллера–Росса [14]. Намагання понизити порядок диференціальних рівнянь за допомогою збільшення їх кількості стикається з відсутністю напівгрупової властивості у згаданих раніше похідних. Секвенціальні дробові похідні в цьому сенсі є зручним об'єктом.

Зрозуміло, для дослідження конфліктно-керованих процесів з дробовими похідними може використовуватися будь-який із перерахованих методів. У даній роботі вибрано метод розв'язувальних функцій. Суть його полягає в побудові за відомими параметрами процесу деяких числових функцій, що характеризують інтегрально хід конфліктно-керованого процесу, тобто ступінь близькості траєкторії до термінальної множини, і виконують ключову роль при розв'язанні кон-

кретних задач. Вибір керувань виконується на основі теорем вимірного вибору типу Філіппова–Кастена [15]. Оскільки розв’язувальні функції опорні до визначальних багатозначних відображень, то апарат опуклого аналізу дозволяє будувати їх в аналітичному вигляді для достатньо широкого класу конфліктно-керованих процесів дробового порядку. Використання асимптотичних представлень для функцій Міттаг–Леффлера, що беруть участь у визначенні фундаментальних матриць систем, дає можливість зробити висновок про можливість завершення гри за скінченний гарантований час. До кола питань, що розглядаються, долучаються роботи [16–28].

Дробові похідні Рімана–Ліувілля, Капуто і Міллера–Росса

Позначимо R^m m -мірний дійсний евклідовий простір і R_+ — позитивну дійсну напіввісь. Нехай $n-1 < \rho < n$, $n \in N$ (N — множина натуральних чисел), а $f(t)$, $f: R_+ \rightarrow R^m$, — деяка n раз неперервно диференційована функція. Дробова похідна Рімана–Ліувілля порядку ρ ($n-1 < \rho < n$, $n \in N$) вводиться таким чином [29]:

$$D^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція, що задовольняє рівняння $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Справедлива формула

$$D^\rho f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}} d\tau. \quad (2)$$

Таким чином, похідна в сенсі Рімана–Ліувілля може бути представлена у вигляді суми сингулярних членів

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)} f^{(k)}(0) \quad (3)$$

і інтеграла

$$\frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}} d\tau.$$

Останній носить назву дробової похідної в сенсі Капуто або регуляризованої дробової похідної. Наявність складників (3) приводить до того, що дробові похідні Рімана–Ліувілля мають особливість в нулі, і в задачі Коші для диференціальних рівнянь дробового порядку в сенсі Рімана–Ліувілля (при описі динамічних систем) необхідно задавати початкові умови спеціального вигляду, які не мають чіткої фізичної інтерпретації.

Цих недоліків дробової похідної Рімана–Ліувілля позбавлена рагуляризована похідна порядку ρ ($n-1 < \rho < n$, $n \in N$):

$$D^{(\rho)} f(t) = {}_0^C D_t^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho+1-n}} d\tau = D^\rho f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)} f^{(k)}(0), \quad (4)$$

яка, певно, вперше була введена Капуто [13], а також незалежно від нього, Джарбашьяном і Нерсесьяном [12].

Як похідні Рімана–Ліувілля, так і похідні Капуто, не мають ані напівгрупової властивості, ані, тим більше, властивості комутативності, тобто

$$D^{\rho+\sigma} f(t) \neq D^\rho D^\sigma f(t),$$

$$D^\rho D^\sigma f(t) \neq D^\sigma D^\rho f(t),$$

де D^ρ — оператор дробового диференціювання порядку ρ по Ріману–Ліувілью або Капуто. У зв'язку з цим введені так звані секвенціальні похідні [14], що визначаються наступним чином:

$$\mathcal{D}^\rho f(t) = D^{\rho_1} D^{\rho_2} \dots D^{\rho_m} f(t), \quad (5)$$

де $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ — мультиіндекс, а функція $f(t)$ припускається достатнє число раз неперервно-диференційованою. Взагалі кажучи, як оператор D^ρ , що лежить в основі секвенціальної похідної Міллера–Росса, можна використовувати оператор дробового диференціювання по Ріману–Ліувілью, Капуто або будь-яку іншу різновидність. Зокрема, для цілих ρ_i це може бути оператор звичайного

диференціювання $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\rho_i}$. Використання секвенціальних похідних Міллера–Росса

дозволяє, зокрема, знижати порядок диференціальних рівнянь.

Виберемо деяке $v(n-1 < v < n, n \in \mathbb{N})$. Зупинимось докладніше на випадку, коли $\rho = (j, v-n+1, n-1-j), j = 0, \dots, n-1$. Введемо позначення

$$\mathcal{D}_j^v f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{v-n+1} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

$$\mathcal{D}_j^{(v)} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j D^{(v-n+1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j} f(t),$$

де $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Наступна лема встановлює зв'язок секвенціальних похідних спеціального вигляду $\mathcal{D}_j^v f(t), \mathcal{D}_j^{(v)} f(t)$ з класичними похідними Рімана–Ліувілья і Капуто, а також одне з одним (4), (5).

Лема 1. Нехай $n-1 < v < n, n \in \mathbb{N}$, а функція $f(t)$ має абсолютно неперервні похідні до порядку $(n-1)$ включно. Тоді справедливі рівності:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^{(v)} f(t) &= D^{(v)} f(t) = D^{(v)} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} f^{(k)}(0), \\ \mathcal{D}_1^{(v)} f(t) &= \mathcal{D}_0^v f(t) = D^{(v)} f(t) + \frac{t^{n-1-v}}{\Gamma(n-v)} f^{(n-1)}(0) = \\ &= D^v f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} f^{(k)}(0), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_j^{(v)} f(t) &= \mathcal{D}_{j-1}^v f(t) = D^{(v)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} f^{(k)}(0) = \\ &= D^v f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} f^{(k)}(0), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{n-1}^{(v)} f(t) &= \mathcal{D}_{n-2}^v f(t) = D^{(v)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} f^{(k)}(0) = \end{aligned}$$

$$= D^{\nu} f(t) - \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0),$$

$$\mathcal{D}_{n-1}^{\nu} f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^{\nu} f(t).$$

Доведення наведених фактів і багатьох наступних можна знайти в [30].

