УДК 517.929.7

Я.Й. Бігун, О.З. Українець, І.Д. Скутар

УСЕРЕДНЕННЯ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПІД ДІЄЮ БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗБУРЕНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Бігун Ярослав Йосипович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
orcid: 0000-0002-5545-9041

y.bihun@chnu.edu.ua

Українець Олег Захарович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
orcid: 0009-0008-9793-0330

o.ukrainets@chnu.edu.ua

Скутар Ігор Дмитрович

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
orcid: 0000-0001-9391-1273

i.skutar@chnu.edu.ua

Метод усереднення за швидкими змінними застосовано для дослідження математичних моделей природничих процесів з лінійними запізненнями під дією багаточастотних збурень. Побудовано усереднену систему за швидкими змінними, яка значно простіша точної системи рівнянь. Доведено існування і єдиність неперервно диференційовного розв'язку на скінченному часовому відрізку. Обґрунтування методу усереднення будується на оцінках осциляційних інтегралів, відповідних багаточастотній системі. Напрям досліджень багаточастотних систем запропоновано у працях А.М. Самойленка і Р.І. Петришина. Диференціальним рівнянням із запізненням аргументу і початковими, багатоточковими й інтегральними умовами, дослідженню за допомогою методу усереднення систем, які в процесі еволюції проходять через резонанс, присвячені праці Я.Й. Бігуна. Встановлено умову резонансу, яка залежить не тільки від частот, але і від запізнень у швидких змінних. Одержана оцінка методу усереднення явно залежить від малого параметра та кількості швидких змінних і запізнень у них. Асимптотика оцінки є непокращуваною при накладених у роботі умовах. Основною умовою побудови оцінки є умова виходу системи з малого околу резонансу. У роботі такою умовою є відмінність від нуля на часовому відрізку $[0, L]$ визначника Вронського порядку $mq,$ побудованого за системою q векторів частот з лінійно перетвореними аргументами, m — кількість швидких змінних і частот. Одержаний результат проілюстровано на моделі Вольтерри–Лотки під впливом одночастотного збурення з лінійно перетвореним аргументом. Асимптотика оцінки похибки методу має порядок $\sqrt{\varepsilon}$ і характерна для двочастотної системи без запізнення. Для усередненої задачі проаналізовано біфуркації стану рівноваги, який відповідає співіснуванню двох видів. Результати роботи можна застосувати при побудові і дослідженні математичних моделей динаміки популяції за наявності багаточастотних збурень. Такі дослідження актуальні в період воєнних дій, коли на процеси у природі впливають шуми, світлові, механічні і електромагнітні збурення. Також одержаний результат заслуговує на увагу в моделях поширення епідемій, імунної відповіді організму при інфекційних захворюваннях, при дослідженні політичних і воєнних конфліктів.

Ключові слова: математична модель, метод усереднення, малий параметр, резонанс, лінійне запізнення, оцінка похибки, існування і єдиність розв'язку.

Різноманітні процеси в екології, імунології та інших галузях описуються системами звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, це моделі взаємодії популяцій, поширення епідемій, процеси в нейронних мережах. Для адекватності математичних моделей важливим фактором є врахування запізнення. В екологічних моделях запізненням характеризується репродуктивний вік особин популяції або час відтворення виду, що служить ресурсом [1]; в імунології — це час формування каскаду плазмоклітин [2], у небесній механіці запізнення виникає внаслідок скінченної швидкості поширення гравітаційних хвиль [3], у моделях конфліктно-керованих процесів воно визначається станом рухомих об'єктів [4, 5].

На динаміку еволюційних процесів можуть впливати збурення, викликані зовнішніми силами. Досить загального вигляду регулярно збурені системи з m частотами

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= X(\tau, a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi) \end{aligned} \tag{1}$$

досліджувалися в [6]. Тут $\tau = \varepsilon t$ — повільний час, малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, вектор повільних змінних $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, φ — вектор швидких змінних $\varphi \in \mathbb{R}^m$, вектор-функції X і Y 2π-періодичні або майже періодичні за компонентами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, ω — вектор частот.

