КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.6

В.А. Стоян

ПРО ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ КВАДРАТИЧНО УТОЧНЕНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Стоян Володимир Антонович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ,
orcid: 0009 0008 0746 5050

v_a_stoyan@ukr.net

Розглядаються просторово розподілені динамічні системи, лінійна та квадратично нелінійна частини математичних моделей яких побудовані за допомогою лінійних диференціальних перетворень функції стану. Ставляться та розв'язуються задачі прогнозування динаміки системи за наявності початково-крайових спостережень за станом останньої. Спостереження можуть бути як неперервно, так і дискретно визначені. Характер спостережень визначається функціонально через лінійні диференціальні оператори довільного порядку, структури та кількість. Спостережувані характеристики системи моделюються дискретно та неперервно визначеними моделюючими функціями, чисельні значення та аналітика яких за межами розглядуваної просторово-часової області функціонування досліджуваної системи знаходяться в результаті побудови середньоквадратичного наближення до розв'язків лінійних алгебраїчних, інтегральних та функціональних рівнянь. Отримані математичні результати досліджуються на точність та однозначність. Розрахункові формули, якими визначається множина допустимих розв'язків розглядуваних задач, досить прості і доступні для комп'ютерної реалізації. Визначено особливості дослідження динаміки розглядуваного класу систем для випадків, коли початковими та крайовими зовнішньо-динамічними збуреннями можна знехтувати, а динаміку системи розглядати в необмежених просторових та часових областях.

Ключові слова: нелінійні динамічні системи, системи з невизначеностями, системи з розподіленими параметрами, просторово розподілені системи, псевдорозв'язки, некоректні початково-крайові задачі.

Вступ

Проблеми дослідження нелінійних динамічних систем традиційно вважалися [1, 2] складними. Вони ускладнюються ще більше, а то і взагалі стають нерозв'язними, при вивченні просторово розподілених динамічних систем і особливо у разі недоступності останніх для коректного формулювання початково-крайових задач. Побудувати точний розв'язок таких задач методами аналітичної та обчислювальної математики неможливо.

Розв'язання проблем динаміки неповно спостережуваних нелінійних просторово розподілених систем започатковано в [3], а узагальнено нетрадиційний підхід до побудови наближених за середньоквадратичним критерієм розв'язків початково-крайових задач для деяких класів таких систем — в [4–7]. Зауважимо, однак, що бажання отримати позитивний результат за мінімальних обмежень на порядок нелінійності і загальний вигляд математичної моделі системи ускладнило отримані там розв'язки розглядуваних задач.

З урахуванням сказаного нижче для одного досить універсального класу квадратично нелінійних динамічних систем, який є, однак, частинним випадком систем, розглядуваних в [7], будуть сформульовані і розв'язані задачі побудови функції стану, яка, задовольняючи диференціальну модель системи, за середньоквадратичним критерієм узгоджується з дискретно та неперервно визначеними спостереженнями за її початково-крайовим станом. Визначимо особливості динаміки таких систем для випадків, коли початковими чи крайовими зовнішньо-динамічними збуреннями можна знехтувати. Для кожної з розглядуваних задач зробимо оцінки точності і сформулюємо умови однозначності отриманих розв'язків.

Математична суть проблеми

В роботах [4–7] розв'язані задачі математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем, диференціальна модель яких лінійна за своєю основою має адитивно визначену диференціальну нелінійність. Зауважимо, що при розв'язанні цих задач особливих обмежень на степінь нелінійності не накладалося. Така широта у визначенні класу систем інколи вимагала деяких обмежень у формулюванні математичних задач з математичного моделювання їх стану. Зазначимо, що всі практично важливі (для цього класу систем) задачі були сформульовані і успішно розв'язані.

Нижче зупинимося на особливостях постановки та розв'язання початково-крайових задач динаміки просторово розподіленої системи вигляду

$$L_1^{(1)}(\partial_s)y(s) + L_1^{(2)}(\partial_s)y(s)L_2^{(2)}(\partial_s)y(s) = u(s), \tag{1}$$

в якій $s=(x,t)\in S_0^T=(S_0\subset R^n)\times[0,T]$ — просторово-часова координата, $L_j^{(i)}(\partial_s)$ $(j=\overline{1,i};\ i=\overline{1,2})$ — лінійні диференціальні оператори, $y(s)$ — функція стану системи, $u(s)$ — розподілені просторово-часові збурення, які цей стан супроводжують.

Дослідження динаміки системи (1), доповненої початково-крайовими співвідношеннями

$$L_r^0(\partial_t)\,y(s)\big|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (x\in S_0,\ r=\overline{1,R_0}), \tag{2}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{x=x^\Gamma\in\Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma,t) \;\; (t\in[0,T],\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}); \tag{3}$$

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}} = Y_{rl}^0(x_l^0\in S_0,\, l=\overline{1,L_0},\, r=\overline{1,R_0}\,), \tag{4}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} = Y_{\rho l}^\Gamma(s_l^\Gamma\in\Gamma\times[0,T],\, l=\overline{1,L_\Gamma},\, \rho=\overline{1,R_\Gamma}), \tag{5}$$

може бути успішно виконане з використанням методики псевдообернення системи

$$L_1^{(1)}(\partial_s)y(s) + \sum_{i=2}^{N}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)y(s) = u(s), \tag{6}$$

запропонованої в [7].

