

УДК 519.872

М.Ю. Кузнєцов, І.М. Кузнєцов, А.А. Шумська

ПРИСКОРЕНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ БЛОКУВАННЯ ВИМОГ У МЕРЕЖІ ОБСЛУГОВУВАННЯ З МНОЖИННИМ ДОСТУПОМ ТА ПЕРІОДИЧНИМИ ІНТЕНСИВНОСТЯМИ ВХІДНИХ ПОТОКІВ

Кузнєцов Микола Юрійович

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України; Навчально-науковий Фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
<https://orcid.org/0000-0002-8447-7863>

kuznetsov2016@icloud.com

Кузнєцов Ігор Миколайович

Навчально-науковий Фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
<https://orcid.org/0000-0002-1881-3021>

sea_hawk@icloud.com

Шумська Алла Антонівна

Навчально-науковий Фізико-технічний інститут Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
<https://orcid.org/0000-0002-9180-9336>

shumska-aa@ukr.net

Досліджується модель мережі обслуговування, структура якої визначається неорієнтовним графом. Кожне ребро графа має певну пропускну здатність. Задано декілька пар вершин (терміналів), між якими має бути встановлений зв'язок для обслуговування різнотипних пуасонівських потоків вимог. Інтенсивності цих потоків є періодичними функціями з одним і тим же періодом. Вимога для свого обслуговування потребує певного ресурсу. Для кожної пари терміналів є перелік маршрутів їх можливого з'єднання. Вибір маршруту для обслуговування вимоги залежить від ресурсу, який потребується для її обслуговування, та від поточної пропускну здатності кожного ребра цього маршруту. Обирається перший маршрут з переліку, що задовольняє дану умову (умова доступності). Тривалість обслуговування (з'єднання) має довільний розподіл, який визначається типом вимоги та відповідним ресурсом. Якщо жоден з маршрутів не задовольняє умову доступності, то мережа обслуговування знаходиться у стані блокування вимог даного потоку із заданим ресурсом. Запропоновано метод прискореного моделювання стаціонарних ймовірностей знаходження мережі у стані блокування вимог певного потоку, які вимагають заданий ресурс для свого обслуговування. Числові приклади ілюструють суттєвий вииграш у часі моделювання порівняно з методом Монте-Карло, а також показують, наскільки зростає відносна похибка оцінок, коли ймовірність блокування прямує до нуля.

Ключові слова: мережа обслуговування, множинний доступ, періодична інтенсивність потоку, маршрут, ймовірність блокування, метод Монте-Карло, метод прискореного моделювання, розширована вибірка, відносна похибка.

© М.Ю. КУЗНЕЦОВ, І.М. КУЗНЕЦОВ, А.А. ШУМСЬКА, 2023

Вступ

Бурхливий розвиток телекомунікаційних мереж примусив дослідників зосередити увагу на розробці адекватних математичних моделей та відповідних методів їх аналізу з обчисленням кількісних показників ефективності. Саме такі числові методи дозволяють проаналізувати структуру мережі та виявити так звані «слабкі місця», усунення яких сприяє підвищенню показників ефективності мережі та створює підґрунтя для прийняття обґрунтованих проєктних рішень. Оскільки функціонування мереж носить стохастичний характер, то найбільш придатними є моделі та методи теорії масового обслуговування [1, 2].

Для мереж обслуговування суттєва увага приділяється обчисленню стаціонарної ймовірності знаходження мережі у стані блокування вимог певних потоків [3–6]. У той же час складність моделей не дозволяє обчислювати ці ймовірності за явними аналітичними формулами у формі добутку (product form) — узагальнені формули Ерланга. Тому значні зусилля зосереджено на знаходженні наближених аналітичних формул, які за формою нагадують формули Ерланга [4, 6–9]. Однак надійність використання цих формул викликає певні сумніви, оскільки висока точність апроксимації демонструється лише на окремих прикладах, причому порівняння здебільшого проводиться з оцінками, отриманими методом Монте–Карло. У той же час у більшості випадків можна підібрати приклади, в яких апроксимація призводить до похибки, яка вимірюється сотнями процентів.

Метод Монте–Карло вперше було застосовано в середині минулого століття, і відтоді його популярність лише зростала. Це і не дивно, оскільки статистичне моделювання може застосовуватися для обчислення характеристик практично будь-якої системи, яка піддається математичному опису. Зокрема, така універсальність методу дозволяє моделювати телекомунікаційні мережі, враховуючи такі їх особливості: різнотипні вхідні потоки вимог, для обслуговування яких потрібен суттєво різний ресурс (аудіо- та відеопотоки); обмежена пропускна здатність ліній зв'язку; загальна ресурсна база для багатьох потоків (множинний доступ); тривалість обслуговування має розподіл, який залежить як від типу вимоги, так і від ресурсу, що потребує ця вимога, тощо.

Однак і метод Монте–Карло має суттєвий недолік: якщо ймовірність, яка досліджується, прямує до нуля, то час обчислення, потрібний для досягнення необхідної точності, прямує до нескінченності. Альтернативою є розробка спеціальних методів моделювання (що отримали загальну назву «прискорене моделювання»), націлених на зменшення дисперсії оцінки. Ідеальним є варіант, коли час моделювання не зростає (або зростає дуже повільно), якщо ймовірність небажаної події прямує до нуля. При цьому зберігається властивість незміщеності оцінки, хоча дисперсія може зменшуватись на багато порядків порівняно з дисперсією оцінок, отриманих методом Монте–Карло.

Серед чисельних методів зменшення дисперсії (variance reduction techniques) відзначимо найбільш популярні: метод істотної вибірки [10–14], метод розшарованої вибірки [15], метод багаторівневого розщеплення [16, 17] тощо. Суттєвий внесок у створення сучасної теорії прискореного моделювання внесла і українська школа математичної теорії надійності на чолі з академіком НАН України І.М. Коваленком [18–22].

У центрі уваги даної роботи є модель мережі обслуговування, запропонованої в [22]. Ця модель враховує усі наведені вище особливості телекомунікаційних мереж. Розглядався випадок постійної інтенсивності вхідних потоків. У той же час існує безліч прикладів, коли ці інтенсивності суттєво залежать від поточного моменту часу (телефонні дзвінки, автомобільний рух тощо). У цьому разі мова може йти або про нестаціонарну ймовірність блокування, або про стаціонарну —

за умови періодичності інтенсивностей вхідних потоків. Саме останнє і досліджується у даній роботі. У наступних розділах описано саму модель та запропоновано суттєве узагальнення розробленого методу прискореного моделювання, який ґрунтується на ідеях розширеної вибірки та направленої моделювання. Числові приклади дозволяють оцінити перевагу запропонованого методу порівняно з методом Монте-Карло, а також ілюструють швидкість зростання відносної похибки оцінок, коли ймовірність блокування прямує до нуля.