Системи вигляду (1) із запізненням досліджувалися методом усереднення в [7–9] та ін. Встановлено існування та єдиність розв'язку для систем з початковими, багатоточковими та інтегральними умовами, обґрунтовано метод усереднення й одержано непокращувані при накладених умовах оцінки похибки методу, явно залежні від малого параметра. У даній роботі методом усереднення досліджується вплив m-частотних збурень на динаміку еволюційних процесів, які описуються диференціальними рівняннями з лінійними запізненнями.

Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du}{d\tau} = U(\tau, u_\Delta) + \varepsilon^\beta V(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{2}$$

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \tag{4}$$

де $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $u \in D_1 \subset \mathbb{R}^l$, $a \in D_2 \subset \mathbb{R}^n$, D_1 і D_2 — обмежені замкнені області, $\varphi \in \mathbb{R}^m$; $\beta \ge 0, \Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_r)$, $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$, $0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_r \le 1$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_p \le 1$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_q \le 1$; $u_\Delta(\tau) = (u(\Delta_1\tau), \ldots$ $\ldots, u(\Delta_r\tau))$, аналогічно $\alpha_\Lambda(\tau)$ і $\varphi_\Theta(\tau)$. Вектор-функції V, X і Y 2π-періодичні за компонентами векторів φ_{θ_ν}, $\nu = \overline{1, q}$.

Відповідно система (2)–(4), усереднена за швидкими змінними φ_{θ_ν}, на кубі періодів набуває вигляду:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = U(\tau, \bar{u}_\Delta) + \varepsilon^\beta V_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \tag{5}$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \tag{6}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda). \tag{7}$$

Якщо $F := (V, X, Y)$, то

$$F_0(\tau, a_\Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{mq}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\varphi_\Theta.$$

Усереднена система залишається системою рівнянь із запізненням, але рівняння (6) не залежить від швидких змінних. Якщо знайдено розв'язок $\bar{a} = \bar{a}(\tau)$, то розв'язування рівняння (7) з початковою умовою $\bar{\varphi}(0, \varepsilon) = \bar{\psi}$ зводиться до інтегрування

$$\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = \bar{\psi} + \int_0^\tau \left(\frac{\omega(s)}{\varepsilon} + Y_0(s, \bar{a}_\Lambda(s)) \right) ds,$$

а знаходження розв'язку рівняння (5) значно спрощується, оскільки тоді вектор-функція $V_0 = V_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau))$.

Обґрунтування методу усереднення значно ускладняється внаслідок резонансу частот. У системі (3), (4) при її еволюції, як показано в [7], умова резонансу залежать від запізнень у швидких змінних і в точці τ набуває вигляду

$$\gamma_k(\tau) := \sum_{\nu=1}^{q} \theta_\nu (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau)) = 0,$$

де $k_\nu \in Z^m$, $k = (k_1, \ldots, k_q) \ne 0$.

Якщо $q = \theta = 1$, то одержимо класичну умову резонансу [6] вигляду

$$(k, \omega(\tau)) = 0, k \ne 0,$$

яка відповідає системі рівнянь (1).

 ISSN 2786-6491

Умови і допоміжні твердження

Метод усереднення для системи рівнянь (3), (4) з початковими умовами $(\overline{y}, \overline{\psi})$ обґрунтовано в [7]. Нехай $G = [0, L] \times D_1^p \times \mathbb{R}^{qm}$ і виконуються такі умови:

1) вектор-функції $X, Y, V \in C^{1,1}_{\tau, a_\Lambda}(G)$ і обмежені разом з похідними сталою $\sigma_1 > 0$;

2) існує єдиний розв'язок рівняння (6) з початковою умовою $\overline{a}(0) = \overline{y}$, який лежить в області D_1 разом з деяким ρ_1-околом;

3) для деякої сталої $\sigma_2 > 0$ і коефіцієнтів Фур'є вектор функції X виконується

$$\sum_{k \neq 0} \left(\max_{[0;L]} \left\| X_k(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau)) \right\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \max_{[0;L]} \left\| \frac{\partial X_k(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))}{\partial \tau} \right\| + \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu \max_{[0;L]} \left\| \frac{\partial X_k(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau))}{\partial \overline{a}_{\lambda_\nu}} \right\| \right) \leq \sigma_2,$$

де $\|k\|_\Theta = \sum_{\nu=1}^{q} \theta_\nu \|k_\nu\|$, $\|k\| = \sum_{\nu=1}^{m} |k_\nu|$.