 ISSN 2786-6491

Зауважимо, що необмеженість у виборі степеня нелінійності N не дозволила отримати аналітичне представлення функції $y(s)$ стану системи від неперервно визначених просторово розподілених динамічних збурень $u(s)$ без їх дискретизації. Однак цей недолік може бути подоланий [8] у випадку, коли $N=2$, а система (6) вироджується у систему (1).

Для цього, вводячи до розгляду функції $u_j^{(k)}(s)$, такі, щоб

$$u_j^{(k)}(s)=L_j^{(k)}(\partial_s)y(s) \quad (j=\overline{1,i};\ k=\overline{1,N}), \tag{7}$$

а також покладаючи

$$y(s)=\sum_{k=1}^{N} y_j^{(k)}(s) \tag{8}$$

при $y_j^{(k)}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_j^{(k)}(s-s')u_j^{(k)}(s')ds'$, де $u_1^{(1)}(s)\equiv u(s)$, а $G_j^{(k)}(s-s')$ — функція Гріна рівняння (6) в необмеженій просторово-часовій області, аналітичну залежність функції стану $y(s)$ системи (1) від неперервно визначеного просторово-часового збурення $u(s)$ подамо співвідношенням

$$y(s)=y^{(1)}(s)+y_j^{(2)}(s), \tag{9}$$

у якому

$$y^{(1)}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1^{(1)}(s-s')u_1^{(1)}(s')ds', \tag{10}$$

$$y^{(2)}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_j^{(2)}(s-s')u_j^{(2)}(s')ds'. \tag{11}$$

Зауважимо, що значення $j\in\{1,2\}$ в (8) та (11) вибирається оптимально з міркувань точності псевдообернення допоміжних [7] диференціальних перетворень.

Особливості розв’язання початково-крайових задач (2)–(5) для системи (1) з використанням псевдорозв’язку рівняння (1) розглянемо нижче. Зазначимо, що вибір розв’язку (9)–(11) як базового для розв’язання початково-крайових задач (2)–(5) системи (1) дозволить розв’язати ці задачі менш громіздко і більш наглядно та зробити це навіть при неперервно визначених моделюючих зовнішньо-динамічних збурюючих факторах, тобто сповна повторити постановки задач та методики їх розв’язання, які були запропоновані в [3] для лінійно розподілених динамічних систем.

Дискретний варіант задачі

Зупинимося на особливостях розв’язання сформульованої та розглянутої в [7] задачі побудови функції $y(s)$ стану системи (1), яка при заданих Y_{rl}^{0} $(l=\overline{1,L_0}$, $r=\overline{1,R_0})$ та $Y_{\rho l}^{\Gamma}$ $(l=\overline{1,L_\Gamma},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma})$ середньоквадратично згідно з критерієм

$$\Phi\to\min_{u(s)}, \tag{12}$$

де

$$\Phi=\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{l=1}^{L_0}\Big(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}}-Y_{rl}^0\Big)^2+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{l=1}^{L_\Gamma}\Big(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}-Y_{\rho l}^\Gamma\Big)^2, \tag{13}$$

задовольняла співвідношення

$$L_r^0(\partial_r)y(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}} = Y_{rl}^0 \;(x_l^0 \in S_0,\; l=\overline{1,L_0},\, r=\overline{1,R_0}), \tag{14}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (s_l^\Gamma \in \Gamma\times[0,T],\, l=\overline{1,L_\Gamma},\, \rho=\overline{1,R_\Gamma}). \tag{15}$$

Як і в [7], розв'язок $y(s)$ задачі подамо сумою

$$y(s)=y_\infty(s)+y_0(s)+y_\Gamma(s), \tag{16}$$

в якій тепер

$$y_\infty(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\bar G(s-s')\bar u(s')ds', \tag{17}$$

$$y_0(s)=\sum_{m=1}^{M_0}\bar G(s-s_m^0)\,\bar u_{0m}, \tag{18}$$

$$y_\Gamma(s)=\sum_{m=1}^{M_\Gamma}\bar G(s-s_m^\Gamma)\,\bar u_{\Gamma m} \tag{19}$$

при

$$\bar G(s-s')=\mathrm{str}(G_1^{(1)}(s-s'),\; G_j^{(2)}(s-s')),$$

$$\bar u(s)=\mathrm{col}(u_1^{(1)}(s)\,u_j^{(2)}(s))\;\; (s\in S_0^T),$$

$$\bar u_{0m}=\bar u(s_m^0)\;\;(s_m^0\in S^0=S_0\times(-\infty,T],\; m=\overline{1,M_0}),$$

$$\bar u_{\Gamma m}=\bar u(s_m^\Gamma)\;\;(s_m^\Gamma\in S^\Gamma=(R^n\setminus S_0)\times[0,T],\; m=\overline{1,M_\Gamma}).$$

Тут, як і в (9)–(11), $G_j^{(i)}(s-s')\,(j=\overline{1,i},\; i=\overline{1,2})$ — функції Гріна рівняння $L_j^i(\partial_s)y(s)=u(s)$ в необмеженій просторово-часовій області, $u_j^{(i)}(s)$ $(j=\overline{1,i}$, $i=\overline{1,2})$ — нелінійно перетворені [5] розподілені зовнішньо-динамічні збурення $u(s)$.