Враховуючи рівність $\mathcal{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_{j-1}^{\nu} f(t)$ і поклавши $\mathcal{D}_n^{(\nu)} f(t) = D^{\nu} f(t)$, можна ввести загальне позначення

$$\mathcal{D}_j^{\nu} f(t) = \mathcal{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_{j-1}^{\nu} f(t),$$

де $n-1 < \nu < n$, $j = 0, \dots, n$. Ясно, що $\mathcal{D}_0^{\nu} f(t) = D^{(\nu)} f(t)$ і $\mathcal{D}_n^{\nu} f(t) = D^{\nu} f(t)$.

Системи дробового порядку

У роботі [31] визначена узагальнена матрична функція Міттаг–Леффлера:

$$E_{\eta}(B; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\eta^{-1} + \mu)}, \quad (6)$$

де $\eta > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел), B — довільна квадратна матриця порядку m . Узагальнена матрична функція Міттаг–Леффлера (6) грає важливу роль при вивченні лінійних систем дробового порядку.

Нехай $g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, — вимірна обмежена функція.

Розглянемо динамічну систему, еволюція якої описується рівнянням

$$D^{\rho} z = Az + g, \quad n-1 < \rho < n, \quad (7)$$

з початковими умовами

$$D^{\rho-k} z(t)|_{t=0} = z_k^0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Траєкторія системи (7), (8) має вигляд

$$z(t) = \sum_{k=1}^n t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^{\rho}; \rho-k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^{\rho}; \rho) g(\tau) d\tau, \quad (9)$$

де (9) — аналог формули Коші.

Розглянемо тепер динамічну систему дробового порядку в сенсі Капуто, що описується рівнянням

$$D^{(\rho)} z = Az + g, \quad n-1 < \rho < n, \quad (10)$$

з початковими умовами

$$z^{(k)}(0) = z_k^0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (11)$$

Траєкторія системи (10), (11) має вигляд

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\rho}}(At^{\rho}; k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^{\rho}; \rho) g(\tau) d\tau, \quad (12)$$

(12) — аналог формули Коші.

Перейдемо до розгляду систем, що описуються за допомогою секвенціальних похідних спеціального вигляду $\mathcal{D}_j^\rho$. Розглянемо динамічну систему, еволюція якої задана рівнянням

$$\mathcal{D}_j^\rho z = Az + g, \quad n-1 < \rho < n, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (13)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{j-k-1}^{\rho-k-1} z(t) \big|_{t=0} &= \bar{z}_k^0, \quad k = 0, \dots, j-1, \\ z^{(l)}(0) &= z_l^0, \quad l = 0, \dots, n-j-1. \end{aligned} \quad (14)$$

Траєкторія системи (13), (14) має вигляд

$$\begin{aligned} z(t) = & \sum_{l=0}^{n-j-1} t^l E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; l+1) z_l^0 + \sum_{k=0}^{j-1} t^{\rho-k-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho-k) \bar{z}_k^0 + \\ & + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^\rho; \rho) g(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

(15) — аналог формули Коші.

Постановка задачі

У цьому розділі наводиться постановка задачі зближення з термінальною множиною для конфліктно-керованих процесів, динаміка яких описується за допомогою дробових похідних Рімана–Ліувілля, Капуто і Міллера–Росса.

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описується наступною системою дробового порядку:

$$D^\rho z = Az + \phi(u, v), \quad n-1 < \rho < n. \quad (16)$$

Тут, як і раніше, D^ρ позначає оператор дробового диференціювання в сенсі Рімана–Ліувілля, Капуто або Міллера–Росса. В подальшому стане зрозуміло із контексту, який із операторів мається на увазі. Фазовий вектор z належить R^m , A — квадратна матриця порядку m , блок керування визначається неперервною за сукупністю змінних функцією $\phi(u, v)$, $\phi: U \times V \rightarrow R^m$, де u і v , $u \in U$, $v \in V$ — керуючі параметри відповідно першого і другого гравців, а множини допустимих керувань U і V належать множині $K(R^m)$ непорожніх компактів простору R^m .

Якщо D^ρ — оператор дробового диференціювання в сенсі Рімана–Ліувілля, тобто $D^\rho = \mathcal{D}^\rho$, то початкові умови процесу (16) задаються у вигляді (8). У такому випадку позначимо $z^0 = (z_{11}^0, \dots, z_{n1}^0)$. Якщо ж похідна в (16) розуміється в сенсі Капуто, то $D^\rho = \mathcal{D}^\rho$, початкові умови мають вигляд (11) і $z^0 = (z_{02}^0, \dots, z_{n-12}^0)$. Для секвенціальних похідних спеціального вигляду $D^\rho = \mathcal{D}_j^\rho$ початкові умови задаються рівностями (14) і $z^0 = (\bar{z}_0^0, \dots, \bar{z}_{j-1}^0, z_0^0, \dots, z_{n-j-1}^0)$.

Нарівні з динамікою процесу (16) і початковими умовами задана циліндрична термінальна множина

$$M^* = M_0 + M, \quad (17)$$

де M_0 — лінійний підпростір простору R^m , $M \in K(L)$, а $L = M_0^\perp$ — ортогональне доповнення до підпростору M_0 в R^m .

При вибраних керуваннях першого і другого гравців у вигляді вимірних за Лебегом функцій $u(t)$ і $v(t)$ зі значеннями відповідно із областей U і V задача Коші для процесу (16) з відповідними початковими умовами має єдиний неперервний розв'язок [14, 29].

Розглянемо наступну ігрову ситуацію. Перший гравець намагається вивести траєкторію процесу (16) на множину (17), а другий — максимально віддалити момент попадання траєкторії на термінальну множину. Приймавши сторону першого гравця, вважаємо, що керування другого гравця становить собою довільну вимірну функцію $v(t)$ зі значеннями із V , а перший гравець в кожний момент часу $t, t \geq 0$, формує своє керування на основі інформації про z^0 і $v(t)$:

$$u(t) = u(z^0, v(t)), u(t) \in U. \quad (18)$$

Таким чином, $u(t)$ є контркеруванням за Красовським [2], що приписується стробоскопічними стратегіями Хайєка [32].

При розв'язанні ігрової задачі використовуємо метод розв'язувальних функцій [10, 31]. Зазвичай він дозволяє реалізувати процес переслідування в класі квазістратегій. Однак у даній статті використання результатів із [33] дозволяє отримати достатні умови завершення переслідування у вказаному методі за допомогою контркерувань.