Аналогічні оцінки зі сталою σ_2 виконуються для коефіцієнтів Фур'є вектор-функцій V та Y;

4) вектор-функція $\omega \in C^{mq}_{[0;L]}$ і побудований за системою функцій $\{\omega(\theta_1 \tau), \ldots$ $\ldots, \omega(\theta_q \tau)\}$ визначник Вронського

$$W(\tau) \neq 0, \; \tau \in [0, L].$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1–4. Тоді для кожного* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, *існує єдиний розв'язок системи рівнянь (3), (4) з початковими умовами* $(\overline{y}, \overline{\psi})$, *які задаються при* $\tau = 0$, *і для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0; \varepsilon_1]$ *виконуються оцінки:*

$$\left\| a(\tau, \varepsilon) - \overline{a}(\tau) \right\| + \left\| \varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon) \right\| \leq c_1 e^{c_2 \tau} \varepsilon^\alpha \leq c_3 \varepsilon^\alpha, \tag{8}$$

де $\alpha = (mq)^{-1}$; c_1 *і* c_2 *— додатні сталі, які не залежать від* ε, $c_3 = c_1 \exp(c_2 L)$. □

Для правих частин рівняння (2) припустимо, що виконуються такі умови:

5) вектор-функція $U \in C^1_{\tau, u_\Delta}(G_1)$, $G_1 = [0, L] \times D_2^l$, обмежена разом з похідними сталою σ_3 і

$$\sum_{k \neq 0} \|k\| \max_{[0;L]} \left\| V_k(\tau, \overline{a}_\Lambda(\tau)) \right\| \leq \sigma_4.$$

Обґрунтування методу усереднення для системи (2)–(4)

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–5 і для кожного* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_1]$ *існує єдиний розв'язок* $\overline{u} = \overline{u}(\tau, \varepsilon)$ *рівняння (5) з початковою умовою* $\overline{u}(0, \varepsilon) = \overline{\xi}$, *який лежить в області* D_2 *разом з деяким* ρ_2*-околом. Тоді знайдеться таке* ε^*, *що існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2)–(4) з початковими умовами* $(\overline{y}, \overline{\psi}, \overline{\xi})$ *і для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0; \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_1$ *виконується оцінка*

$$\left\| u(\tau, \varepsilon) - \overline{u}(\tau, \varepsilon) \right\| + \varepsilon^\beta \left\| a(\tau, \varepsilon) - \overline{a}(\tau) \right\| + \varepsilon^\beta \left\| \varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon) \right\| \leq c_4 \varepsilon^{\alpha + \beta},$$

де $c_4 > 0$ *і не залежить від* ε.

Доведення. З умови гладкості правих частин рівняння (2) випливає існування єдиного розв'язку $u = u(\tau, \varepsilon)$, $u(0, \varepsilon) = \overline{\xi}$ на деякому інтервалі $(0, \tau_1)$. З рівнянь (2) і (5) для $\tau \in [0, t_1)$ отримаємо

$$u(\tau, \varepsilon) - \overline{u}(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau (U(s, u_\Delta(s, \varepsilon)) - U(s, \overline{u}_\Delta(s, \varepsilon)))\, ds +$$

$$+\varepsilon^\beta \int_0^\tau (V(s, a_\Lambda(s, \varepsilon), \varphi_\Theta(s, \varepsilon)) - V(s, \overline{a}_\Lambda(s), \varphi_\Theta(s, \varepsilon)))\, ds +$$

$$+\varepsilon^\beta \int_0^\tau (V(s, \overline{a}_\Lambda(s), \varphi_\Theta(s, \varepsilon)) - V(s, \overline{a}_\Lambda(s), \overline{\varphi}_\Theta(s, \varepsilon)))\, ds +$$

$$+\varepsilon^\beta \sum_{k\neq 0} \int_0^\tau \left(V_k(s, \overline{a}_\Lambda(s)) \exp\left(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \overline{\varphi}(\theta_\nu s, \varepsilon) \right) \right) ds = \varepsilon^\beta (B_1 + B_2 + B_3 + B_4).$$