Значення $\bar u_{0m}$ $(m=\overline{1,M_0})$ та $\bar u_{\Gamma m}$ $(m=\overline{1,M_\Gamma})$ невизначеної в областях S^0 та S^Γ функції $u(s)$ знайдемо із співвідношень, отриманих після підстановки (16)–(19) в (14), (15).

Позначивши

$$A_{11}=\mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{\substack{t=0\\x=_l^0}},\; m=\overline{1,M_0}),\, l=\overline{1,L_0}),\, r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{12}=\mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{\substack{t=0\\x=_l^0}},\; m=\overline{1,M_\Gamma}),\, l=\overline{1,L_0}),\, r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{21}=\mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\; m=\overline{1,M_0}),\, l=\overline{1,L_\Gamma}),\, \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$A_{22}=\mathrm{col}((\mathrm{str}\,(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\; m=\overline{1,M_\Gamma}),\, l=\overline{1,L_\Gamma}),\, \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$Y_0=\mathrm{col}((Y_{rl}^0-L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},\, l=\overline{1,L_0}),\, r=\overline{1,R_0}),$$

 ISSN 2786-6491

$$Y_\Gamma = \mathrm{col}((Y^\Gamma_{\rho l} - L^\Gamma_\rho(\partial_x) y_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ l = \overline{1, L_\Gamma}),\ r = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$\bar{u}_0 = \mathrm{col}(\bar{u}_{0m},\ m = \overline{1, M_0}),$$

$$\bar{u}_\Gamma = \mathrm{col}(\bar{u}_{\Gamma m},\ m = \overline{1, M_\Gamma})$$

блоки-матриці та блоки-вектори матриці A та векторів $\bar{Y}$, $\bar{u}$, таких, що

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix},\ \bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u}_\Gamma \end{pmatrix}, \tag{20}$$

розв'язуючі відносно $\bar{u}_{0m}$ $(m = \overline{1, M_0})$ та $\bar{u}_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$ рівняння запишемо у вигляді

$$A\bar{u} = \bar{Y}. \tag{21}$$

Цим самим проблема знаходження векторів $\bar{u}_0$ та $\bar{u}_\Gamma$ значень $\bar{u}_{0m}$ $(m = \overline{1, M_0})$ та $\bar{u}_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$, якими згідно з (12) моделювалися б початково-крайові спостереження (14) та (15) динаміки нелінійної системи (1), звелася до середньоквадратичного обернення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (21). Зауважимо, що середньоквадратичним оберненням такої ж системи розв'язувалася [3] і задача математичного моделювання динаміки лінійних систем. Відмінним при цьому є тільки визначення моделюючих векторів $\bar{u}_0$, $\bar{u}_\Gamma$ та зв'язок цих векторів з введеним у (1) розподіленим зовнішньо-динамічним збуренням $u(s)$.

Розв'язком $\bar{u}$ системи (21), таким, що

$$\bar{u} = \arg \min_{u \in R^{M_0 + M_\Gamma}} \left\| Au - \bar{Y} \right\|^2, \tag{22}$$

буде [9] вектор $\bar{u} = A^{\mathrm{T}} P_1^+ \bar{Y} + \upsilon - A^{\mathrm{T}} P_1^+ A\upsilon$ $\forall \upsilon \in R^{M_0 + M_\Gamma}$ при $P_1 = AA^{\mathrm{T}}$.

Звідси знаходимо вектори $\bar{u}_0$ та $\bar{u}_\Gamma$, якими згідно з (12) моделюються початково-крайові зовнішньо-динамічні збурення (14) та (15). При цьому

$$\bar{u}_0 = (A_{11}^T, A_{21}^T) P_1^+ (\bar{Y} - A\upsilon) + \upsilon_0, \tag{23}$$

$$\bar{u}_\Gamma = (A_{12}^T, A_{22}^T) P_1^+ (\bar{Y} - A\upsilon) + \upsilon_\Gamma \tag{24}$$

при $(\upsilon_0^T, \upsilon_\Gamma^T) = \upsilon^{\mathrm{T}}$.

Підстановка знайдених згідно з (23), (24) векторів $\bar{u}_0$, $\bar{u}_\Gamma$ в (18), (19) дозволить знайти складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функції $y(s)$ стану системи (1), а з урахуванням, що складова $y_\infty(s)$ згідно з (17) відома, — і повну функцію $y(s)$.

Точність, з якою знайдений таким чином розв'язок задачі задовольнятиме початково-крайові умови (14), (15), буде визначатися величиною

$$\min_{y(s)} \Phi = \min_{\bar{u}} \left\| A\bar{u} - \bar{Y} \right\|^2 = \bar{Y}^{\mathrm{T}} \bar{Y} - \bar{Y}^{\mathrm{T}} P_1 P_1^+ \bar{Y}.$$

Однозначним $(\upsilon \equiv 0)$ цей розв'язок буде, коли $\det(A^{\mathrm{T}} A) > 0$.