Мережа обслуговування з множинним доступом та періодичними інтенсивностями вхідних потоків

Структуру мережі обслуговування [22] визначає неорієнтовний граф $G = [V, E]$, де V — скінченна множина вершин, а E — множина неорієнтовних ребер: $e = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle \in E, v_1, v_2 \in V$. Послідовність ребер $\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \dots, \langle v_{n-1}, v_n \rangle$, що мають властивість $\langle v_{i-1}, v_i \rangle \in E, i = 1, \dots, n$, називають маршрутом, що веде з v_0 у v_n . При цьому припускаємо, що маршрут не містить циклів, тобто $v_i \neq v_j$, якщо $i \neq j$. Кожне ребро $e \in E$ має певну пропускну здатність c_e .

Мережа обслуговує декілька потоків вимог. Задано множину $W \subset V \times V$ пар вершин, які назвемо терміналами. Якщо $w = (v_1, v_2) \in W$, то може надійти вимога на встановлення зв'язку між терміналами v_1 та v_2 . Інтенсивність потоку таких вимог є періодичною функцією $\lambda_w(t)$ з періодом T (період є одним і тим же для будь-якого $w \in W$). У подальшому ці вимоги згадуються як w -вимоги.

Кожна w -вимога для свого обслуговування вимагає певний ресурс — це дискретна випадкова величина θ_w , що приймає значення із скінченної множини $R = \{r_1, \dots, r_k\}$, а саме $\theta_w = r_j$ з імовірністю $q_w^{(j)}$ ($j = 1, \dots, k$). Якщо у систему обслуговування надійшла вимога $w = (v_1, v_2) \in W$, то з'єднання терміналів v_1 та v_2 може здійснитись за одним із маршрутів множини S_w (усі маршрути впорядковані у порядку зростання їх довжини; довжина маршруту — це кількість ребер, з яких він складається). Для обслуговування обирається перший доступний маршрут. Маршрут $s \in S_w$ називається доступним для w -вимоги, яка вимагає ресурс $r \in R$, якщо поточна пропускну здатність кожного ребра маршруту s не є нижчою за r . Якщо вимога займає маршрут s , то пропускну здатність кожного ребра цього маршруту зменшується на r . Якщо у момент надходження w -вимоги, що вимагає для свого обслуговування ресурс r , множина доступних маршрутів є порожньою, то вимога отримує відмову та залишає мережу без обслуговування. Такий стан мережі називається станом блокування w -вимог, які вимагають ресурс не нижчий за r . Оскільки різні маршрути можуть містити ті ж самі ребра, то надходження вимог одного типу може істотно впливати на блокування вимог іншого типу (множинний доступ). Якщо w -вимогу, що вимагає ресурс $r_j \in R$, прийнято на обслуговування, то його тривалість визначається випадковою величиною $\eta_w^{(j)}$ з функцією розподілу $G_w^{(j)}(x)$. Вважаємо, що $G_w^{(j)}(T) = 1$, тобто тривалість обслуговування не може перевищувати період T (якщо це не так, то замість T можна взяти $2T, 3T, \dots$). При цьому припускаємо, що існує щільність розподілу $g_w^{(j)}(x)$. У момент закінчення обслуговування пропускну здатність кожного ребра маршруту s зростає на r_j .

Позначимо $Q_w^{(j)}(t)$ ймовірність того, що у момент t мережа знаходиться у стані блокування w -вимог, які вимагають ресурс, не нижчий за r_j . Об'єктом дослідження є стаціонарна ймовірність

$$P_w^{(j)}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_w^{(j)}(nT + \tau), \quad \tau \in [0, T]. \quad (1)$$

Запропонований нижче метод може бути використаний і для обчислення ймовірності $Q_w^{(j)}(t)$ для будь-якого фіксованого t у разі, коли інтенсивності $\{\lambda_w(t)\}$ не є періодичними функціями.

Марковський процес

Моделювання будь-якої системи чи мережі може бути здійсненим лише за умови спочатку побудови, а потім моделювання траєкторій марковського процесу, що описує поточний стан та часову еволюцію об'єкта, що досліджується. Для описаної вище моделі таким неперервним справа марковським процесом буде наступний:

$$\zeta(t) = (\sigma(t); w^{(j)}(t), m^{(j)}(t), \theta^{(j)}(t), \gamma^{(j)}(t), j = 1, \dots, \sigma(t)), t \geq 0,$$

де $\sigma(t)$ — кількість вимог, що знаходяться на обслуговуванні у мережі в момент t , $w^{(j)}(t)$ — тип j -ї вимоги, що вказує термінали, які з'єднує маршрут $s^{(j)}(t) \in S_{w^{(j)}(t)}$, номер якого визначає $m^{(j)}(t)$ (оскільки $S_{w^{(j)}(t)}$ — це множина впорядкованих маршрутів, то для визначення маршруту достатньо вказати лише його номер), $\theta^{(j)}(t)$ — ресурс, необхідний для обслуговування j -ї вимоги, $\gamma^{(j)}(t)$ — час, що залишився до закінчення її обслуговування. Початковим станом цього процесу вважається відсутність вимог на обслуговування, тобто $\zeta(0) = 0$.

Наявна в момент t пропускна здатність $\alpha_e(t)$ ребра $e = \langle i_1, i_2 \rangle \in E$ визначається за формулою

$$\alpha_e(t) = c_e - \sum_{j=1}^{\sigma(t)} \theta^{(j)}(t) \sum_{l=1}^{n^{(j)}} I(v_{l-1}^{(j)} = i_1, v_l^{(j)} = i_2),$$

де $I(\cdot)$ — індикатор відповідної події, а $m^{(j)}(t)$ визначає маршрут виду

$$s^{(j)}(t) = (\langle v_0^{(j)}, v_1^{(j)} \rangle, \langle v_1^{(j)}, v_2^{(j)} \rangle, \dots, \langle v_{n^{(j)}-1}^{(j)}, v_{n^{(j)}}^{(j)} \rangle),$$

в якому $w^{(j)}(t) = (v_0^{(j)}, v_{n^{(j)}}^{(j)})$, $n^{(j)}$ — кількість ребер у маршруті.