Метод розв'язувальних функцій

Позначимо Π оператор ортогонального проєктування із R^m на L . Покладемо $\phi(U, u) = \{\phi(u, v) : u \in U\}$ і розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, v) = \Pi t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho, \rho) \phi(U, v), \quad W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v),$$

визначені на множинах $R_+ \times V$ і R_+ відповідно. Умову

$$W(t) \neq \emptyset, \quad t \in R_+ \quad (19)$$

зазвичай називають умовою Понтрягіна. Вона відображає певний тип переваги за ресурсами керування першого гравця над другим. Якщо ж умова (19) не виконується, тобто для деяких $t \in R_+$, $W(t) = \emptyset$, будемо використовувати модифіковану умову Понтрягіна. Суть її така, що співвідношення між ресурсами керування гравців змінюється на користь першого гравця, а саме, в ті моменти, коли $W(t) = \emptyset$, ресурси керування вирівнюються, а витрачений на це ресурс надалі віднімається із термінальної множини. Формально процедура представляється наступним чином. Вводяться вимірна обмежена по t матрична функція $C(t)$ і багатозначні відображення

$$W^*(t, v) = \Pi t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho) \phi(U, C(t)v), \quad W^*(t) = \bigcap_{v \in V} W^*(t, v),$$

$$M(t) = M - \int_0^t \tau^{\rho-1} \Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A\tau^\rho; \rho) \phi^*(\tau, U, V) d\tau,$$

де $\phi^*(t, u, v) = \phi(u, v) - \phi(u, C(t)v)$, а $X - Y = \{z : z + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y} (X - y)$ є операцією

геометричного віднімання множин за Мінковським [3]. Під інтегралом від багатозначного відображення розуміється інтеграл Аумана, тобто об'єднання інтегралів від всіляких вимірних селекторів даного багатозначного відображення [34]. У подальшому вважатимемо, що виконана модифікована умова Понтрягіна, якщо існує така вимірна обмежена матрична функція $C(t)$, що

$$W^*(t) \neq \emptyset, \forall t \in R_+, \quad (20)$$

$$M(t) \neq \emptyset, \forall t \in R_+. \quad (21)$$

Таким чином, умову Понтрягіна (19) замінено на пару умов (20), (21). Легко бачити, що при $C(t) = I$, де I — одинична матриця, умова (21) виконана автоматично, а умова (20) співпадає з умовою (19), оскільки в такому випадку $W^*(t) \equiv W(t)$. Звідси витікає, що модифікована умова Понтрягіна (20), (21), взагалі кажучи, — менш обмежувальне припущення, ніж умова Понтрягіна (19).

У силу властивостей параметрів процесу (16) багатозначне відображення $\phi(U, C(t)v)$, $v \in V$, неперервне в матриці Хаусдорфа. Таким чином, враховуючи аналітичні властивості узагальненої матричної функції Міттаг–Леффлера, багатозначне відображення $W^*(t, v)$ вимірне по t , $t \in R_+$, і замкнутозначне по v , $v \in V$. Звідси випливає [15], що багатозначне відображення $W^*(t)$ також вимірне по t і замкнутозначне. Тоді очевидно

$$W^*(t, v) : R_+ \times V \rightarrow P(R^m), \quad W^*(t) : R_+ \rightarrow P(R^m).$$

У такому випадку кажуть, що вимірні по t багатозначні відображення $W^*(t, v)$, $W^*(t)$ нормальні [34].

Із умови (20) і теореми про вимірний вибір [15] витікає, що існує хоча б один вимірний селектор $\gamma(\cdot)$, такий що $\gamma(t) \in W^*(t)$, $t \in R_+$. Позначимо Γ множину всіх таких селекторів.

Позначимо також $h(t, z^0)$ розв'язок однорідної системи (16) при $\phi(u, v) \equiv 0$. Таким чином, якщо D^ρ означає оператор дробового диференціювання по Ріману–Ліувеллю ($D^\rho = D^\rho$), то

$$h(t, z^0) = \sum_{k=1}^n t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho-k+1) z_k^0,$$

де $z_k^0 = D^{\rho-k} z(t)|_{t=0}$, $k = 1, \dots, n$.

Для регуляризованої дробової похідної Капуто ($D^\rho = D^\rho$) отримаємо

$$h(t, z^0) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; k+1) z_k^0,$$

де $z_k^0 = z^{(k)}(0)$, $k = 0, \dots, n-1$.

У випадку секвенціальних похідних $D^\rho = \mathcal{D}_j^\rho$ маємо

$$h(t, z^0) = \sum_{k=0}^{n-j-1} t^l E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; l+1) z_l^0 + \sum_{k=0}^{j-1} t^{\rho-k-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho-k) \bar{z}_k^0,$$

де $\bar{z}_k^0 = \mathcal{D}_{j-k-1}^{\rho-k-1} z(t)|_{t=0}$, $k = 0, \dots, j-1$, $z_l^0 = z^{(l)}(0)$, $l = 0, \dots, n-j-1$.

Введемо функцію

$$\xi(t) = \Pi h(t, z^0) + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau, \quad t \in R_+, \quad (22)$$

де $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ — деякий фіксований селектор. У силу припущень селектор $\gamma(\cdot)$ сумований.

Розглянемо багатозначне відображення

$$A(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : [W^*(t-\tau, v) - \gamma(t-\tau)] \cap \alpha[M(t) - \xi(t)] \neq \emptyset\}, \quad (23)$$

задане на $\Delta \times V$, де $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$, і вивчимо його опорну функцію в напрямку $+1$:

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in A(t, \tau, v)\}, \quad (t, \tau) \in \Delta, v \in V.$$

Ця функція називається розв'язувальною [10].

Враховуючи модифіковану умову Понтрягіна (20), (21), вирази (22), (23), властивості конфліктно-керованого процесу (16), а також теореми про характеристику і обернений образ, можна показати, що багатозначне відображення $A(t, \tau, v) \in L \times B$ -вимірним [15] по τ, v , $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, а розв'язувальна функція $\alpha(t, \tau, v) \in L \times B$ -вимірна по τ, v в силу теореми про опорну функцію [15] при $\xi(t) \notin M(t)$.

Зауважимо, що при $\xi(t) \in M(t)$ маємо $A(t, \tau, v) = [0, \infty)$, отже, $\alpha(t, \tau, v) = +\infty$ для всіх $\tau \in [0, t]$, $v \in V$.