Випадок дискретно визначених початково-крайових умов та неперервно визначених моделюючих факторів

Якщо розглянутий вище варіант розв'язання початково-крайової задачі (14), (15) при $N = 2$ можна отримати [7] з результатів розв'язання задачі (4)–(6), то постановка та розв'язання розглядуваної нижче задачі для системи (1) неможливі. Особливістю цієї задачі є те, що дискретно визначені початково-крайові зовнішньо-динамічні збурення будуть моделюватися неперервно визначеними (як і для лінійних динамічних систем) моделюючими функціями $u_0(s)\ (s \in S^0)$ та $u_\Gamma(s)$ $(s \in S^\Gamma)$.

Розглядаючи у цьому випадку сформульовану вище задачу (1), (12), (14), (15) знаходження стану $y(s)$ нелінійно визначеної розподіленої просторово-часової системи (1) в обмеженій просторово-часовій області S_0^T, будемо виходити з представлення (16) цієї функції, покладаючи на відміну від (18), (19)

$$y_0(s) = \int\limits_{S^0} \bar{G}(s-s')\bar{u}_0(s')ds', \tag{25}$$

$$y_\Gamma(s) = \int\limits_{S^\Gamma} \bar{G}(s-s')\bar{u}_\Gamma(s')ds'. \tag{26}$$

Тут, як і вище, $\bar{u}_0(s)$ та $\bar{u}_\Gamma(s)$ — нелінійні (аналогічні $\bar{u}(s)$) перетворення моделюючих функцій $u_0(s)\ (s \in S^0)$ та $u_\Gamma(s)\ (s \in S^\Gamma)$.

Зауважимо, що для побудови функції $y(s)$ стану розглядуваної системи не обов'язково виходити на визначення функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$ — для цього достатньо знати їхні нелінійні перетворення $\bar{u}_0(s)$ та $\bar{u}_\Gamma(s)$.

Для знаходження функцій $\bar{u}_0(s)$ та $\bar{u}_\Gamma(s)$ виконаємо підстановку (16) з урахуванням (17) та (25), (26) у систему початково-крайових співвідношень (14), (15). У результаті, як і при моделюванні динаміки лінійних систем [3], отримаємо лінійне інтегральне рівняння вигляду

$$\int\limits_{(\cdot)} A(s)\bar{\bar{u}}(s)ds = \bar{Y}. \tag{27}$$

Тут і далі $(\cdot)$ — інтегрування по області зміни аргументу s моделюючої вектор-функції

$$\bar{\bar{u}}(s) = \mathrm{col}(\bar{u}_0(s)\ (s \in S^0),\ \bar{u}_\Gamma(s)\ (s \in S^\Gamma)) \tag{28}$$

та матричної функції

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s)\ (s \in S^0) & A_{12}(s)\ (s \in S^\Gamma) \\ A_{21}(s)\ (s \in S^0) & A_{22}(s)\ (s \in S^\Gamma) \end{pmatrix} \tag{29}$$

при

$$A_{1i}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)\bar{G}(s-s')\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},\ l = \overline{1, L_0}),\ r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{2i}(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\bar{G}(s-s')\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ l = \overline{1, L_\Gamma}),\ r = \overline{1, R_\Gamma}),$$

($s' \in S^0$ при $i = 1$ та $s' \in S^\Gamma$ при $i = 2$) та $\bar{Y}$, визначеному в (20).

 ISSN 2786-6491

Середньоквадратично обертаючи (останнє випливає з критерію (12) розв'язання задачі) систему (27), отримаємо

$$\bar{\bar{u}}(s) = A^{\mathrm{T}}(s) P^{+} (\bar{Y} - A_{\upsilon}) + \upsilon(s) \tag{30}$$

за довільної інтегрованої в області зміни аргументів вектор-функції

$$\upsilon(s) = \mathrm{col}(\upsilon_0(s)\,(s \in S^0),\ \upsilon_\Gamma(s)\,(s \in S^\Gamma))$$

та

$$P = \int A(s) A^{\mathrm{T}}(s) ds = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

$$A_\upsilon = \int A(s)\upsilon(s) ds = \begin{pmatrix} A_{\upsilon 0} \\ A_{\upsilon \Gamma} \end{pmatrix}.$$

При цьому з урахуванням визначення (29) матричної функції $A(s)$ маємо

$$P_{ij} = \int\limits_{S^0} A_{i1}(s) A_{j1}^T(s) ds + \int\limits_{S^\Gamma} A_{i2}(s) A_{j2}^T(s) ds \quad (i, j = \overline{1,2}),$$

$$A_{\upsilon 0} = \int\limits_{S^0} A_{11}(s)\upsilon_0(s) ds + \int\limits_{S^\Gamma} A_{12}(s)\upsilon_\Gamma(s) ds,$$

$$A_{\upsilon \Gamma} = \int\limits_{S^0} A_{21}(s)\upsilon_0(s) ds + \int\limits_{S^\Gamma} A_{22}(s)\upsilon_\Gamma(s) ds.$$

З огляду на визначення (28) вектор-функції $\bar{\bar{u}}(s)$ з (30) знаходимо потрібні для побудови розв'язку (16) нелінійні перетворення $\bar{u}_0(s)$ та $\bar{u}_\Gamma(s)$ моделюючих функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$:

$$\bar{u}_0(s) = (A_{11}^T(s),\ A_{21}^T(s)) P_1^{+} (\bar{Y} - A_\upsilon) + \upsilon_0(s), \tag{31}$$

$$\bar{u}_\Gamma(s) = (A_{12}^T(s),\ A_{22}^T(s)) P_1^{+} (\bar{Y} - A_\upsilon) + \upsilon_\Gamma(s). \tag{32}$$