Тоді ресурс $\Theta_w(t)$, наявний у мережі в момент t для w -вимог, становить

$$\Theta_w(t) = \max_{s \in S_w} \min_{e \in s} \alpha_e(t),$$

а ймовірність блокування в момент t w -вимог, які вимагають ресурс, не нижчий за r_j , визначається як $Q_w^{(j)}(t) = \mathbf{P}\{\Theta_w(t) < r_j\}$. Об'єктом дослідження є стаціонарна ймовірність $P_w^{(j)}(\tau)$, яка визначається згідно з (1).

Алгоритм моделювання мережі обслуговування методом Монте–Карло

Алгоритм моделювання траєкторій марковського процесу $\zeta(t), t \geq 0$, методом Монте–Карло служить не тільки кращому розумінню особливостей функціонування мережі обслуговування, але й є важливим елементом методу прискореного моделювання, запропонованого у наступному розділі.

Припустимо, що n є фіксованим і потрібно безпосереднім моделюванням оцінити ймовірність $Q_w^{(j)}(nT + \tau)$. Увесь період моделювання розбивається на $n+1$ частин, з яких n мають тривалість T , а одна — тривалість τ . Моделювання проводиться послідовно на кожній з цих частин. Skorистаємось відомим прийомом моделювання нестационарного пуассонівського потоку. Позначимо $\Lambda = \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{w \in W} \lambda_w(t)$. Якщо L — це кількість вимог стаціонарного пуассонівського потоку з параметром Λ , що надійшли у проміжку $[0, T]$, то ця випадкова величина має розподіл

$$\pi_l = \frac{(\Lambda T)^l}{l!} e^{-\Lambda T}, \quad l \geq 0, \quad (2)$$

а моменти надходження цих вимог мають рівномірний розподіл у $[0, T]$. Нехай $L = l$ і $\omega_1, \dots, \omega_l$ — моменти надходження вимог. Ці моменти діляться на реальні та фіктивні. Момент ω_i є фіктивним (тобто реальна вимога не надходить) з ймовірністю $1 - \frac{1}{\Lambda} \sum_{z \in W} \lambda_z(\omega_i)$, з додатковою ймовірністю ця вимога є реальною, причому це буде w -вимога з ймовірністю $\frac{\lambda_w(\omega_i)}{\sum_{z \in W} \lambda_z(\omega_i)}$.

Результатом такого моделювання є послідовність $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ моментів надходження вимог потоків $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(N)}$. При цьому згідно з розподілом $q_{w^{(j)}}^{(j)}, j = 1, \dots, k$, визначається ресурс $r^{(i)}$, який потребує $w^{(i)}$ -вимога, а також тривалість обслуговування $\eta^{(i)}$, яка має відповідний розподіл.

Моделювання процесу $\zeta(u)$ у проміжку $[0, T]$ здійснюється наступним чином. В інтервалах (t_i, t_{i+1}) мережу залишають вимоги, у яких $\gamma(t_i) < t_{i+1} - t_i$; якщо $\gamma(t_i) > t_{i+1} - t_i$, то вимога залишається і в цьому разі $\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_i) - (t_{i+1} - t_i)$ (тут $t_0 = 0, t_{N+1} = T$). У моменти $\{t_i\}$ стан процесу $\zeta(u)$ змінюється стрибкоподібно з урахуванням відомих $\{w^{(i)}\}, \{r^{(i)}\}$ та $\{\eta^{(i)}\}$. Однак стан процесу може і не змінитись, якщо в момент t_{i+1} не існує жодного маршруту, доступного для $w^{(i)}$ -вимоги.

Моделюючи стан процесу у вузлові моменти $\{t_i\}$ протягом $n+1$ проміжків, знаходять стан процесу в момент $nT + \tau$. Якщо не існує доступних маршрутів для w -вимоги, що вимагає ресурс, не нижчий за r_j , то оцінкою в цій реалізації алгоритму буде одиниця, в іншому разі — нуль.

Чим більшою є ймовірність блокування, тим більш ефективним є наведений алгоритм. Із зменшенням цієї ймовірності швидко зростає час, витрачений на отримання оцінки із заданими достовірністю та відносною похибкою. Саме тому

виникає потреба у більш досконалих алгоритмах, які дозволяють на декілька порядків зменшувати дисперсію оцінки, що приводить до пропорційного зменшення часу моделювання.

Вище було накладено умову, що час обслуговування будь-якої вимоги не може перевищувати T . Це означає, що в моменти $\{nT\}$ у мережі можуть бути лише вимоги, що надійшли в останньому проміжку. Таким чином, відсутність «довгих хвостів» при обслуговуванні вимог пришвидшує входження мережі у стаціонарний режим. Як показали обчислення, вже декількох періодів достатньо для входження мережі у стаціонарний режим. Тому у подальших розділах статті основну увагу зосередимо на обчисленні ймовірності $Q_w^{(j)}(nT + \tau)$ при фіксованому n .

Алгоритм прискореного моделювання ймовірності $Q_w^{(j)}(nT + \tau)$

Перед тим як формулювати загальний алгоритм, наведемо деякі формули, які лежать у його основі. У центрі уваги буде проміжок $\Delta_n(\tau) = [(n-1)T + \tau, nT + \tau]$ довжиною T . Із зауважень попереднього розділу зрозуміло, що у момент $nT + \tau$ у мережі на обслуговуванні можуть знаходитись лише вимоги, що надійшли у проміжку $\Delta_n(\tau)$. Скористаємось алгоритмом моделювання потоку вимог, наведеним у попередньому розділі. Знайдемо ймовірність $p_n(\tau)$ того, що момент надходження вимоги не буде фіктивним і обслуговування цієї вимоги не закінчиться до моменту $nT + \tau$, якщо відомо, що момент її надходження має рівномірний розподіл у $\Delta_n(\tau)$. Маємо:

$$p(\tau) = \int_{(n-1)T+\tau}^{nT+\tau} \frac{1}{\Lambda} \sum_{z \in W} \lambda_z(t) \sum_{w \in W} \frac{\lambda_w(t)}{\sum_{z \in W} \lambda_z(t)} \sum_{j=1}^k q_w^{(j)} [1 - G_w^{(j)}(nT + \tau - t)] \frac{dt}{T} =$$

$$= \frac{1}{\Lambda} \int_0^1 \sum_{w \in W} \lambda_w(\tau + T(1-u)) \sum_{j=1}^k q_w^{(j)} [1 - G_w^{(j)}(uT)] du. \quad (3)$$