Оцінимо норму кожного з доданків B_ν, $\nu = \overline{1, 4}$. На підставі умови 5

$$\| B_1 \| \le \sigma_3 \sum_{\nu=1}^r \int_0^\tau \| u_{\Delta_\nu}(s, \varepsilon) - \overline{u}_{\Delta_\nu}(s, \varepsilon) \|\, ds = \sigma_3 \sum_{\nu=1}^r \Delta_\nu^{-1} \int_0^\tau \| u(s, \varepsilon) - \overline{u}(s, \varepsilon) \| ds.$$

Застосувавши оцінку (8), одержимо для B_2 на $(0, \tau_1)$:

$$\| B_2 \| \le \sigma_2 \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu^{-1} \int_0^{\lambda_\nu \tau} \| a(s, \varepsilon) - \overline{a}(s) \| ds \le c_1 c_2^{-1} \sigma_1 \left(\sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu^{-1} (e^{c_2 \lambda_\nu \tau} - 1) \right) \varepsilon^\alpha \le c_4 \varepsilon^\alpha,$$

де $c_4 = c_1 c_2^{-1} \sigma_1 \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu^{-1} (e^{c_2 \lambda_\nu L} - 1).$

Для оцінки норми B_3 з (8) і умови 5 маємо:

$$\| B_3 \| \le \sum_{k\neq 0} \int_0^\tau \| V_k(\tau, \overline{a}_\Lambda(s)) \| \sum_{\nu=1}^q \| k_\nu \| \| \varphi(\theta_\nu s, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\theta_\nu s, \varepsilon) \| ds \le$$

$$\le 2 c_1 c_2^{-1} \varepsilon^\alpha \sum_{k\neq 0} (\max_{[0; L]} \| V_k(s, \overline{a}_\Lambda(s)) \|) \left(\sum_{\nu=1}^q \| k_\nu \| \int_0^{\theta_\nu \tau} e^{c_2 s} ds \right) \le$$

$$\le 2 c_1 c_2^{-1} (e^{c_2 L} - 1) \varepsilon^\alpha \sum_{k\neq 0} \| k_\nu \| \max_{[0; L]} \| V_k(s, \overline{a}_\Lambda(s)) \| \le c_5 \varepsilon^\alpha,$$

де $c_5 = 2 c_1 c_2^{-1} \sigma_4 (e^{c_2 L} - 1).$

Для оцінки норми B_4 застосуємо оцінку осциляційного інтеграла [7]:

$$\left\| \int_0^\tau f_k(s) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \gamma_k(z) dz \right) ds \right\| \le \sigma_5 \left(\max_{[0; L]} \| f_k(s) \| + \frac{1}{\| k \|_\Theta} \max_{[0; L]} \left\| \frac{d f_k(s)}{ds} \right\| \right), \tag{9}$$

де $f_k \in C^1[0; L]$, $\sigma_5 > 0$ і не залежить від k і ε.

 ISSN 2786-6491

З вигляду B_4 і рівняння (4) маємо

$$f_k(s) = V_k(s, \bar{a}_\Lambda(s)) \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{q} (k_\nu, \bar{\psi}) \right) \left(\exp\left(\int_0^{\theta_\nu s} (k_\nu, Y_0(z, \bar{a}_\Lambda(z)) dz \right) \right).$$