Позначимо

$$\Theta = \{t \in R_+ : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v) d\tau \geq 1\}. \quad (24)$$

Якщо для деякого $t > 0$ $\xi(t) \notin M(t)$, будемо припускати, що функція $\inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, v)$ вимірна по τ , $\tau \in [0, t]$. Якщо $\xi(t) \in M(t)$, то $\alpha(t, \tau, v) = +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, і в цьому випадку природно покласти значення інтегралу в (24) рівним $+\infty$. Тоді нерівність в (24) виконана автоматично. У випадку, коли нерівність у фігурних дужках в (24) не виконується при всіх $t > 0$, покладемо $\Theta = \emptyset$. Нехай $T \in \Theta \neq \emptyset$.

Припущення 1. Багатозначне відображення $A(T, \tau, v)$ опуклозначне при всіх $\tau \in [0, T]$, $v \in V$.

Теорема 1. Нехай для ігрової задачі (16), (17) існує обмежена вимірна матрична функція $C(t)$ така, що виконані умови (20), (21), і нехай множина M опукла. Якщо існує скінчене число T , $T \in \Theta \neq \emptyset$, таке що виконане припущення 1, то траєкторія процесу (16) може бути виведена на множину (17) із початкового положення z^0 в момент T за допомогою контркерування (18).

Доведення. Нехай $v(\tau)$, $v:[0, T] \rightarrow V$, — довільна вимірна функція. Розглянемо спочатку випадок $\xi(T) \notin M(T)$. Позначимо $\alpha(T) = \int_0^T \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v) d\tau$ і покладемо

$$\alpha^*(T, \tau) = \frac{1}{\alpha(T)} \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v).$$

Оскільки $\alpha(T) \geq 1$, згідно з (24) і в силу припущення 1, функція $\alpha^*(T, \tau)$, $\alpha^*(T, \tau) \leq \alpha(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, — вимірний селектор для кожного із багатозначних відображень $A(T, \tau, v)$, $v \in V$, тобто $\alpha^*(T, \tau) \in A(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. Розглянемо багатозначне відображення

$$U(\tau, v) = \{u \in U : \Pi(T - \tau)^{p-1} E_{\frac{1}{p}}(A(T - \tau)^p; \rho) \phi(u, C(T - \tau)v) - \gamma(T - \tau) \in \alpha^*(T, \tau)[M(T) - \xi(T)]\}. \quad (25)$$

Оскільки, в силу зроблених припущень, функція $\alpha^*(T, \tau)$ вимірна $M(T) \in K(R^m)$, оскільки $M \in K(R^m)$, а вектор $\xi(T)$ обмежений, то відображення $\alpha^*(T, \tau)[M(T) - \xi(T)]$ вимірне по τ . Крім того, ліва частина включення в (25) $L \times B$ -вимірна по τ, v і неперервна по u . Тому [34] відображення $U(\tau, v) \in L \times B$ -вимірним. Отже, згідно з теоремою про вимірний вибір в ньому існує $L \times B$ -вимірний селектор $u(\tau, v)$, який, в свою чергу, є суперпозиційно вимірною функцією. Покладемо керування першого гравця рівним $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

У випадку $\xi(T) \in M(T)$ сформуємо керування першого гравця наступним чином. Покладемо в (25) $\alpha^*(T, \tau) \equiv 0$ і позначимо $U_0(\tau, v)$ багатозначне відображення, отримане таким чином із $U(\tau, v)$. Виберемо керування першого гравця у вигляді $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$, де $u_0(\tau, v)$ — вимірний селектор відображення $U_0(\tau, v)$.

Покажемо, що в кожному із розглянутих вище випадків траєкторія процесу (16) буде виведена на термінальну множину в момент T .

Має місце формула

$$\Pi z(T) = \Pi h(t, z^0) + \int_0^T (T - \tau)^{p-1} \Pi E_{\frac{1}{p}}(A(T - \tau)^p; \rho) \phi(u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (26)$$

Розглянемо випадок $\xi(T) \notin M(T)$. Враховуючи вигляд множин $U(\tau, v)$, $U_0(\tau, v)$ і закон керування першого гравця, із (26) отримаємо наступне включення:

$$\begin{aligned} \Pi z(T) \in & \xi(T) \left[1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau) d\tau \right] + \int_0^T \alpha^*(T, \tau) M(T) d\tau + \\ & + \int_0^T (T - \tau)^{p-1} \Pi E_{\frac{1}{p}}(A(T - \tau)^p; \rho) \phi^*(T - \tau, u(\tau), v(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Оскільки $M(T)$ — опуклий компакт в силу $M \in \text{co}K(R^m)$, а $\alpha^*(T, \tau)$ — невід’ємна функція і $\int_0^T \alpha^*(T, \tau) d\tau = 1$, то $\int_0^T \alpha^*(T, \tau) M(T) d\tau = M(T)$, отже,

$$\text{Pz}(T) \in M(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1} \text{PE}_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^\rho; \rho) \phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau)) d\tau.$$

Звідси, враховуючи вигляд множини $M(T)$ із визначення операції геометричної різниці, впливає включення $\text{Pz}(T) \in M$.

Нехай тепер $\xi(T) \in M(T)$. Тоді із рівності (26) з урахуванням визначення множини $U_0(\tau, v)$ отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Pz}(T) &= \xi(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1} \text{PE}_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^\rho; \rho) \phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau)) d\tau \in \\ &\in M(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1} \text{PE}_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^\rho; \rho) \phi^*(T-\tau, u(\tau), v(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Звідси впливає включення $\text{Pz}(T) \in M$ або $z(T) \in M^*$.

Випадок розділеної динаміки

Розглянемо випадок, коли еволюція стану кожного гравця описується незалежними рівняннями з дробовими похідними. Зокрема, введені і розглянуті значно раніше М. Красовським [2] однотипні об’єкти, для яких схеми різних методів дозволяють провести обчислення майже до кінця, складаються у запропоновану нижче схему.

Нехай динаміка першого гравця, якого назовемо переслідувачем, описується рівнянням

$$D^\rho x = Ax + u, \quad x \in R^{m_1}, \quad n_1 - 1 < \rho < n_1. \quad (27)$$

Динаміка другого гравця, якого назовемо утікачем, задається рівнянням

$$D^\sigma y = By + v, \quad y \in R^{m_2}, \quad n_2 - 1 < \sigma < n_2. \quad (28)$$

Тут A і B — квадратні матриці порядку m_1 і m_2 , відповідно $U \in K(R^{m_1})$ та $V \in K(R^{m_2})$. Зауважимо, що система (27), (28) не є окремим випадком процесу (16), оскільки числа ρ і σ довільні. Припускається, що початкові умови для систем (27), (28) задані у вигляді операторів D^ρ , D^σ відповідно і визначаються векторами початкових станів x^0 , y^0 переслідувача і утікача відповідно.