У цій формулі враховано періодичність функцій $\{\lambda_w(t)\}$. Позначимо через $A_n(\tau; w, j)$ подію, яка полягає у тому, що в момент $nT + \tau$ мережа знаходиться у стані блокування w -вимог з потрібним ресурсом не меншим, ніж r_j . Тоді

$$Q_w^{(j)}(nT + \tau) = \mathbf{P}\{A_n(\tau; w, j)\} = \sum_{m=1}^{\infty} a_n^{(m)}(\tau; w, j), \quad (4)$$

де

$$a_n^{(m)}(\tau; w, j) = \mathbf{P}\{v(\tau) = m, A_n(\tau; w, j)\}, \quad (5)$$

$v(\tau)$ — кількість реальних вимог (не фіктивних), які надійдуть у проміжку $\Delta_n(\tau)$ і будуть знаходитись на обслуговуванні у момент $nT + \tau$. Нехай L — випадкова величина, що має пуассонівський розподіл з параметром ΛT (див. (2)). Якщо $L = l$, то $v(\tau)$ має біноміальний розподіл з параметрами l та $p(\tau)$. Тому

$$Q_w^{(j)}(nT + \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}\{L(\tau) \geq m, v(\tau) = m, A_n(\tau; w, j)\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \mathbf{P}\{L = l\} \mathbf{P}\{v(\tau) = m | L = l\} \mathbf{P}\{A_n(\tau; w, j) | L = l, v(\tau) = m\}. \quad (6)$$

Позначимо

$$b^{(m)}(\tau; l) = \mathbf{P}\{L = l\} \mathbf{P}\{v(\tau) = m | L = l\} = \frac{(\Lambda T)^l}{l!} e^{-\Lambda T} C_l^m [p(\tau)]^m [1 - p(\tau)]^{l-m}. \quad (7)$$

Нехай M — будь-яке натуральне число. Тоді з формул (4)–(7) випливає, що

$$Q_w^{(j)}(nT + \tau) = \sum_{m=1}^M a_n^{(m)}(\tau; w, j) + a_n^*(\tau; w, j), \quad (8)$$

де

$$a_n^{(m)}(\tau; w, j) = \sum_{l=m}^{\infty} b^{(m)}(\tau; l) \mathbf{P}\{A_n(\tau; w, j) | L = l, v(\tau) = m\}, \quad (9)$$

$$a_n^*(\tau; w, j) = \sum_{m=M+1}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} b^{(m)}(\tau; l) \mathbf{P}\{A_n(\tau; w, j) | L = l, v(\tau) = m\}. \quad (10)$$

Формула (8) лежить в основі використання методу розширеної вибірки за параметром m (див. наступний розділ). Однак наведемо спочатку деякі формули, які використовуються в алгоритмах побудови незміщених оцінок для $\{a_n^{(m)}(\tau; w, j)\}$ та $a_n^*(\tau; w, j)$. Припустимо, що в деякий момент $t \in \Delta_n(\tau)$ у мережу надійшла вимога з тривалістю обслуговування y . Тоді сумісний розподіл потоку, якому належить ця вимога, та ресурсу, необхідного для її обслуговування, має вигляд

$$h_w^{(j)}(t, y) = \frac{\lambda_w(t) q_w^{(j)} g_w^{(j)}(y)}{\sum_{z \in W} \lambda_z(t) \sum_{i=1}^k q_z^{(i)} g_z^{(i)}(y)}, \quad w \in W, j = 1, \dots, k. \quad (11)$$

Розподіл потоку, якому належить вимога, має вигляд

$$H_w(t, y) = \sum_{j=1}^k h_w^{(j)}(t, y), \quad w \in W. \quad (12)$$

Ймовірність того, що w -вимога, яка надходить у момент $t \in \Delta_n(\tau)$ та має тривалість обслуговування y , вимагатиме для свого обслуговування ресурс r_j , дорівнює

$$p^{(j)}(t, y, w) = \frac{q_w^{(j)} g_w^{(j)}(y)}{\sum_{i=1}^k q_w^{(i)} g_w^{(i)}(y)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (13)$$

Алгоритми побудови незміщених оцінок ймовірностей $\{a_n^{(m)}(\tau; w, j)\}$ та $a_n^*(\tau; w, j)$ є подібними, лише незначно відрізняючись деталями. Нехай m — фіксоване натуральне число. Алгоритм побудови оцінки $\hat{a}_{n1}^{(m)}(\tau; w, j)$ в одній реалізації для $a_n^{(m)}(\tau; w, j)$ формулюється наступним чином (зміни до цього алгоритму для побудови відповідної оцінки $\hat{a}_{n1}^*(\tau; w, j)$ вказано у зауваженні до алгоритму).

1. Методом Монте-Карло згідно з наведеним вище алгоритмом моделюємо стан мережі обслуговування в момент $(n-1)T + \tau$. Цей початковий стан позначимо ζ_0 .

2. Обчислюємо (див. (9))

$$B^{(m)}(\tau) = \sum_{l=m}^{\infty} b^{(m)}(\tau; l), \quad (14)$$

де $b^{(m)}(\tau; l)$ визначаються згідно з (7).

3. Моделюємо кількість L вимог (сумарно реальних і фіктивних), які надійшли у проміжку $\Delta_n(\tau)$, за умови, що у m з них обслуговування не закінчиться до кінця проміжку. Для цього моделюємо випадкову величину, яка приймає значення $l \in \{m, m+1, \dots\}$ з імовірністю $b^{(m)}(\tau; l) / B^{(m)}(\tau)$. Нехай $L = l$.

4. Моделюємо моменти надходження вимог у проміжку $\Delta_n(\tau)$. Має бути m реальних вимог, у яких обслуговування не закінчиться до кінця проміжку (перша група), та $l - m$ вимог, які задовольняють одну з двох умов (друга група): а) вимога є фіктивною; б) вимога є реальною, але її обслуговування закінчиться до кінця проміжку. При цьому не враховується можливість блокування у момент надходження. Моделювання відбувається наступним чином. Знаходимо момент t надходження вимоги — це рівномірно розподілена у $\Delta_n(\tau)$ випадкова величина. З

імовірністю $1 - \frac{1}{\Lambda} \sum_{w \in W} \lambda_w(t)$ цей момент є фіктивним; з імовірністю $\frac{1}{\Lambda} \sum_{w \in W} \lambda_w(t)$ це реальний момент, у цьому разі моделюємо тривалість обслуговування — випадкова величина η_t з розподілом

$$G_t(x) = \sum_{w \in W} \frac{\lambda_w(t)}{\sum_{z \in W} \lambda_z(t)} \sum_{i=1}^k q_w^{(i)} G_z^{(i)}(x), \quad x \geq 0.$$

Якщо $t + \eta_t > nT + \tau$, то вимога належить до першої групи, в іншому разі — до другої групи. Моделювання закінчується, коли в першій групі назбирається рівно m вимог, а у другій — рівно $l - m$ вимог.