Звідси одержимо такі оцінки:

$$\| f_k(s) \| \le \max_{[0;L]} \| V_k(s, \bar{a}_\lambda(s)) \| ;$$

$$\left\| \frac{df_k(s)}{ds} \right\| \le \left\| \frac{\partial V_k(s, \bar{a}_\Lambda(s))}{\partial s} \right\| + (\max_{[0;L]} \| V_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(s)) \|) \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu \left\| \frac{\partial V_k(s, a_\Lambda(s))}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| +$$

$$+ (\max_{[0;L]} \| Y_0(s, \bar{a}_\Lambda(s)) \|) \| V_k(s, \bar{a}_\Lambda(s)) \| \sum_{\nu=1}^{p} \theta_\nu \| k_\nu \|.$$

Скориставшись оцінкою (9) і умовами 3 і 5, для B_4 маємо:

$$\| B_4 \| \le$$

$$\le \sigma_5 \varepsilon^\alpha \sum_{k \ne 0} \left(\max_{[0;L]} \| V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \| + \frac{1}{\| k \|_\Theta} \left(\max_{[0;L]} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau))}{\partial \tau} \right\| + \max_{[0;L]} \| V_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \| \right) * \right.$$

$$\left. * \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu \left\| \frac{\partial V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau))}{\partial \bar{a}_{\lambda_\nu}} \right\| + (\max_{[0;L]} \| Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \|) * \| k \|_\Theta \max_{[0;L]} \| V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(s)) \| \right) \le$$

$$\le \varepsilon^\alpha \sigma_5 (1 + \sigma_1) \sum_{k \ne 0} \left(\max_{[0;L]} \| V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau)) \| + \frac{1}{\| k \|_\Theta} \left(\max_{[0;L]} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau))}{\partial \tau} \right\| + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu \max_{[0;L]} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, \bar{a}_\Lambda(\tau))}{\partial \bar{a}_{\lambda_\nu}} \right\| \right) \right) \le \sigma_2 \sigma_5 (1 + \sigma_1) \varepsilon^\alpha = c_6 \varepsilon^\alpha.$$

Враховуючи оцінки норм B_ν, $\nu = \overline{1, 4}$, одержимо наступне:

$$\| u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon) \| \le \sigma_2 \sum_{\nu=1}^{r} \Delta_\nu^{-1} \int_0^{\Delta_\nu \tau} \| u(s, \varepsilon) - \bar{u}(s, \varepsilon) \| ds + (c_4 + c_5 + c_6) \varepsilon^{\alpha + \beta}, \quad 0 \le \tau \le \tau_1, \tag{10}$$

Застосуємо інтегральну нерівність з [10]. Якщо $d > 0$, $a_\nu \ge 0$, $\nu = \overline{1, r}$, то з нерівності

$$u(\tau) \le d + \sum_{\nu=1}^{r} a_\nu \int_0^{\Delta_\nu \tau} u(s)\, ds, \ \tau > 0$$

випливає

$$u(\tau) \le d \exp\left(\sum_{\nu=1}^{r} (a_\nu \Delta_\nu) \tau \right), \ \tau \ge 0. \tag{11}$$

Застосувавши інтегральну нерівність (11) з (10), одержимо оцінку:

$$\left\| u(\tau,\varepsilon)-\bar{u}(\tau,\varepsilon)\right\| \le c_7\varepsilon^{\alpha+\beta}\exp(\sigma_2\tau),\ 0\le\tau\le\tau_1, \qquad (12)$$

де $c_7 = c_4 + c_5 + c_6$.

Нехай

$$\varepsilon \le \varepsilon^* = \min(\varepsilon_1, 2c_7((\exp(\sigma_2 L))/\rho_2)^{1/(\alpha+\beta)}.$$

Тоді розв'язок $u(\tau,\varepsilon)$ знаходиться в ρ-околі розв'язку $\bar{u}=\bar{u}(\tau,\varepsilon)$ усередненого рівняння для всіх $0\le\tau\le L$ і $\varepsilon\in(0;\varepsilon^*]$. На підставі оцінок (8) і (12) для $\tau_1 = L$ одержимо оцінку норми відхилення розв'язків точної й усередненої системи рівнянь згідно з твердженням теореми 2 зі сталою $c_4 = c_3 + c_7\exp(r\sigma_2 L)$. □

