

КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.6, 539.3

Б.Є. Панченко, М.В. Северин

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФРАКЦІЇ ПЛОСКИХ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ НА ЖОРСТКОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ВКЛЮЧЕННІ ДОВІЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Панченко Борис Євгенович

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
<https://orcid.org/0000-0002-8085-4043>

pr-bob@ukr.net

Северин Миколай Володимирович

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, м. Одеса,
<https://orcid.org/0000-0002-2706-5205>

n_severin1@ukr.net

Запропоновано нову математичну модель, засновану на методі сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено крайову задачу про дифракцію плоских пружних стаціонарних хвиль на жорсткому циліндричному включенні довільного поперечного перерізу, розташованому в нескінченному ізотропному середовищі. Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь вирішується чисельно шляхом механічних квадратур. Використано додаткові умови у інтегральній формі. Для підвищення точності результатів застосовано метод розпаралелювання алгоритму. Проводиться аналіз напружено-деформованого стану границі включення. Досліджено вплив форми контуру включення — проведено порівняння результатів для еліптичної та ромбічної форм. З'ясовано, що для різних типів хвиль, які взаємодіють з різними формами границі включення, є принципова відмінність у розподілі контурних напружень при набіганні на жорстке включення хвилі розширення-стиснення (*P*-випадок) чи хвилі зсуву (*SV*-випадок). У *P*-випадку для еліптичної чи ромбічної форми нормальне контурне напруження досягає локальних максимумів в лобовій та тіньовій точках відповідно. У *SV*-випадку також для обох форм контуру нормальне напруження у цих точках дорівнює нулю і досягає максимуму в околі точки зісковзування. Дотичне напруження в *P*-випадку в лобовій і тіньовій точках дорівнює нулю, а його максимум досягається поблизу точки зісковзування. У *SV*-випадку нормальне напруження приймає максимальне значення в лобовій точці і має локальний максимум поблизу точки зісковзування. При збільшенні параметра відносної щільності включення спостерігається збільшення нормального напруження у *P*-випадку та дотичного — у *SV*-випадку поблизу лобової точки та їх зменшення в околі

тіньової точки. А максимум дотичного напруження у *P*-випадку та нормального у *SV*-випадку зміщується з тіньової області в освітлену. Крім того, у *P*-випадку переважає нормальне напруження, а значення параметра відносної щільності практично не впливає на значення цього напруження в точці зісковзування. При цьому спостерігається значний вплив форми границі передусім на амплітудні значення.

Ключові слова: плоскі гармонічні хвилі, дифракція, сингулярні інтегральні рівняння, чисельний експеримент, жорстке включення.

Вступ

Динамічні задачі математичної фізики для кругових циліндрів різної природи розглянуті в [1]. Дифракція плоских гармонічних хвиль на еліптичній порожнині досліджена в [2]. У разі відбивачів складної геометричної форми ефективний метод інтегральних рівнянь [3, 4], яким у [4] вперше досліджено плоску динамічну задачу про коливання ізотропного середовища з пружним включенням довільного поперечного перерізу. У [5] метод розвинений для системи жорстких нерухомих включень, а у даній роботі він поширюється на випадок жорсткого («рухомого», проте абсолютно жорсткого) циліндричного включення довільного поперечного перерізу.

Ця крайова задача математичної фізики виникає як окрема та тестова, коли відносна «пружність» матриці та армуючих матеріалів для техніки або конкретцій для геодезичної розвідки [6] є значною: $\mu_0 / \mu \gg 10$, де μ_0 — модуль зсуву включення, а μ — матриці. Адже в [4] зазначено, що запропонований там алгоритм моделювання дифракції плоских пружних хвиль завдяки варіантності вихідних параметрів має властивість не лише теоретичного, а й чисельного розв’язання окремих випадків, коли відбивачами є отвори [7, 8], нерухомі [5, 9] або рухомі абсолютно жорсткі включення [3].