Термінальна множина задається ε -відстанню за першими s ($s \leq \min(m_1, m_2)$), компонентам векторів x і y , тобто гра вважається завершеною, як тільки

$$\|x - y\|_s \leq \varepsilon. \quad (29)$$

Тут ε — фіксоване число, $0 \leq \varepsilon < \infty$.

Введемо ортопроектори $\Pi_1 : R^{m_1} \rightarrow R^s$, $\Pi_2 : R^{m_2} \rightarrow R^s$, які виділяють у векторів x і y перші s координат. Тоді нерівність (29) можна переписати у вигляді

$$\|\Pi_1 x - \Pi_2 y\|_s \leq \varepsilon. \quad (30)$$

Ситуацію, коли виконана нерівність (29), (30), назовемо поїмкою.
У силу (9)–(15) траєкторії систем (27), (28) мають вигляд:

$$x(t) = h_x(x^0, t) + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^\rho; \rho) u(\tau) d\tau,$$

$$y(t) = h_y(y^0, t) + \int_0^t (t-\tau)^{\sigma-1} E_{\frac{1}{\sigma}}(B(t-\tau)^\sigma; \sigma) v(\tau) d\tau,$$

де $h_x(x^0, t)$ і $h_y(y^0, t)$ — загальні розв'язки однорідних систем $D^\rho x = Ax$, $D^\sigma y = By$, з початковими умовами x^0 , y^0 відповідно.

Наслідуючи схему методу розв'язувальних функцій, розглянемо багатозначне відображення

$$W_1(t, v) = t^{\rho-1} \Pi_1 E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho) U - t^{\sigma-1} \Pi_2 E_{\frac{1}{\sigma}}(Bt^\sigma; \sigma) C_1(t) v;$$

$$W_1(t) = t^{\rho-1} \Pi_1 E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho) U - t^{\sigma-1} \Pi_2 E_{\frac{1}{\sigma}}(Bt^\sigma; \sigma) C_1(t) V. \quad (31)$$

Тут $C_1(t)$ — матрична функція для вирівнювання ресурсів керування. Нарівні з багатозначним відображенням $W_1(t)$ модифікована умова Понтрягіна включає відображення

$$M_1(t) = \varepsilon S - \int_0^t \tau^{\sigma-1} \Pi_2 E_{\frac{1}{\sigma}}(B\tau^\sigma; \sigma) (C_1(\tau) - I) V d\tau, \quad (32)$$

де S — замкнута куля з центром у нулі одиничного радіусу.

Будемо вважати, що виконана модифікована умова Понтрягіна, якщо з деякою вимірною обмеженою матричною функцією $C_1(t)$ багатозначні відображення, що визначаються формулами (31), (32), непусті для всіх $t \geq 0$.

Вибравши в $W_1(t)$ деякий вимірний селектор $\gamma_1(t)$ ($\gamma_1(t) \in W_1(t) \forall t \geq 0$), покладемо

$$\xi_1(t) = \Pi_1 h_x(x^0, t) - \Pi_2 h_y(y^0, t) + \int_0^t \gamma_1(\tau) d\tau.$$

Як і раніше, введемо багатозначне відображення

$$A_1(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : [W_1(t-\tau) - \gamma_1(t-\tau)] \cap \alpha [M_1(t) - \xi_1(t)] \neq \emptyset\}, \quad A_1 : \Delta \times V \rightarrow 2^{R_+}, \quad (33)$$

і його опорну функцію в напрямку +1 (розв'язувальна функція)

$$\alpha_1(t, \tau, v) = \sup\{\alpha : \alpha \in A_1\}, \quad \alpha_1 : \Delta \times V \rightarrow R_+. \quad (34)$$

За допомогою розв'язувальної функції визначимо множину

$$\Theta_1 = \{t \geq 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha_1(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1\}. \quad (35)$$

Нехай $T \in \Theta_1 \neq \emptyset$ з урахуванням виразів (33)–(35).

Припущення 2. Відображення $A_1(T, \tau, v)$ опуклозначне для всіх $\tau \in [0, T]$, $v \in V$.

Теорема 2. Нехай для ігрової задачі (27)–(30) з розділеною динамікою гравців існує обмежена вимірна матрична функція $C_1(t), t \geq 0$, така що багатозначні відображення $W_1(t)$ і $M_1(t)$ мають непусті значення для всіх $t \geq 0$. Якщо існує скінченне число T , $T \in \Theta_1 \neq \emptyset$, таке що виконане припущення 2, тоді поїмка у gr (27)–(30) трапляється в момент T .

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з урахуванням специфіки задачі (27)–(30).

Гра з простою матрицею

Перейдемо до дослідження окремих випадків і прикладів. Розглянемо конфліктно-керований процес типу (16), (17) окремого вигляду:

$$D^\rho z = \lambda z + u - v, \quad z \in R^m, \quad u \in \alpha S, \quad v \in S, \quad \alpha > 1, \quad (36)$$

де λ — дійсне число, $n-1 < \rho \leq n$, з початковими умовами (8) і термінальною множиною $M^* = \varepsilon S$, $\varepsilon \geq 0$. Вочевидь, тут $A = \lambda I$, $\phi(u, v) = u - v$, $U = \alpha S$, $V = S$, $M_0 = \{0\}$, а $M = \varepsilon S$. Тому $L = M_0^\perp = R^m$, а ортопроектор Π є оператором тотожного перетворення. Враховуючи, що для матриці $A = \lambda I$ справедлива рівність

$$E_\eta(A; \mu) = E_\eta(\lambda; \mu)I,$$

де $E_\eta(\lambda; \mu)$ — узагальнена скалярна функція Міттаг–Леффлера [29], розв’язок задачі Коші для системи (36) має вигляд

$$z(t) = \sum_{k=1}^n t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho-k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda(t-\tau)^\rho; \rho)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau.$$

За схемою методу розв’язувальних функцій перевіримо умову Понтрягіна (19) для процесу (36). Тоді

$$W(t, v) = t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho)(\alpha S - v), \quad W(t) = \left| t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho) \right| (\alpha - 1)S$$

і умова Понтрягіна виконана автоматично. Враховуючи, що значення багатозначного відображення $W(t)$ є кулею з центром у нулі змінного радіуса, покладемо $\gamma(t) \equiv 0$. Тоді

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^n t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho-k+1) z_k^0.$$