Приклад

Розглянемо модель Вольтерри–Лотки під дією одночастотного збурення з лінійним запізненням вигляду

$$\frac{du}{d\tau} = (\beta_1-\gamma_1 v)u - \mu a + b_1\cos(k\varphi + l\varphi_\theta),\ u(0)=\bar{u}>0, \qquad (13)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = (-\beta_2+\gamma_2 u)v,\ v(0)=\bar{v}>0;$$

$$\frac{da}{d\tau} = (\kappa - a)a + b_2\cos(k\varphi + l\varphi_\theta),\ a(0)=\bar{y}, \qquad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon},\ \varphi(0)=0,$$

де $\tau\in[0,1]$, $\mu, \kappa, \beta_\nu, \gamma_\nu$ — додатні коефіцієнти, $b_1 b_2 \ne 0$, $0<\theta<1$, $k, l\in\mathbb{Z}$, $k+l\theta=0$.

У системі (14) досягається резонанс при $\tau=0$, оскільки

$$\omega(\tau)=1+2\tau,\ \gamma(\tau)=k\omega(\tau)+\theta l\omega(\theta\tau)=2(k+l\theta^2)\tau.$$

Усереднена задача має вигляд

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = (\beta_1-\gamma_1\bar{v})\bar{u} - \mu\bar{a},\ \bar{u}(0)=\bar{u},$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = (-\beta_2+\gamma_2\bar{u})\bar{v},\ \bar{v}(0)=\bar{v}; \qquad (15)$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = (\kappa-\bar{a})\bar{a},\ \bar{a}(0)=\bar{y},\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1+2\tau}{\varepsilon},\ \varphi(0)=0.$$

Як показано в [10],

$$\left| a(\tau,\varepsilon)-\bar{a}(\tau)\right| \le c_1\sqrt{\varepsilon},\ c_1>0,\ \tau = \in[0,1].$$

Тому $\left| u(\tau,\varepsilon)-\bar{u}(\tau)\right| \le c_2\sqrt{\varepsilon}$ при $(\tau,\varepsilon)\in[0,1]\times(0,\varepsilon^*]$.

 ISSN 2786-6491

При $\mu = 0$ фазовими траєкторіями усередненої системи (14) є цикли, стан рівноваги $\left(\frac{\beta_2}{\gamma_2}, \frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)$ — центр. Для $\mu > 0$ стан рівноваги знаходиться із системи рівнянь

$$(\beta_1 - \gamma_1 \bar{v})\bar{u} - \mu\bar{a} = 0,$$
$$(-\beta_2 + \gamma_2 \bar{u})\,\bar{v} = 0,$$
$$(\kappa - \bar{a})\bar{a} = 0,$$

звідки одержимо $(0, 0, 0), (\mu\kappa / \beta_2, 0, \mu)$.

Ще один стан рівноваги

$$\bar{u} = \beta_2 / \gamma_2,\ \bar{v} = \frac{\beta_1\beta_2 - \mu\kappa}{\gamma_1\beta_2},\ \bar{a} = \kappa \tag{16}$$

існує при виконанні умови

$$\mu \le \beta_1\beta_2 / \kappa. \tag{17}$$

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи рівнянь для (15) набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} \beta_1 - \gamma_1\bar{\upsilon} - \lambda & -\gamma_1\bar{u} & -\mu \\ \gamma_1\bar{\upsilon} & -\beta_2 + \gamma_2\bar{u} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \kappa - 2a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \mu\kappa\lambda + \beta_1\beta_2 - \mu\kappa = 0.$$

Якщо виконується умова (17), то дійсні частини коренів від'ємні і стан рівноваги (16) асимптотично стійкий. При $\mu = \beta_1\beta_2 / \kappa$ стійкість втрачається, оскільки $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \beta_1\beta_2 > 0, \lambda_3 = -a < 0.$ Отже, в квадранті $u > 0, v > 0$ стан рівноваги (16) при $\mu = 0$ — фокус, при $0 < \mu < \beta_1\beta_2 / \kappa$ — стійкий вузол. При переході параметра μ через праву границю $\beta_1\beta_2 / \kappa$ власні значення $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ і стійкість втрачаються.