Постановка задачі

Розглянемо у необмеженому ізотропному середовищі з коефіцієнтами Ламе λ, μ та щільністю ρ нескінченно довгий вздовж осі Ox_3 циліндр, поперечний переріз якого обмежений замкненим контуром L типу Ляпунова. Передбачається, що циліндр є абсолютно жорстким тілом зі щільністю ρ_0 . У середовищі, перпендикулярно до осі циліндра, поширюється гармонійна (залежність від часу виражається множителем $e^{-i\omega t}$) хвиля розширення-стиснення (*P*-випадок)

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad \tau_1 = \text{const} \quad (1)$$

або хвиля зсуву (*SV*-випадок)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \tau_2 = \text{const}, \quad (2)$$

де c_1 і c_2 — швидкості поздовжньої та поперечної хвиль у матриці, ω — частота коливань, $i^2 = -1$.

При взаємодії зі включенням хвиля, що набігає, породжує відбиті поздовжні та поперечні хвилі. Їхня сукупність зумовлює напружено-деформований стан середовища, який потрібно визначити. Відповідно до принципу суперпозиції [1, 2] загальне поле амплітуд переміщень і компонент тензора напружень будемо шукати у вигляді

$$U_n = U_n^{(0)} + U_n^{(1)}, \quad \tau_{mn} = \tau_{mn}^{(0)} + \tau_{mn}^{(1)}, \quad (3)$$

$$\tau_{mn} = \lambda \delta_{mn} (U_{1,1} + U_{2,2}) + \mu (U_{m,n} + U_{n,m}), \quad m, n = 1, 2,$$

де $U_n^{(0)}, \tau_{mn}^{(0)}$ та $U_n^{(1)}, \tau_{mn}^{(1)}$ — амплітуди компонент вектора переміщень та тензора напружень падаючого і відбитого хвильових полів відповідно, δ_{mn} — символ Кронекера.

Відбите поле переміщень повинно задовольняти умову випромінювання на нескінченності, а також рівняння руху [1]. Крім того, на поверхні жорсткого включення повинні виконуватися граничні умови:

$$U_1 = B_1 - \omega_0 \eta, \quad U_2 = B_2 + \omega_0 \xi, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad (4)$$

де B_1, B_2 та ω_0 — амплітуди поступального руху та жорсткого повороту включення.

Метод дослідження

Представлення амплітуд переміщень відбитого хвильового поля будемо шукати у вигляді потенціалів типу простого шару [3, 4] (підсумовування $n = 1, 2$)

$$U_k^{(1)}(M) = \int_L V_n^{(k)}(M, P) p_n(s) ds, \quad k = 1, 2, \quad (5)$$

де $p_n(s)$ — невідомі функції, $V_n^{(k)}$ — компоненти матриці Гріна, що являють собою амплітуди переміщень у точці M при дії гармонічної сили, прикладеної у точці $P \in L$ та спрямованої вздовж осі Ox_1 ($k = 1$) або осі Ox_2 ($k = 2$).

Амплітуди переміщень $V_n^{(k)}$ та відповідних компонентів тензора напружень $\sigma_{mn}^{(k)}$ визначаються із співвідношень ($k, m, n = 1, 2$)

$$V_n^{(k)} = (-1)^{n+k} L_{nk} G, \quad \sigma_{mn}^{(k)} = \lambda \delta_{mn} (V_{1,1}^{(k)} + V_{2,2}^{(k)}) + \mu (V_{m,n}^{(k)} + V_{n,m}^{(k)}),$$

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = c \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad c = -\frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad (6)$$

$$G(M, P) = \frac{c}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2},$$

де $H_j^{(1)}(x)$ — функція Ханкеля першого роду j -го порядку, Δ — оператор Лапласа.