Оскільки умова Понтрягіна виконана, можна покласти $C(t) \equiv I$. Розв’язувальна функція має вигляд $\alpha(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0 : (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda(t-\tau)^\rho; \rho) \times (\alpha S - v) \cap \alpha[\varepsilon S - \xi(t)] \neq \emptyset\}$, і її можна знайти в явному вигляді як великий позитивний корінь квадратного рівняння відносно α :

$$\|w_2(t-\tau)v - \alpha \xi(t)\| = w_1(t-\tau) + \alpha \varepsilon,$$

де $w_1(t) = \alpha t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho)$, $w_2(t) = t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho)$. Розв’язуючи це рівняння, отримаємо

$$\alpha(t, \tau, v) = \frac{w_2(t-\tau)(\xi(t), v)}{\|\xi(t)\|^2 - \varepsilon^2} + \frac{\sqrt{[w_2(t-\tau)(\xi(t), v) - \varepsilon]^2 + (\|\xi(t)\|^2 - \varepsilon^2)[w_1^2(t-\tau) - \|w_2(t-\tau)v\|^2]}}{\|\xi(t)\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Звідси

$$\min_{\|v\| \leq 1} \alpha(t, \tau, v) = \frac{(a-1)|w_2(t-\tau)|}{\|\xi(t)\| - \varepsilon}.$$

Тоді в силу співвідношення (24) час закінчення гри визначається як найменший позитивний корінь рівняння

$$\int_0^t (a-1)(t-\tau)^{\rho-1} \left| E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda(t-\tau)^\rho; \rho) \right| d\tau = \left\| \sum_{k=1}^n t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho-k+1) z_k^0 \right\| - \varepsilon. \quad (37)$$

Враховуючи, що

$$\int_0^t (a-1)t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho) d\tau = (a-1)t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1),$$

при $\lambda > 0$ отримаємо рівняння

$$t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1) = \frac{\left\| \sum_{k=1}^n t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho-k+1) z_k^0 \right\| - \varepsilon}{a-1}$$

для визначення моменту закінчення гри (36).

Природно припустити, що $\xi(t)$ при $t = 0$ не належить кулі εS . У протилежному випадку гра завершилась, не почавшись. Останнє припущення тягне за собою умову $\|z_k^0\| \neq 0$. Таким чином, при $t = 0$ ліва частина рівняння (37) дорівнює 0, а права прямує до $+\infty$ при $t \rightarrow 0$, при $t > 0$ обидві частини неперервні по t . Дослідимо швидкість росту при $t \rightarrow \infty$ лівої і правої частин рівняння (37). Для цього використаємо асимптотичні представлення функцій Міттаг-Леффлера [35]. При $\rho < 2$, будь-якому μ і $\lambda > 0$ маємо при будь-якому натуральному ρ

$$E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \mu) = \frac{1}{\rho} (\lambda t^\rho)^{\frac{1-\mu}{\rho}} e^{(\lambda t^\rho)^{\frac{1}{\rho}}} - \sum_{k=1}^{\rho} \frac{(\lambda t^\rho)^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho)} + O((t^\rho)^{-1-\rho}). \quad (38)$$

Використовуючи це представлення, отримаємо

$$t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1) = \frac{1}{\rho} \lambda^{-1} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \dots,$$

$$t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1-i) = \frac{1}{\rho} \lambda^{\frac{1}{\rho}(i-\rho)} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \dots$$

Отже,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1)}{\left\| \sum_{i=1}^k t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1-i) z_i^0 \right\|^{-\varepsilon}} = \left\| \sum_{i=1}^k \lambda^{i/\rho} z_i^0 \right\|^{-1}.$$

Таким чином, корінь рівняння (37) існує, якщо

$$a-1 > \left\| \sum_{i=1}^k \lambda^{i/\rho} z_i^0 \right\|. \quad (39)$$

Розглянемо випадок $\lambda < 0$, $\alpha < 2$, μ — будь-яке. Тоді [35] при будь-якому натуральному ρ

$$E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \mu) = - \sum_{k=1}^{\rho} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\rho}}{\Gamma(\mu - k\rho)} + O(t^{-(1+\rho)\rho}). \quad (40)$$

Використовуючи це асимптотичне представлення, отримаємо

$$\begin{aligned} t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1) &= -\lambda^{-1} - \frac{\lambda^{-2} t^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \dots, \\ t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1-i) &= -\frac{\lambda^{-2} t^{-\rho-i}}{\Gamma(1-\rho-i)} - \dots, \quad i=1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1) &= -\lambda^{-1}, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{i=1}^k t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \rho+1-i) z_i^0 \right\| &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки інтеграл від модуля функції більший або рівний модулю від інтеграла, то звідси отримуємо, що рівняння (37) має скінчений позитивний корінь при будь-яких початкових умовах.

Питання про розв'язність рівняння (37) при $\rho \geq 2$ більш складне, що досить природно. У цьому випадку асимптотичні формули (38), (40) замінюються представленням [35] при будь-якому натуральному ρ :

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^\rho; \mu) &= \frac{1}{\rho} (\lambda t^\rho)^\rho \sum_{n: |\arg \lambda + 2\pi n| \leq \frac{\pi\rho}{2}} e^{\frac{2\pi i n(1-\mu)}{\rho}} \frac{1}{\exp(\lambda^\rho t \cdot e^{\frac{2\pi i n}{\rho}})} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\rho} (\lambda t^\rho)^{-k} \frac{1}{\Gamma(\mu - k\rho)} + O[(|\lambda| t^\rho)^{-\rho-1}]. \end{aligned} \quad (41)$$

Тут $i = \sqrt{-1}$. Це представлення ключове при дослідженні про розв'язність рівняння (37) при $\rho \geq 2$.

Нехай $\lambda > 0$, а $\rho \in [2, 4)$. Тоді $\arg \lambda = 0$ і в формулі (41) в сумуванні бере участь лише член, що відповідає $n = 0$. Отже, при достатньо великих t

$$E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho}; \mu) = \frac{1}{\rho} (\lambda^{\frac{1}{\rho}} t)^{1-\mu} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \dots,$$

звідки

$$E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho}; \rho+1) = \frac{1}{\rho \lambda} \lambda^{-\rho} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \dots,$$

$$t^{\rho} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho}; \rho+1) = \frac{1}{\rho \lambda} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \dots$$

Аналогічно

$$t^{\rho-j} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho}; 1+\rho-j) = \frac{1}{\rho \lambda} \lambda^{j/\rho} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \dots$$

Тоді, з урахуванням отриманих асимптотик, маємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\rho} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho}; \rho+1)}{\left\| \sum_{j=1}^k t^{\rho-j} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho}; 1+\rho-j) z_j^0 \right\|^{-\varepsilon}} = \left\| \sum_{j=1}^k \lambda^{j/\rho} z_j^0 \right\|^{-1}.$$

Таким чином, позитивний скінчений корінь рівняння (37) існує, якщо виконана нерівність (39).