Y. Bihun, O. Ukrainets, I. Skutar

AVERAGING IN MATHEMATICAL MODELS UNDER THE INFLUENCE OF MULTI-FREQUENCY PERTURBANCES WITH DELAY

Yaroslav Bihun

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,

y.bihun@chnu.edu.ua

Oleh Ukrainets

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,

o.ukrainets@chnu.edu.ua

Ihor Skutar

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,

i.skutar@chnu.edu.ua

In the article, the method of averaging over fast variables is applied to the study of mathematical models of natural processes with linear delays under the influence of multi-frequency disturbances. An averaged system over variables is constructed, which is much simpler than the initial system of equations. The existence and uniqueness of a continuously differentiable solution on a finite time interval is proved. The justification of the averaging method is based on estimates of oscillatory integrals corresponding to a multi-frequency system. The direction of research of multifrequency systems is proposed in the works by A.M. Samoilenko and R.I. Petryshyn. For differential equations with delay of the argument and initial, multipoint and integral conditions, research using the averaging method of systems, that pass through resonance in the process of evolution, is performed in the works by Ya.Y. Bihun. The condition of resonance is established, which depends not only on frequencies, but also on delays in fast variables. The obtained estimate of the averaging method clearly depends on the small parameter and the number of fast variables and their delays. The asymptotics of the estimate is unimproved under the conditions imposed in the work. The main condition for the construction of the estimate is the condition for the system to leave a small area of resonance. In the work, such a condition is the difference from zero on the time segment $[0, L]$ of the Wronskian of the order mq built according to the system, q of frequency vectors with linearly transformed arguments, m — the number of fast variables and frequencies. The obtained result is illustrated on the Volterra–Lotka model under the influence of a single-frequency disturbance with a linearly transformed argument. The asymptotics of the estimation of the error of the method is of the order $\sqrt{\varepsilon}$ and is typical for the two-frequency system without delay. For the averaged problem, bifurcations of the equilibrium state corresponding to the coexistence of two species were analyzed. The results of the work can be applied in the construction and research of mathematical models of population dynamics in the presence of multi-frequency disturbances. Such studies are relevant in the period of military operations, when processes in nature are affected by noise, light, mechanical and electromagnetic disturbances. Also, the obtained result deserves attention in models of the spread of epidemics, the body's immune response to infectious diseases, and in the study of political and military conflicts.

Keywords: mathematical model, averaging method, small parameter, resonance, linear delay, error estimation, existence and uniqueness of the solution.

ПОСИЛАННЯ

1. Smith H. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences. New York : Springer Science+Business Media, 2011. 172 p.
2. Marchuk G.I. Mathematical modelling of immune response in infectious diseases. Dordrecht : Springer-Science+Bizness Media, 1997. 350 p.
3. Слюсарчук В.Ю. Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації. *Нелінійні коливання*. 2018. Т. 21, № 2. С. 238–261.
4. Liubarshchuk Ie., Bihun Ya., Cherevko I. Non-stationary differential-difference games of neutral type dynamic games and applications. *Dynamic Games and Applications*. 2019. Vol. 9, N 3. P. 771–779.
5. Chikrii A., Petryshyn R., Cherevko I., Bigun Ya. Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes advanced control techniques in complex engineering systems. *Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control. SpringerLink*. 2019. Vol. 203. P. 3–33.
6. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ : Наукова думка, 2004. 475 с.
7. Бігун Я.Й. Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом. *Укр. матем. журнал*. 2000. Т. 52, № 3. С. 291–299.
8. Бігун Я.Й., Скутар І.Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. *Буковинський математичний журнал*. 2020. Т. 8, № 2. С. 14–23.
9. Петришин Р.І., Бігун Я.Й. Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку. *Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Сер. Математика*. 2008. Вип. 421. С. 84–89.
10. Bihun Ya., Skutar I. Averaging in multifrequency systems with multi-point conditions and a delay. *Acta et Coomentationes. Exact and Natural Sciences*. 2023. N 2(16). P. 13–24.

Отримано 01.02.2024