Згідно з (16)–(19) з використанням (31), (32) нема проблем знайти і функцію $y(s)$ стану розглядуваної системи. Точність, з якою знайдена таким чином функція $y(s)$ задовольнятиме початково-крайові умови (14), (15), як і вище, визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} \Phi = \min_{\bar{u}} \left\| A\bar{u} - \bar{Y} \right\|^2 = \bar{Y}^{\mathrm{T}}\bar{Y} - \bar{Y}^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{+} \bar{Y}.$$

Визначення (31), (32) моделюючих функцій $\bar{u}_0(s)$ та $\bar{u}_\Gamma(s)$, як і знайденого через них розв'язку $y(s)$, будуть однозначними $(\upsilon_0(s) = \upsilon_\Gamma(s) \equiv 0)$, якщо

$$\lim_{N \to \infty} \det[A^{\mathrm{T}}(s_i) A(s_j)]_{i,\, j=1}^{i,\, j=N} > 0$$

за довільних $s_i\ (i = \overline{1, N})$ та $s_j\ (j = \overline{1, N})$ з області визначення аргументу s матричної функції $A(s)$.

Випадок неперервно визначених початково-крайових умов

Дослідження динаміки системи (1) буде неповним, якщо не буде побудовано функцію $y(s)$ стану системи для випадку неперервно спостережуваних початково-крайових збурень.

Як і в [7], ці умови визначимо співвідношеннями

$$L_r^0(\partial_t)\,y(s)\big|_{t=0}=Y_r^0(x)\ \ (x\in S^0,\ r=\overline{1,R_0}),\tag{33}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s\in\Gamma\times[0,T]}=Y_\rho^\Gamma(s)\ \ (\rho=\overline{1,R_\Gamma}).\tag{34}$$

Для побудови функції $y(s)$, яка середньоквадратично задовольняла б умови (33), (34), як і вище, будемо виходити з представлення $y(s)$ у вигляді (16)–(19). Вектори $\bar u_0$ та $\bar u_\Gamma$ значень $\bar u_{0m}$ $(m=\overline{1,M_0})$ та $\bar u_{\Gamma m}$ $(m=\overline{1,M_r})$ нелінійно перетворених [7] моделюючих функцій $u_0(s)$ $(s\in S^0)$ та $u_\Gamma(s)$ $(s\in S^\Gamma)$ знайдемо з системи рівнянь, які отримаємо після підстановки (16)–(19) в (33), (34). Ці рівняння, як і при розв'язанні задач моделювання лінійних динамічних систем [3], зводяться до системи лінійних функціональних рівнянь вигляду

$$B(s)\bar{\bar u}=\bar Y(s),\tag{35}$$

де

$$\bar{\bar u}=\mathrm{col}(\bar u_0,\bar u_\Gamma),$$

$$\bar Y(s)=\mathrm{col}(Y_0(x)\ \ (x\in S_0),\ Y_\Gamma(s)\ \ (s\in\Gamma\times[0,T])),$$

$$B(s)=\begin{pmatrix} B_{11}(x)\ (x\in S_0) & B_{12}(x)\ (x\in S_0)\\ B_{21}(s)\ (s\in\Gamma\times[0,T]) & B_{22}(s)\ (s\in\Gamma\times[0,T])\end{pmatrix}$$

при

$$Y_0(x)=\mathrm{col}((Y_r^0(x)-L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{t=0}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$Y_\Gamma(s)=\mathrm{col}((Y_\rho^\Gamma(s)-L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$B_{11}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\bar G(s-s_m^0)\Big|_{t=0},\ m=\overline{1,M_0}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$B_{12}(x)=\mathrm{col}(\mathrm{str}\,(L_r^0(\partial_t)\bar G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{t=0},\ m=\overline{1,M_\Gamma}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$B_{21}(s)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\bar G(s-s_m^0),\ m=\overline{1,M_0}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$B_{22}(s)=\mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)\bar G(s-s_m^\Gamma),\ m=\overline{1,M_\Gamma}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}).$$

Зважаючи на те, що вимога (12) по середньоквадратичному виконанню умов (33), (34) еквівалентна середньоквадратичному критерію розв'язання рівняння (35), знайдемо

$$\bar{\bar u}=\arg\min_{u\in R^{M_0+M_\Gamma}}\left\|\int_{(\cdot)}B(s)u-\bar Y(s)ds\right\|^2.\tag{36}$$

Зауважимо, що інтегрування тут, як і далі, ведеться по області зміни аргументу s підінтегральної функції.