Аналіз рівняння (37) на предмет існування скінченного позитивного кореня при $\lambda > 0$ і $\rho \geq 4$ проводиться аналогічно на основі формули (41). Однак при $\rho \in [4, 8)$ сумування в (41) виконується при $n = 0, 1, -1$ і викладки стають суттєво громіздкішими.

На завершення розглянемо випадок $\lambda = 0$. Тоді рівняння (37) набуває вигляду

$$\frac{t^{\rho}}{\Gamma(\rho+1)} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^k \{t^{\rho-i} / \Gamma(\rho+1-i)\} z_i^0 \right\|^{-\varepsilon}}{a-1}. \quad (42)$$

При $t = 0$ ліва частина рівняння дорівнює 0, а права — $+\infty$, якщо $z_k^0 \neq 0$. Але при $t \rightarrow \infty$ ліва частина росте швидше, ніж права, і тому позитивний корінь рівняння (42) існує при будь-яких початкових умовах, з однією лише обмовкою — $z_k^0 \neq 0$.

Приклад з розділеною динамікою

Розглянемо приклад динамічної гри переслідування–утікання дробового порядку. Нехай динаміка переслідувача описується рівнянням

$$D^{\pi} x = u, \quad \|u\| \leq 1, \quad (43)$$

де $\pi = 3,14159\dots$ — відношення довжини кола до його діаметра.

Динаміка утікача задається рівнянням

$$D^e y = v, \quad \|v\| \leq 1, \quad (44)$$

де $e = 2,71828...$ — основа натуральних логарифмів.

Тут, як і раніше, D^ρ позначає оператор дробового диференціювання порядку ρ в сенсі Рімана–Ліувілля, Капуто або Міллера–Росса. Фазові вектори x і y визначають поточну позицію в R^m переслідувача і утікача відповідно. Припускається, що $x = x(t)$ тричі, а $y = y(t)$ — двічі абсолютно неперервно диференційована на R_+ функція часу t , тобто $x(t) \in AC^3(R_+)$, $y(t) \in AC^2(R_+)$. Керуючі вектори $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u, v \in R^m$ є вимірними функціями часу t .

Оскільки A і B є $m \times m$ -нуль-матриці, то $E_{\frac{1}{\pi}}(At^\pi; \pi) = \frac{1}{\Gamma(\pi)} I$ і

$$E_{\frac{1}{e}}(Bt^e; e) = \frac{1}{\Gamma(e)} I.$$

Якщо диференціювання розуміється в сенсі Рімана–Ліувілля, тобто $D^\rho = D^{(\rho)}$, початкові умови для (43), (44) мають вигляд

$$D^{\pi-1}x(t)|_{t=0} = x_{11}^0, D^{\pi-2}x(t)|_{t=0} = x_{21}^0, D^{\pi-3}x(t)|_{t=0} = x_{31}^0, D^{\pi-4}x(t)|_{t=0} = x_{41}^0,$$

$$D^{e-1}y(t)|_{t=0} = y_{11}^0, D^{e-2}y(t)|_{t=0} = y_{21}^0, D^{e-3}y(t)|_{t=0} = y_{31}^0$$

відповідно. У цьому випадку будемо позначати

$$x^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0, x_{31}^0, x_{41}^0), y^0 = (y_{11}^0, y_{21}^0, y_{31}^0),$$

$$h_x(x^0, t) = \frac{t^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} x_{11}^0 + \frac{t^{\pi-2}}{\Gamma(\pi-1)} x_{21}^0 + \frac{t^{\pi-3}}{\Gamma(\pi-2)} x_{31}^0 + \frac{t^{\pi-4}}{\Gamma(\pi-3)} x_{41}^0,$$

$$h_y(y^0, t) = \frac{t^{e-1}}{\Gamma(e)} y_{11}^0 + \frac{t^{e-2}}{\Gamma(e-1)} y_{21}^0 + \frac{t^{e-3}}{\Gamma(e-2)} y_{31}^0.$$

Нехай тепер D^ρ — оператор дробового диференціювання в сенсі Капуто, тобто $D^\rho = D^{(\rho)}$. При цьому початкові умови для (43), (44) можуть бути записані у вигляді

$$x(0) = x_{02}^0, \dot{x}(0) = x_{12}^0, \ddot{x}(0) = x_{22}^0, \ddot{\ddot{x}}(0) = x_{32}^0,$$

$$y(0) = y_{02}^0, \dot{y}(0) = y_{12}^0, \ddot{y}(0) = y_{22}^0$$

відповідно. Позначимо

$$x^0 = (x_{02}^0, x_{12}^0, x_{22}^0, x_{32}^0), y^0 = (y_{02}^0, y_{12}^0, y_{22}^0),$$

$$h_x(x^0, t) = x_{02}^0 + tx_{12}^0 + \frac{t^2}{2} x_{22}^0 + \frac{t^3}{6} x_{32}^0, h_y(y^0, t) = y_{02}^0 + ty_{12}^0 + \frac{t^2}{2} y_{22}^0,$$

Нарешті, якщо $D^\pi = \mathcal{D}_i^\pi$ для деякого i , $i = 1, 2, 3$, і $D^e = \mathcal{D}_j^e$, $j = 1, 2$, початкові умови для (43), (44) набувають вигляду

$$x^0 = (\bar{x}_0^0, \dots, \bar{x}_{i-1}^0, x_0^0, \dots, x_{3-i}^0), y^0 = (\bar{y}_0^0, \dots, \bar{y}_{j-1}^0, y_0^0, \dots, y_{2-j}^0),$$

$$h_x(x^0, t) = \sum_{l=0}^{3-i} \frac{t^l}{l!} x_l^0 + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{t^{\pi-k-1}}{\Gamma(\pi-k)} \bar{x}_k^0,$$

$$h_y(y^0, t) = \sum_{s=0}^{2-j} \frac{t^s}{s!} y_s^0 + \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^{e-r-1}}{\Gamma(e-r)} \bar{y}_r^0.$$

Мета переслідувача полягає в тому, щоб досягти виконання нерівності

$$\|x(T) - y(T)\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (45)$$

для деякого скінченного моменту часу T . Мета утікача — уникнути виконання нерівності (45) або, якщо це неможливо, максимально віддалити момент T .