При використанні фундаментального рішення $G(M, P)$ для комбінацій переміщень $V_n^{(k)}$ отримуюмо такі вирази:

$$V_1^{(1)} + iV_2^{(2)} = d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - (0, 5 - v) \gamma_2^2 \Phi_{00} \right), \quad V_1^{(2)} = V_2^{(1)},$$

$$e^{2i\alpha} (V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}) = e^{-2i\alpha} (V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}) = \frac{d}{4} \Phi_{22}, \quad d = \frac{i}{4\mu(1-v)},$$

$$\Phi_{lj} = \frac{\gamma_1^l H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^l H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad z - \zeta = re^{i\alpha}, \quad z = x_1 + ix_2, \quad (7)$$

$$\chi = 3 - 4v, \quad v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Аналіз формул (7) показує, що функції $V_1^{(1)} - 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ та $V_1^{(1)} + 2iV_1^{(2)} - V_2^{(2)}$ безперервні в нулі, а функція $V_1^{(1)} + iV_2^{(2)}$ має логарифмічну особливість. Це означає, що задоволення граничних умов (4) зводить крайову задачу до системи інтегральних рівнянь із логарифмічними ядрами, чисельна реалізація

яких є ускладненою. Тому з метою отримання сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами типу Коші граничні умови (4) диференціювалися за дуговою координатою s_0 і записувалися у вигляді

$$\begin{aligned} \left. \frac{d(U_1 + iU_2)}{ds_0} \right|_L &= i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad \left. \frac{d(U_1 - iU_2)}{ds_0} \right|_L = \\ &= -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}, \quad \left. \frac{dW}{ds_0} \right|_L = \left(\frac{\partial W}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

де φ_0 — кут позитивної дотичної до L в точці $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ з віссю Ox_1 , $\bar{z} = x_1 - ix_2$.

Система сингулярних інтегральних рівнянь

В роботах [3, 4] надано методику розв'язання цієї крайової задачі. Задовольняючи граничні умови (8), приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядрами типу Коші (підсумовування для $n = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \int_L B_{mn}(s_0, s) f_n(s) ds - M_m(s_0) \omega_0 &= -N_m(s_0), \quad m = 1, 2; \\ B_{12} &= \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + F_{31}^0 e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\ B_{21} &= \frac{d}{8} \left(-\frac{2}{\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0} + F_{31}^0 e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - F_{33}^0 e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \\ B_{11} = B_{22} &= -d \left(\frac{\chi}{2\pi i} \frac{\cos(\varphi_0 - \alpha_0)}{r_0} + \left(\frac{\chi}{4} F_{31}^0 - (0,5 - \nu) \gamma_2^2 \Phi_{11}^0 \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0) \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_1(s) = p_1(s) + ip_2(s), \quad f_2(s) = p_1(s) - ip_2(s), \quad M_1 = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, \quad M_2 = \bar{M}_1,$$

$$\Phi_{ij}^0 = \frac{\gamma_1^l H_j^{(1)}(\gamma_1 r_0) - \gamma_2^l H_j^{(1)}(\gamma_2 r_0)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad F_{31}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{31}^0, \quad F_{33}^0 = -\frac{2i}{\pi r_0} + \Phi_{33}^0,$$

$N_1 = -N_2 = \gamma_1 \tau_1 e^{-i\gamma_1 \eta_0} \sin \varphi_0$ — для P -хвилі, $N_1 = N_2 = -i\gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} \sin \varphi_0$ — для SV .

Аналіз ядер системи рівнянь (9) показує, що ядра B_{11} та B_{22} є сингулярними, а B_{12} та B_{21} — неперервними.

Необхідні для замикання алгоритму три додаткові умови впливають із законів поступального та обертального рухів абсолютно жорсткого тіла. Для поступального руху за другим законом Ньютона отримуємо

$$\int_L S_1 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_1, \quad \int_L S_2 ds = -\omega^2 \rho_0 S_0 B_2, \quad (10)$$

а рівняння, що описує обертальний рух, запишемо у вигляді

$$\int_L (S_1(\eta - a_2) - S_2(\xi - a_1)) ds = -\omega^2 J_A \omega_0, \quad (11)$$

де S_1 та S_2 — амплітуди компонент вектора напружень на контурі L , S_0 — площа включення, обмеженого контуром L , J_A — момент інерції включення відносно точки $A(a_1, a_2)$, постійні B_1 та B_2 визначаються згідно з (4).