 ISSN 2786-6491

Розв'язком (35), знайденим згідно з (36), буде

$$\bar{\bar{u}} = P^{+}B_Y + \upsilon - P^{+}P\upsilon \tag{37}$$

за $(M_0 + M_\Gamma)$-вимірного вектора υ та

$$P = \int_{(\bullet)} B^{\mathrm{T}}(s)B(s)ds = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_Y = \int_{(\bullet)} B^{\mathrm{T}}(s)\bar{Y}(s)ds = \begin{pmatrix} B_{Y1} \\ B_{Y2} \end{pmatrix},$$

де за визначених вище матричної та векторної функцій $B(s)$ та $\bar{Y}(s)$

$$P_{ij} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x)B_{1j}(x)dx + \int_{\Gamma\times[0,T]} B_{2i}^T(s)B_{2j}(s)ds,$$

$$B_{Yi} = \int_{S_0} B_{1i}^T(x)Y_0(x)dx + \int_{\Gamma\times[0,T]} B_{2i}^T(s)Y_\Gamma(s)ds$$

для $i,\ j = \overline{1,2}.$

Позначивши

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{pmatrix} = P^{+}, \quad \begin{pmatrix} \upsilon_0 \in R^{M_0} \\ \upsilon_r \in R^{M_\Gamma} \end{pmatrix} = \upsilon,$$

із співвідношення (37) знаходимо вектори

$$\bar{u}_0 = (Q_{11}, Q_{12})(B_Y - P\upsilon) + \upsilon_0, \tag{38}$$

$$\bar{u}_\Gamma = (Q_{21}, Q_{22})(B_Y - P\upsilon) + \upsilon_\Gamma \tag{39}$$

значень $\bar{u}_{0m}\ (m = \overline{1, M_0})$ та $\bar{u}_{\Gamma m}\ (m = \overline{1, M_\Gamma})$, через які співвідношеннями (18) та (19) знаходяться компоненти $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функції $y(s)$ стану розглядуваної системи. Останнє, зважаючи на те, що $y_\infty(s)$ — відома функція, дозволяє знайти функцію стану $y(s)$, а отже, і закінчити розв'язання задачі.

Точність, з якою знайдена таким чином $y(s)$ задовольнятиме початково-крайові умови (33) та (34), визначатиметься величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{\bar{\bar{u}}} \left\| \int_{(\bullet)} (B(s)\bar{\bar{u}} - \bar{Y}(s))ds \right\|^2 = Y^2 - B_Y^T P^{+} B_Y$$

при

$$Y^2 = \int_{S^0} Y_0^T(x)Y_0(x)dx + \int_{\Gamma\times[0,T]} Y_\Gamma^T(s)Y_\Gamma(s)ds.$$

Однозначність $(\upsilon \equiv 0)$ розв'язання задачі буде визначатися умовою $\det P > 0.$

Насамкінець зауважимо, що і в цьому випадку алгоритм розв'язання задачі та розрахункові формули алгоритму повторюють алгоритм та розрахункові формули, отримані [3] при розв'язанні задач математичного моделювання динаміки лінійно розподілених просторово-часових систем. Зокрема, матимуть місце і розглянуті там аналоги частинних випадків моделювання динаміки лінійних систем.

З використанням математичних результатів з розв'язання сформульованих в [3] задач нижче реферативно наведемо розв'язки задач моделювання динаміки системи (1) в усталеному часовому режимі та необмеженій просторовій області.

Усталений режим динаміки

Розглянемо особливості побудови функції $y(s)$ стану динамічної системи (1) для випадку, коли початковими збуреннями $Y_r^0(x)$ $(x \in S_0)$ та Y_{rl}^0 $(l = \overline{1, L_0}$, $r = \overline{1, R_0})$, які фігурують в початкових умовах (2), (4), можна знехтувати.

У цьому випадку умови (14) та (33), які враховувалися при розв'язанні сформульованих вище задач, відсутні. У представленні (16) функції $y(s)$ стану системи відсутньою буде і складова $y_0(s)$. Останнє означає, що стан досліджуваної системи визначатиметься функцією

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s), \tag{40}$$

складова $y_\infty(s)$ якої відповідає розподіленому просторово-часовому збуренню $u(s)$ і описується згідно з (17), а $y_\Gamma(s)$ залежно від постановки задачі представляється співвідношенням (19) або (26).

При побудові функції $y(s)$ стану системи (1), яка функціонує в обмеженій просторово-часовій області S_0 з дискретно (згідно з (15)) спостережуваною динамікою її контуру Γ, складова $y_\Gamma(s)$ функції (40) може мати як представлення (19), так і (26). Значення $\bar{u}_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$ моделюючої функції $\bar{u}_\Gamma(s)$, як і сама функція, згідно з (24), (32) визначатимуться співвідношеннями

$$\bar{u}_\Gamma = A_{22}^T P_1^+ (Y_\Gamma - A_{22} \upsilon_\Gamma) + \upsilon_\Gamma \forall \upsilon_\Gamma \in R^{M_\Gamma}, \tag{41}$$

$$\bar{u}_\Gamma(s) = A_{22}^T(s) P_2^+ (Y_\Gamma - A_\upsilon) + \upsilon_\Gamma(s), \tag{42}$$

в яких υ_Γ та $\upsilon_\Gamma(s)$ — довільні M_Γ-вимірні вектор та інтегрована в S^Γ функція,

$$P_1 = A_{22} A_{22}^T,\ P_2 = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s) A_{22}^T(s) ds,\quad A_\upsilon = \int_{S^\Gamma} A_{22}(s) \upsilon_\Gamma(s) ds,$$

а інші позначення співпадають з прийнятими в (24) та (32) відповідно. Зауважимо, що вектор υ_Γ та функція $\upsilon_\Gamma(s)$ у співвідношеннях (41) та (42) будуть відсутні, якщо $\det(A_{22}^T, A_{22}) > 0$ та $\lim\limits_{N \to \infty} \det[A_{22}^T(s_i) A_{22}(s_j)]_{i,\, j=1}^{i,\, j=N} > 0$ відповідно.