5. Усі моменти надходження реальних вимог упорядковуємо відповідно до зростання: $(n-1)T + \tau < t_1 < t_2 < \dots < t_N < nT + \tau$, де $N \leq l$. При цьому кожному моменту t_i відповідає індикатор I_i , який дорівнює одиниці, якщо в момент t_i надходить вимога з першої групи, та нуль — у іншому разі. Відповідні тривалості обслуговування позначимо $y_1, \dots, y_N$.

6. Для кожного i , такого, що $I_i = 0$ згідно з розподілом $h_w^{(j)}(t_i, y_i)$ (див. (11)), моделюємо тип вимоги w_i , що надходить, та ресурс r_{j_i} , що вимагається.

7. Введемо ще один параметр $\sigma \in \{1, \dots, m\}$, який істотно впливає на швидкість розрахунків та дисперсію оцінки (із зростанням σ швидкість алгоритму істотно зменшується, але при цьому дещо зменшується і дисперсія оцінки). Позначимо $i_0 = \max \left\{ i : \sum_{s=i}^N I_s = \sigma \right\}$, тобто серед вимог з номерами $i_0, \dots, N$ рівно σ з

першої групи. Якщо $I_i = 1$ та $i < i_0$, то згідно з розподілом $h_w^{(j)}(t_i, y_i)$ (див. (11)) моделюємо тип вимоги w_i , що надходить, та ресурс r_{j_i} , що вимагається. Якщо $I_i = 1$ та $i \geq i_0$, то згідно з розподілом $H_w(t_i, y_i)$ (див. (12)) моделюємо лише тип вимоги w_i , що надходить.

8. Припустимо, що $I_{\delta_i} = 1, i_0 = \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_\sigma \leq N$. Стан мережі в момент $nT + \tau$ буде повністю визначений, якщо вказати ресурс, який вимагають вимоги, що надходять в моменти $\{t_{\delta_i}\}$. Таких варіантів усього k^σ . Множину цих варіантів позначимо $K = \{\bar{r} = (r_{\beta_1}, \dots, r_{\beta_\sigma})\}$. Кожному варіанту $\bar{r}$ відповідає ймовірність (див. (13))

$$p(\bar{r}) = \prod_{i=1}^{\sigma} p^{(\beta_i)}(t_{\delta_i}, y_{\delta_i}, w_{\delta_i}).$$

При фіксованому векторі $\bar{r}$ моделюємо стан мережі в момент $nT + \tau$ при відомому початковому стані ζ_0 , відомих моментах надходження вимог, відомих типах та відомих ресурсах, що вимагаються. Якщо при цьому в момент $nT + \tau$ мережа потрапляє у стан блокування w -вимог, які вимагають ресурс, не нижчий за r_j , то покладемо $J(\bar{r}) = 1$, та якщо такого блокування не відбувається — $J(\bar{r}) = 0$. Як оцінку $\hat{a}_{n1}^{(m)}(\tau; w, j)$ обираємо

$$\hat{a}_{n1}^{(m)}(\tau; w, j) = B^{(m)}(\tau) \sum_{\bar{r} \in K} J(\bar{r}) p(\bar{r}). \quad (15)$$

Зауваження. Алгоритм побудови оцінки $\hat{a}_{n1}^*(\tau; w, j)$ в одній реалізації для $a_n^*(\tau; w, j)$ формулюється аналогічно наведеному вище. Єдина зміна: крок 2 замінюємо наступними діями:

— обчислюємо (див. (10))

$$D(\tau) = \sum_{m=M+1}^{\infty} B^{(m)}(\tau),$$

де $\{B^{(m)}(\tau)\}$ визначаються згідно з (14);

— моделюємо випадкову величину κ (кількість вимог, обслуговування яких не закінчиться до моменту $nT + \tau$): $\kappa = m \in \{M+1, M+2, \dots\}$ з імовірністю $B^{(m)}(\tau) / D(\tau)$.

Окрім того, у формулі (15) замість $B^{(m)}(\tau)$ використовуємо $D(\tau)$.

Застосування методу розширеної вибірки для оцінки ймовірності $Q_w^{(j)}(nT + \tau)$

Формула (8) ідеально підходить для використання методу розширеної вибірки, особливо якщо врахувати, що окремі доданки мають істотно різну «вагу», тобто і оцінюватись мають з різною точністю, отже і за різною кількістю реалізацій. Загальна схема методу розширеної вибірки виглядає наступним чином. Нехай N — сумарна кількість реалізацій, яка має використовуватися для побудови оцінки. Для оцінки $a_n^{(m)}(\tau; w, j)$ та $a_n^*(\tau; w, j)$ будемо використовувати відповідно N_m та N^* реалізацій, тобто $N = N_1 + \dots + N_M + N^*$. У цьому разі

$$\hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} \hat{a}_{ni}^{(m)}(\tau; w, j) + \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \hat{a}_{ni}^*(\tau; w, j), \quad (16)$$

де $\hat{a}_{ni}^{(m)}(\tau; w, j)$ та $\hat{a}_{ni}^*(\tau; w, j)$ — оцінки в i -й реалізації алгоритмів. Виникає задача оптимального вибору $\{N_m\}$ та N^* . Дисперсії оцінок позначимо $V_n^{(m)}(\tau; w, j) = \mathbf{D}\hat{a}_{ni}^{(m)}(\tau; w, j)$ та $V_n^*(\tau; w, j) = \mathbf{D}\hat{a}_{ni}^*(\tau; w, j)$. Тоді

$$\mathbf{D}\hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau) = \sum_{m=1}^M \frac{V_n^{(m)}(\tau; w, j)}{N_m} + \frac{V_n^*(\tau; w, j)}{N^*}. \quad (17)$$

Відомо, що мінімальна дисперсія досягається, якщо кількості реалізацій обирати пропорційно кореню відповідної дисперсії, тобто

$$N_m = N \cdot \frac{\sqrt{V_n^{(m)}(\tau; w, j)}}{V_n(\tau; w, j)}, \quad N^* = N \cdot \frac{\sqrt{V_n^*(\tau; w, j)}}{V_n(\tau; w, j)}, \quad (18)$$

де

$$V_n(\tau; w, j) = \sum_{m=1}^M \sqrt{V_n^{(m)}(\tau; w, j)} + \sqrt{V_n^*(\tau; w, j)}.$$

Підставивши (18) в (17), маємо:

$$\mathbf{D}\hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau) = \frac{1}{N} [V_n(\tau; w, j)]^2.$$

Згідно з центральною граничною теоремою оцінка $\hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$ має асимптотично нормальний розподіл. Тому відносна похибка оцінки, яку побудовано за N реалізаціями алгоритму з достовірністю $1 - \gamma$, обчислюється за формулою

$$R_n(\tau; w, j) = \frac{\alpha(\gamma) V_n(\tau; w, j)}{\sqrt{N} Q_w^{(j)}(nT + \tau)} 100 \%,$$

де коефіцієнт $\alpha(\gamma)$ визначається з рівняння $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\alpha(\gamma)} e^{-u^2/2} du = 1 - \gamma$.