Використання описаного раніше методу розв'язувальних функцій для розділеної динаміки дозволяє отримати достатні умови розв'язності сформульованої задачі зближення.

Модифікована умова Понтрягіна виконана, якщо

$$\varepsilon \geq \left| \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)} - \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)} \right| = \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)} - \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)}.$$

Позначимо $\xi_1(t) = \Pi_1 h_x(x^0, t) - \Pi_2 h_y(y^0, t)$. Тоді рівняння для знаходження часу

$$\text{закінчення гри має вигляд } \frac{t^\pi}{\Gamma(\pi+1)} - \frac{t^e}{\Gamma(e+1)} + \varepsilon = \|\xi_1(t)\|.$$

Висновок

Для ігрових задач з дробовими похідними Рімана–Ліувілля, Капуто і Міллера–Росса отримані умови виведення траєкторії на циліндричну термінальну множину за скінчений час. При цьому керування сторони, що забезпечує цей результат, будується на основі теорем вимірного вибору. Базовим методом, який застосовується, є метод розв'язувальних функцій. Розв'язувальні функції є опорними до ключових багатозначних відображень. Це дозволяє застосувати елементи опуклого аналізу для їх знаходження і для широкого кола задач отримати розв'язувальні функції в аналітичному вигляді як більші позитивні корені квадратних рівнянь. Перевірка умов зближення в класі контркерувань здійснюється на основі асимптотичних представлень функції Міттаг–Леффлера.

Наведені приклади ігор з простою матрицею та з розділеними рухами дробового порядку π та e .

A. Chikrii, V. Pepelyaev, O. Chikrii, L. Baranovska

GAME CONTROL PROBLEMS FOR FRACTIONAL ORDER SYSTEMS UNDER THE CONDITIONS OF CONFLICT AND INDETERMINACY

Arkadii Chikrii

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,

g.chikrii@gmail.com

Volodymyr Pepelyaev

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,
pepelaev@yahoo.com

Olexiy Chikrii

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,
g.chikrii@gmail.com

Lesya Baranovska

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,
lesia@baranovsky.org

This paper is devoted to study of the game approach problems for the linear conflict-controlled processes, described by the fractional systems of arbitrary order. In so doing, the cases of classic Riemann-Liouville, the regularized Dzharbashyan-Nersesyan (Caputo), as well as the Miller-Ross sequential derivatives are considered. Under fixed controls of the players, we present system solutions in the form of the analogs of Cauchy formula, using the generalized Mittag-Leffler matrix functions. The method of resolving functions is used as a main tool of the study. This method allows to obtain sufficient conditions for approach in some guaranteed time. In so doing, an analog of Pontryagin's condition, consisting of two parts at the account of introduction of special matrix function, is used. This function is closely related with the players control resources and the solid part of the terminal set. The above mentioned condition is expressed with the help of Minkovski' geometric difference and testifies to the non-emptiness of corresponding set-valued mappings. It makes it possible, on the basis of the theorem on measurable choice, to construct the pursuer counter-control, which is the superpositionally measurable function. Application of this control ensures successful termination of the game. With the use of the asymptotes of scalar Mittag-Leffler functions, the conditions for ε -meeting are deduced in the example with the simple matrix. The case of separated motions of the players is also considered. The obtained results are illustrated on model example with separated motions of fractional orders π and e .

Keywords: fractional order derivative, game problem, set-valued mapping, Pontryagin's condition, Mittag-Leffler function.

ПОСИЛАННЯ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 455 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М. : Наука, 1985. 520 с.
3. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды: в 3 т. М. : Наука, 1988. Т. 2: Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. 576 с.
4. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев : Наук. думка, 1992. 264 с.
5. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М. : Мир, 1967. 480 с.
6. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М. : Наука, 1991. 216 с.
7. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М. : Наука, 1970. 420 с.
8. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры. *Автоматика и телемеханика*. 1968. №1. С. 65–78.
9. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М. : Изд-во МГУ, 1984. 65 с.

10. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht : Kluwer Academ. Publ., 1997. 424 p.
11. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego : Academ Press, 1999. 368 p.
12. Джрбашян М.М., Нерсисян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Изв. АН Армянской ССР*. 1968. Т. 3. Вып. 1. С. 3–29.
13. Caputo M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent–II. *Geophysical Journal International*. 1967. Vol. 13, N 5. P. 529–539. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>
14. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York : Wiley & Sons, 1993. 384 p.
15. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston : Birkhauser, 1990. 461 p.
16. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston : Birkhauser, 1994. 319 p.
17. Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations. Basel : Gordon & Breach, 1994. 625 p.
18. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М. : Наука, 1981. 288 с.
19. Melikyan A.A. Generalized characteristics of first order: applications in optimal control and differential games. Boston : Birkhauser, 1998. 385 p.
20. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
21. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Токманцев Т.Б. Стабильные мосты в дифференциальных играх на конечном промежутке времени. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. Екатеринбург. 2004. Т.10, №2. С. 158–165.
22. Kumkov S.I., Patsko V.S. Control of informational sets in a pursuit problem. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. New Trends in Dynamic Games and Applications. Boston : Birkhauser, 1995. Vol. 3. P. 191–206.
23. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М. : Изд-во МГУ, 1990. 198 с.
24. Батухтин В.Д. Об одной игровой задаче наведения с неполной информацией. *Докл. АН СССР*. 1980. Т. 44, № 4. С. 17–21.
25. Третьяков В.Е. К теории стохастических игр. *Докл. АН СССР*. 1983. Т. 269, № 3. С. 30–35.
26. Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. К. : Наук. думка, 2005. 220 с.
27. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*. New York : Springer, 2008. Vol. 17. P. 349–387.
28. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *J. Optim. Methods Softw.* 2008. Vol. 23, N 1. P. 39–72.
29. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
30. Chikrii A.A., Matichin I.I. Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross. *J. Autom. Inform. Sci.* 2008. Vol. 40, N 6. P. 1–11.
31. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг–Леффлера в игровых задачах. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. №3. С. 3–32.
32. Hajek O. Pursuit games. Mathematics in science and engineering. New York : Acad. Press, 1975. Vol.120. 266 p.
33. Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А. Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 5. С. 129–144.
34. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 479 с.
35. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М. : Наука, 1966. 672 с.

Отримано 28.02.2023