Точність математичного моделювання крайових умов (15) для кожного з варіантів розв'язання задачі визначатиметься величинами

$$\varepsilon_i^2 = \min_{y(s)} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_s) y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 = Y_\Gamma^T Y_\Gamma - Y_\Gamma^T P_i P_i^+ Y_\Gamma \quad (i = \overline{1, 2}).$$

Останнє дозволяє побудувати функцію $y(s)$ стану розглядуваної системи для цього усталеного випадку динаміки, яка (як було сказано вище) за середньоквадратичним критерієм моделюватиме дискретно визначені крайові збурюючі фактори $Y_{\rho l}^\Gamma$ $(l = \overline{1, L_0}, \rho = \overline{1, R_\Gamma})$.

 ISSN 2786-6491

Для випадку, коли динаміка системи (1), яка проходить в усталеному режимі, супроводжується збуреннями $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$, розподіленими на контурі Γ просторової області S_0, складова $y_\Gamma(s)$ функції стану (40) визначатиметься тільки згідно з (19). При цьому, на відміну від сказаного вище, значення $\bar{u}_{\Gamma m}$ $(m=\overline{1,M_\Gamma})$ моделюючої функції $\bar{u}_\Gamma(s)$ визначатимуться (див. (39)) співвідношенням

$$\bar{u}_\Gamma=(Q_{21},Q_{22})(B_Y-P\upsilon_\Gamma)+\upsilon_\Gamma,$$

у якому, як і вище, υ_Γ — довільний M_Γ-вимірний вектор, а

$$P=\int\limits_{S^\Gamma}A_{22}^T(s)A_{22}(s)ds,$$

$$B_Y=\int\limits_{\Gamma\times[0,T]}A_{22}^TY_\Gamma(s)ds.$$

Знайдений згідно з (40) розв'язок задачі з точністю

$$\varepsilon^2=\min_{y(s)}\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int\limits_{\Gamma\times[0,T]}(L_\rho^\Gamma(\partial_t)y(s)-Y_\rho^\Gamma(x,t))^2ds=\int\limits_{\Gamma\times[0,T]}Y_\Gamma^T(s)Y_\Gamma(s)ds-B_Y^TP^+B_Y$$

задовольнятиме крайові спостереження (34) і може бути однозначним, якщо $\det P>0$.

Випадок необмеженої просторової області

Наведемо, ґрунтуючись на математичних результатах, отриманих вище, розв'язок задачі математичного моделювання динаміки системи (1) для випадку, коли впливом крайових збурюючих факторів $Y_{\rho l}^\Gamma$ та $Y_\rho^\Gamma(s)$ $(l=\overline{1,L_\Gamma},\ \ s\in\Gamma\times[0,T],$ $\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ на стан $y(s)$ $(s\in S_0^T)$ системи можна знехтувати.

Останнє означає, що при дослідженні динаміки розглядуваної системи до уваги можна не брати і крайові співвідношення (15) та (34). За цих умов відсутньою буде і складова $y_\Gamma(s)$ функції $y(s)$ стану системи в (16).

Функція $y(s)$ стану досліджуваної системи у цьому випадку визначатиметься співвідношенням

$$y(s)=y_\infty(s)+y_0(s), \tag{43}$$

складова $y_0(s)$ якого матиме вигляд (18) або (25) за $y_\infty(s)$, визначеного згідно з (17).

Для випадку, коли динаміка системи (1) супроводжується дискретно визначеними збурюючими факторами Y_{rl}^0 $(l=\overline{1,L_0},\ r=\overline{1,R_0})$, для складової $y_0(s)$ допускається як представлення (18), так і (25). Значення $\bar{u}_{0m}$ $(m=\overline{1,M_0})$ моделюючої функції $\bar{u}_0(s)$, які фігурують в (18), згідно з (23) визначатимуться співвідношенням

$$\operatorname{col}(u_{0m},m=\overline{1,M_0})=A_{11}^TP_1^+(Y_0-A_{11}\upsilon_0)+\upsilon_0,$$

у якому υ_0 — довільний M_0-вимірний вектор, матриця A_{11} та вектор Y_0 співпадають з визначеними в (23), а $P_1 = A_{11}A_{11}^T$. Зауважимо при цьому, що $\upsilon_0 \equiv 0$ при $\det A_{11}^T A_{11} > 0,$ а

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 = Y_0^T Y_0 - Y_0^T P_1 P_1^+ Y_0.$$

Значення функції $\bar{u}_0(s)$, яка фігурує в (25), отримаємо з (31). При цьому в рамках прийнятих там позначень та при

$$P = \int_{S^0} A_{11}^T(s) A_{11}(s) ds,$$

$$A_\upsilon = \int_{S^0} A_{11}^T(s) \upsilon_0(s) ds$$

($\upsilon_0(s)$ — довільна інтегрована в S^0 функція)

$$\bar{u}_0(s) = A_{11}^T(s) P^+ (Y_0 - A_\upsilon) + \upsilon_0(s). \tag{44}$$

Знайдена згідно з (43) (з урахуванням (44)) функція $y(s)$ буде такою, що

$$\min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 = Y_0^T Y_0 - Y_0^T P P^+ Y_0,$$