Оскільки точні значення $Q_w^{(j)}(nT + \tau)$ та $V_n(\tau; w, j)$ невідомі, то у наведених вище формулах використовуємо їх статистичні аналоги. Це означає, що на попередньому етапі за відносно невеликої кількості реалізацій будуємо оцінки для $\{V_n^{(m)}(\tau; w, j)\}$ та $V_n^*(\tau; w, j)$, за формулами (17) знаходимо оцінки $\{\hat{N}_m\}$ та $\hat{N}^*$, які використовуємо в (16) для побудови оцінки $\hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$.

В усі наведені формули входить параметр M . Оцінки лишаються незміщеними при будь-якому виборі $M \geq 0$. Із зростанням M дещо зменшується дисперсія оцінки, тобто і відносна похибка, але при цьому збільшується час, витрачений на попередньому етапі. Практика розрахунків показала, що найбільш раціонально обирати M таким, щоб дисперсії $V_n^{(M)}(\tau; w, j)$ та $V_n^*(\tau; w, j)$ мали один і той же порядок.

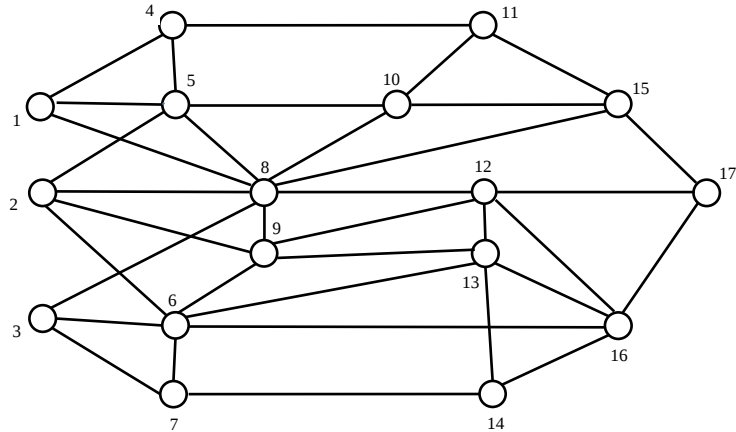
Числовий приклад

Розглянемо мережу обслуговування, яку зображено на рисунку. Вона містить 17 вершин та 35 ребер. Характеристики цієї мережі визначимо згідно з наведеною вище моделлю.

Нехай $W = \{(1, 17), (2, 17), (3, 17)\}$, тобто маємо три пари терміналів і, відповідно, три вхідних потоки вимог. Інтенсивності потоків є періодичними функціями, які мають один і той же період $T = 24$:

$$\lambda_{i,17}(t) = 0,5 \left[\sin \left(\frac{2\pi t}{T} + (i-1) \frac{\pi}{3} \right) + i \right], 0 \leq t \leq T, i = 1, 2, 3.$$

Шляхом елементарних обчислень легко показати, що $\Lambda = \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{w \in W} \lambda_w(t) = 4$.



Для кожної пари терміналів задаємо множину маршрутів:

$$\begin{aligned} S_{1,17} &= \\ &= \{(1, 8, 12, 17), (1, 8, 15, 17), (1, 4, 11, 15, 17), (1, 5, 8, 12, 17), (1, 5, 8, 15, 17), (1, 5, 10, 15, 17), \dots\}, \\ S_{2,17} &= \\ &= \{(2, 6, 16, 17), (2, 8, 12, 17), (2, 8, 15, 17), (2, 9, 12, 17), (2, 5, 8, 12, 17), (2, 5, 8, 15, 17), \dots\}, \\ S_{3,17} &= \\ &= \{(3, 6, 16, 17), (3, 8, 12, 17), (3, 8, 15, 17), (3, 6, 9, 12, 17), (3, 6, 13, 16, 17), (3, 6, 16, 12, 17), \dots\}. \end{aligned}$$

Пропускну здатність ребер визначимо наступним чином:

$$\begin{aligned} c_{1,4} &= 10, \quad c_{1,5} = 10, \quad c_{1,8} = 10, \quad c_{2,5} = 8, \quad c_{2,6} = 8, \quad c_{2,8} = 8, \quad c_{2,9} = 8, \quad c_{3,6} = 10, \quad c_{3,7} = 10, \\ c_{3,8} &= 10, \quad c_{4,5} = 12, \quad c_{4,11} = 12, \quad c_{5,8} = 12, \quad c_{5,10} = 12, \quad c_{6,7} = 5, \quad c_{6,9} = 5, \quad c_{6,13} = 5, \quad c_{6,16} = 5, \\ c_{7,14} &= 12, \quad c_{8,9} = 6, \quad c_{8,10} = 6, \quad c_{8,12} = 6, \quad c_{8,15} = 6, \quad c_{9,12} = 9, \quad c_{9,13} = 9, \quad c_{10,11} = 10, \quad c_{10,15} = 10, \\ c_{11,15} &= 9, \quad c_{12,16} = 10, \quad c_{12,17} = 10, \quad c_{13,14} = 10, \quad c_{13,16} = 10, \quad c_{14,16} = 9, \quad c_{15,17} = 10, \quad c_{16,17} = 10. \end{aligned}$$

Кожна вимога для свого обслуговування вимагає певний ресурс — це дискретна випадкова величина, що приймає значення з множини $\{2, 3, 5, 7\}$ з однією і тією ж імовірністю 0,25. Тривалість обслуговування вимоги типу $(i, 17)$ не залежить від ресурсу, який вона вимагає, і має розподіл Вейбулла:

$$G_{i,17}(x) = 1 - e^{-(0,5ix)^2}, \quad x \geq 0.$$

У даному прикладі увагу зосередимо на дослідженні ймовірності блокування вимог потоку $w=(2,17)$, які вимагають ресурс $r_j=3$, тобто $j=2$. Покладемо $n=6$ (це означає, що щонайменше п'ять періодів використовується на початковому етапі для входження мережі у стаціонарний режим). Окрім того, прискорене моделювання здійснюємо при $\sigma=3$ (див. алгоритм).

Порівняння ефективності двох статистичних методів можна здійснити таким чином. Припустимо, що деяку оцінку побудовано з відносною похибкою δ і витрачено U одиниць часу (при цьому неважливо, чи оцінка будувалась із заданою відносною похибкою, чи за фіксованою кількістю реалізацій). Тоді на побудову оцінки з відносною похибкою 1 % має бути витрачений час $U\delta^2$. Якщо відповідні величини, що відносяться до методів Монте–Карло та прискореного моделювання, позначити відповідно нижніми індексами MC та FS, то оцінка виграшу у часі моделювання виглядає наступним чином:

$$\rho = \frac{U_{MC}\delta_{MC}^2}{U_{FS}\delta_{FS}^2}. \quad (19)$$

У табл. 1 проведено порівняння оцінок, отриманих методом Монте–Карло (MC) та запропонованим вище методом прискореного моделювання (FS), а також оцінюється виграш у часі моделювання за формулою (19). Всі оцінки побудовано з достовірністю 0,99, але з різними відносними похибками. Якщо всі оцінки методом Монте–Карло будувались з відносною похибкою 5 %, то прискорене моделювання дає різну відносну похибку, оскільки для побудови кожної оцінки використано $N=100000$ реалізацій (зауважимо, що на попередньому етапі оцінки дисперсій будувались за 4000 реалізаціями).

Таблиця 1

τ	0	6	12	18	24
MC: $\hat{Q}_w^{(j)}(nT+\tau)$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$2,12 \cdot 10^{-2}$	$3,84 \cdot 10^{-3}$	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$
$\hat{R}_n(\tau; w, j)$	5 %	5 %	5 %	5 %	5 %
FS: $\hat{Q}_w^{(j)}(nT+\tau)$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$2,09 \cdot 10^{-2}$	$3,71 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-2}$
$\hat{R}_n(\tau; w, j)$	0,89 %	0,95 %	1,25 %	1,50 %	0,95 %
$\hat{\rho}$	14,5	8,3	26,6	89,9	15,5

Оцінки є достатньо близькими, що свідчить про коректність обчислень обома методами. Навіть для достатньо великої ймовірності блокування, яка дорівнює 0,02, при $\tau=6$ виграш у часі моделювання складає вісім разів. При зменшенні цієї ймовірності перевага прискореного моделювання стає значно суттєвішою і складає вже 90 разів при $\tau=18$. З подальшим зменшенням ймовірності блокування виграш у часі моделювання продовжує стрімко зростати і може вимірюватись багатьма порядками.

У табл. 2 досліджується зростання відносної похибки, коли ймовірність блокування прямує до нуля. Щоб зменшити ймовірність блокування, пропорційно збільшуватимемо пропускну здатність ребер, а саме, припустимо, що ребра мають пропускну здатність $\{Kc_{ij}\}$, де $\{c_{ij}\}$ визначено вище, а коефіцієнт K приймає значення 1, 2, 3 та 4. Слід зазначити, що $\{a_n^{(m)}(\tau; w, j)\}$ приймають ненульові значення, починаючи з деякого $m_{\min}$, яке визначається моделюванням для кожного K (див. табл. 2). Тому формулу (8) можна переписати у вигляді

$$Q_w^{(j)}(nT+\tau) = \sum_{m=m_{\min}}^M a_n^{(m)}(\tau; w, j) + a_n^*(\tau; w, j).$$

Оберемо $M = m_{\min} + 8$, тобто для кожного K будуються оцінки десяти доданків.

Таблиця 2

τ	0	6	12	18	24
$K = 1: \hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$2,09 \cdot 10^{-2}$	$3,71 \cdot 10^{-3}$	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-2}$
$\hat{R}_n(\tau; w, j)$	0,89 %	0,95 %	1,25 %	1,50 %	0,95 %
$m_{\min}$	3	3	3	3	3
$K = 2: \hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$	$1,16 \cdot 10^{-5}$	$5,17 \cdot 10^{-5}$	$1,07 \cdot 10^{-6}$	$7,24 \cdot 10^{-8}$	$1,13 \cdot 10^{-5}$
$\hat{R}_n(\tau; w, j)$	2,34 %	2,03 %	2,83 %	3,41 %	2,24 %
$m_{\min}$	9	9	9	9	9
$K = 3: \hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$	$1,54 \cdot 10^{-9}$	$1,88 \cdot 10^{-8}$	$4,50 \cdot 10^{-11}$	$8,14 \cdot 10^{-13}$	$1,52 \cdot 10^{-9}$
$\hat{R}_n(\tau; w, j)$	6,12 %	6,10 %	11,73 %	11,08 %	6,27 %
$m_{\min}$	14	14	14	14	14
$K = 4: \hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$	$2,36 \cdot 10^{-14}$	$7,02 \cdot 10^{-13}$	$1,66 \cdot 10^{-16}$	$4,76 \cdot 10^{-19}$	$2,39 \cdot 10^{-14}$
$\hat{R}_n(\tau; w, j)$	12,97 %	11,69 %	17,67 %	18,89 %	12,18 %
$m_{\min}$	20	20	20	20	20

При зростанні пропускної здатності ребер ймовірність блокування змінюється у широкому діапазоні: від 0,02 до $4,76 \cdot 10^{-19}$. При цьому збільшується і відносна похибка від 0,95 % до 18,89 %. Таке збільшення не можна вважати значним, оскільки для оцінки ймовірності порядку 10^{-19} витрачено всього 10^5 реалізацій. Слід також відзначити, що зі збільшенням K відбуваються більш суттєві коливання $\hat{Q}_w^{(j)}(nT + \tau)$. Якщо при $K = 1$ відношення максимального значення до мінімального становить десять разів, то при $K = 4$ ці значення відрізняються вже на 5 порядків.

Висновок

У статті запропоновано метод прискореного моделювання стаціонарної ймовірності блокування вимог певного потоку, які потребують заданий ресурс для обслуговування. Розглядається мережа обслуговування із множинним доступом, коли структура мережі використовується багатьма потоками. Особливістю моделі є нестаціонарність вхідних пуасонівських потоків, які мають періодичну інтенсивність. Запропонований метод поєднує ідею розширеної вибірки з направленим моделюванням, яке суттєво збільшує ймовірність потрапляння у стан блокування. Цей же метод може застосовуватися для знаходження нестаціонарної ймовірності блокування у випадку нестаціонарних пуасонівських потоків без припущення про періодичність інтенсивності. Прискорене моделювання дозволяє з'ясувати найбільш «вузькі» місця мережі, усунення яких сприятиме зменшенню ймовірності блокування.