а $\upsilon_0(s) \equiv 0$, якщо $\lim_{N\to\infty} \det [A_{11}^T(s_i) A_{11}(s_j)]_{i,\, j=1}^{i,\, j=N} > 0.$

Якщо динаміка розглядуваної системи супроводжується неперервно визначеними початковими збуреннями $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0}),$ то складова $y_0(s)$ функції (43) визначатиметься згідно з (18). При цьому компоненти $\bar{u}_{0m}$ $(m = \overline{1, M_0})$ вектора $\bar{u}_0,$ яким початковий стан системи моделюється за середньоквадратичним критерієм, будуть визначатися співвідношенням (38) так, що

$$\mathrm{col}(u_{0m}, m = \overline{1, M_0}) = P^+(B_Y - P\upsilon_0) + \upsilon_0 \tag{45}$$

при довільному M_0-вимірному векторі $\upsilon_0,$

$$P = \int_{S^\Gamma} B_{11}^T(x) B_{11}(x) dx,$$

$$B_Y = \int_{S^0} B_{11}^T(x) Y_0(x) dx$$

та $B_{11}(x),$ визначеному в (35).

Побудований з урахуванням (45) розв'язок задачі — функція $y(s)$ — буде однозначним $(\upsilon_0 \equiv 0),$ якщо $\det P > 0.$ Точність цього розв'язку визначатиметься величиною

ISSN 2786-6491

$$\varepsilon_i^2 = \min_{y(s)} \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{S_0} (L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{t=0} - Y_r^0(x))^2 dx = \int_{Y_0} Y_0^T(x) Y_0(x) dx - B_Y^T P^+ B_Y .$$

Таким чином, для системи (1) і для цього виродженого за крайовими умовами випадку її функціонування згідно з (43) можна побудувати функцію стану $y(s)$.

Висновок

У роботі для одного досить універсального класу квадратично нелінійних динамічних систем, який є частинним випадком неповно визначених нелінійних просторово розподілених динамічних систем, досліджених раніше, і має самостійне застосування в практиці, сформульовано і розв'язано задачі побудови функції стану, яка, будучи розв'язком диференціальної моделі системи, з початково-крайовими спостереженнями за нею узгоджується за середньоквадратичним критерієм. Вихідним при цьому є те, що динаміка системи описується диференціальним рівнянням, лінійна та нелінійна частини якого будуються через лінійні диференціальні перетворення функції стану. Розглянуто випадки дискретно та неперервно визначених гранично-початкових спостережень за системою. Особливістю постановок розглядуваних задач є відсутність обмежень на кількість та характер таких спостережень. Для кожної задачі побудовано досить прості і доступні для практичної реалізації розрахункові формули для визначення множини допустимих розв'язків. Зроблено оцінки точності та сформульовано умови однозначності отриманих множин. Визначено особливості динаміки розглядуваного класу систем для випадків, коли початковими та крайовими зовнішньо-динамічними збуреннями можна знехтувати.

V. Stoyan

ON MATHEMATICAL MODELING PECULIARITIES OF ROOT SQUARE SPECIFIED LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

Volodymyr Stoyan

Taras Shevchenko Kyiv National University,

v_a_stoyan@ukr.net

Spatially distributed dynamical systems are considered, linear and quadratically nonlinear parts of mathematical models, which are constructed with the help of linear differential transformations of a state function. Problems of forecasting the system's dynamics are set and solved if initial-boundary observations of the latter state are available. Observations can be either continuously or discretely defined. The nature of observations is determined functionally through linear differential operators of arbitrary order, structure and quantity. Observed system's characteristics are modeled discretely and continuously defined by modeling functions, numerical values and analytics of which out the boundaries of the considered spatial-temporal domain of the researching system functioning are found in the result of constructing a root-mean-square approximation to the solutions of linear algebraic, integral and functional equations. The obtained mathematical results are researched

for accuracy and unambiguousness. Calculation formulas, which determine the set of admissible solutions of the considered problems are quite simple and accessible for computer implementation. Defined researching peculiarities of the considered class systems for the cases when the initial and boundary external-dynamical perturbations can be neglected and system dynamics can be considered in unlimited spatial and temporal domains.

Keywords: nonlinear dynamical systems, systems with uncertainties, systems with distributed parameters, spatially distributed systems, pseudosolutions, incorrect initial boundary problems.

ПОСИЛАННЯ

1. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев : Наук. думка, 1991. 432 с.
2. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ : Наук. думка, 2005. 282 с.
3. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.
4. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. I. Випадок дискретно визначених початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. № 5. С. 84–97. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-021-00399-x
5. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. II. Випадок неперервно визначених початково-крайових зовнішньо-динамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. № 6. С. 72–83. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-021-00417-y
6. Стоян В.А Математичне моделювання стану динамічних мультиплікативно нелінійних систем. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. № 4. С. 117–128. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-022-00493-8
7. Стоян В.А. Математичне моделювання просторово розподілених систем, поліноміально залежних від лінійних диференціальних перетворень функції стану. *Кібернетика та системний аналіз*. 2023. № 2. С. 136–145. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-023-00563-5
8. Стоян В.А. Псевдообращение математических моделей распределенных дифференциальных систем с аддитивно определенной нелинейностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2021. № 1. С. 77–93. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-021-00330-4
9. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.

Отримано 16.02.2024