M. Kuznetsov, I. Kuznetsov, A. Shumska

FAST SIMULATION OF THE CUSTOMERS BLOCKING PROBABILITY IN QUEUEING NETWORK WITH MULTICAST ACCESS AND PERIODIC RATES OF INPUT FLOWS

Mykola Kuznetsov

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Educational and Research Institute of Physics and Technology of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,

kuznetsov2016@icloud.com

Igor Kuznetsov

Educational and Research Institute of Physics and Technology of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,

sea_hawk@icloud.com

Alla Shumska

Educational and Research Institute of Physics and Technology of National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»,

shumska-aa@ukr.net

A model of a service network with a structure represented by an undirected graph is investigated. Each edge of the graph has a certain capacity. Several pairs of nodes (terminals) are given, between which a connection must be established to service different types of Poisson call flows. The rates of input flows are periodic functions with the same period. A call requires a certain resource to be serviced. For each pair of terminals, there is a list of possible connection routes. The choice of the route for servicing a call depends on the resource that the call requires for servicing and the current capacity of each edge of the route. The first route in the list that satisfies this condition (accessibility condition) is selected. The service time (connection) has an arbitrary distribution which is determined by the call type and the corresponding resource. If none of the routes satisfies the accessibility condition, then the queueing network is in the state of blocking for calls of this flow with a given resource. A fast simulation method to evaluate the steady-state probabilities of the network being in the state of blocking for calls of a certain flow that require a given resource for their service is proposed. Numerical examples illustrate a significant gain in simulation time compared to the Monte Carlo method, and also show how the relative error of estimates increases when the blocking probability tends to zero.

Keywords: queueing network, multicast access, periodic flow rate, route, blocking probability, Monte Carlo method, fast simulation method, stratified sampling, relative error.

ПОСИЛАННЯ

1. Ross K.W. Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. London : Springer Verlag, 1995. 343 p.
2. Frenkel I.B., Karagrigoriou A., Lisnianski A., Kleyner A.V. Applied reliability engineering and risk analysis: probabilistic models and statistical inference. New York : Wiley, 2013. 448 p.
3. Nyberg E., Virtamo J., Aalto S. An exact algorithm for calculating blocking probabilities in multicast networks. Pujolle G., Perros H., Fdida S., Körner U., Stavrakakis I. (Eds.). Networking. Paris, 2000. P. 275–286.
4. Abdalla N., Boucherie R.J. Blocking probabilities in mobile communications networks with time-varying rates and redialing subscribers. *Annals of Operations Research*. 2002. Vol. 112, N 1. P. 15–34.
5. Karvo J. Efficient simulation of blocking probabilities for multi-layer multicast streams. Gregori E., Conti M., Campbell A., Omidyar C., Zukerman M. (Eds.). Networking. Berlin : Springer-Verlag, 2002. P. 1020–1031.
6. Keramidi I.P., Moscholios I.D., Sarigiannidis P.G. Call blocking probabilities under a probabilistic bandwidth reservation policy in mobile hotspots. *Telecom*. 2021. Vol. 2. P. 554–573.
7. Shioda S., Ohtsuka K., Machihara F. A finite population model and product-form approximation for cellular mobile systems with traveling users. *Journal of the Operations Research Society of Japan*. 2007. Vol. 50, N 4. P. 404–427.

8. Glabowski M., Kmiecik D., Stasiak M. On increasing the accuracy of modeling multi-service overflow systems with Erlang-Engset-Pascal streams. *Electronics*. 2021. Vol. 10. P. 508–532.
9. Sagkriotis S.G., Pantelis S.K., Moscholios I.D., Vassilakis V.G. Call blocking probabilities in a two-link multirate loss system for Poisson traffic. *IET Networks*. 2018. Vol. 7, N 4. P. 233–241.
10. Heidelberger P. Fast simulation of rare events in queueing and reliability models. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 1995. Vol. 5, N 1. P. 43–85.
11. Kouikoglou V.S., Yannis A.Ph. Review of a fast simulation method for the analysis of queueing networks. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. 1998. Vol. 13, N 2. P. 73–83.
12. Falkner M., Devetsikiotis M., Lambadaris I. Fast simulation of networks of queues with effective and decoupling bandwidths. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 1999. Vol. 9, N 1. P. 45–58.
13. Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering. New York : Springer, 2004. 575 p.
14. Li J., Mosleh A., Kang R. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications. *Reliab. Engin. and System Safety*. 2011. Vol. 96, N 12. P. 1667–1679.
15. Fox B.L., Glynn P. W. Discrete-time conversion for simulating finite-horizon Markov processes. *SIAM J. Appl. Math.* 1990. Vol. 50, N 5. P. 1457–1473.
16. Glasserman P., Heidelberger Ph., Shahabuddin P., Zajic T. Multilevel splitting for estimating rare event probabilities. *Oper. Research*. 1999. Vol. 47, N 4. P. 585–600.
17. Juneja S., Shahabuddin P., Zajic T. Splitting-based importance-sampling algorithm for fast simulation of Markov reliability models with general repair-policies. *IEEE Transactions on Reliab.* 2001. Vol. 50, N 3. P. 235–245.
18. Kovalenko I.N., Kuznetsov N.Yu., Pegg Ph.A. Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. Chichester : Wiley, 1997. 303 p.
19. Шумская А.А. Ускоренное моделирование коэффициента неготовности восстанавливаемой системы с ограниченной относительной погрешностью оценки. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 45–58.
20. Kuznetsov N.Yu. Fast simulation technique in reliability evaluation of Markovian and non-Markovian systems / *Simulation and Optimization Methods in Risk and Reliability Theory*. New York : Nova Science Publishers, 2009. P. 69–112.
21. Кузнецов Н.Ю., Шумская А.А. Оценка опасности отказа резервированной системы методом ускоренного моделирования. *«Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики»*. 2013. № 3. С. 50–62.
22. Кузнецов Н.Ю., Кузнецов И.Н. Ускоренное моделирование вероятности блокировки требований в сетях обслуживания с множественным доступом. *Кибернетика и системный анализ*. 2021. № 4. С. 30–43.

Отримано 24.07.2023