Чисельна реалізація

Для чисельної реалізації алгоритму, як і в [3–5], використовувався метод механічних квадратур [10]. Розглянемо як приклад середовище, що містить жорстке циліндричне включення та має форму еліпса чи ромба зі скругленими кутами [11]:

$$\xi(\beta) = a(\sin\beta - \vartheta \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos\beta + \vartheta \cos 3\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad (12)$$

де при $\vartheta = 0,14036$ контур має форму ромба, а у разі $\vartheta = 0$ — еліптичну форму $\xi = a \sin\beta$, $\eta = -b \cos\beta$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

На границі включення проводилося обчислення безрозмірних напружень

$$\sigma_n = |\tau_n|/P, \quad \sigma_s = |\tau_s|/P, \quad \sigma_{ns} = |\tau_{ns}|/P, \quad (13)$$

де τ_n , τ_{ns} — амплітуди нормального та тангенціального напруження на L , τ_s визначається із співвідношення $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$, $P = \gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ — максимальне напруження в P -хвилі (1), $P = \gamma_2 \tau_2 \mu$ — у разі SV -хвилі (2).

В роботі [3], де також використано метод [4, 5], наведено чисельні результати, які дозволяють перевірити достовірність даного алгоритму. Зазначимо, що при дифракції поздовжньої (1) або поперечної (2) хвилі на жорсткому включенні з граничними умовами (4) та додатковими умовами (10), (11) напруження σ_s завжди менше σ_n і пов'язане з ним співвідношенням $\sigma_s = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_n$.

Треба зауважити, що згідно з рекомендаціями [10] додаткові умови (10), (11) можна моделювати як в будь-якій одній точці контуру, так і в інтегральному вигляді. Проте подальші численні дослідження показали, що при збільшенні значення безрозмірного хвильового числа $\gamma_{1,2}a$ для P - та SV -хвиль спостерігаються суттєві відмінності результатів. Тому використані лише «інтегральні» додаткові умови [10].

На рис. 1, а, б та 2, а, б наведено розподіл напружень σ_n і σ_{ns} вздовж контуру еліптичного жорсткого включення (12) у разі набігання P - та SV -хвиль відповідно при $a/b = 0,5$; $\gamma_1 a = 3,2$; $\nu = 0,3$. Якщо $\lambda_0 = 2\pi/\gamma_1$ — довжина хвилі, що набігає у P -випадку, чи $\lambda_0 = 2\pi/\gamma_2$ — у SV -випадку, то безрозмірні хвильові числа $\gamma_1 a = \gamma_2 a = 3,2$ відповідають параметрам з [3], де для цих випадків $\lambda_0/2a = 1,0$. Як і в [3], криві 1–4 задовольняють значення $\rho_0/\rho = 0,5; 1,0; 2,0$ та $5,0$.

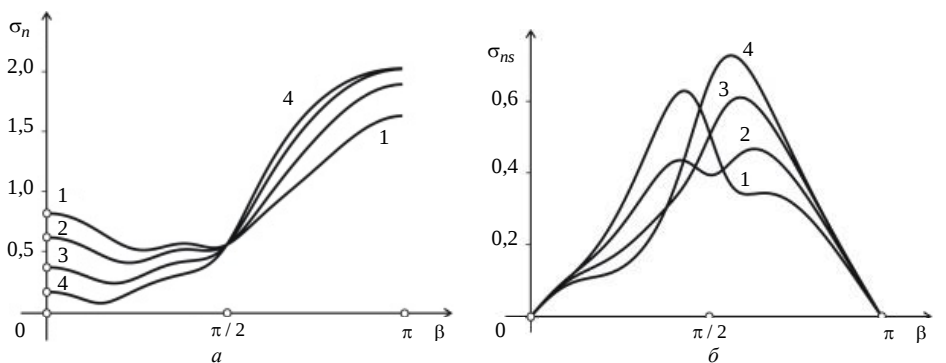


Рис. 1

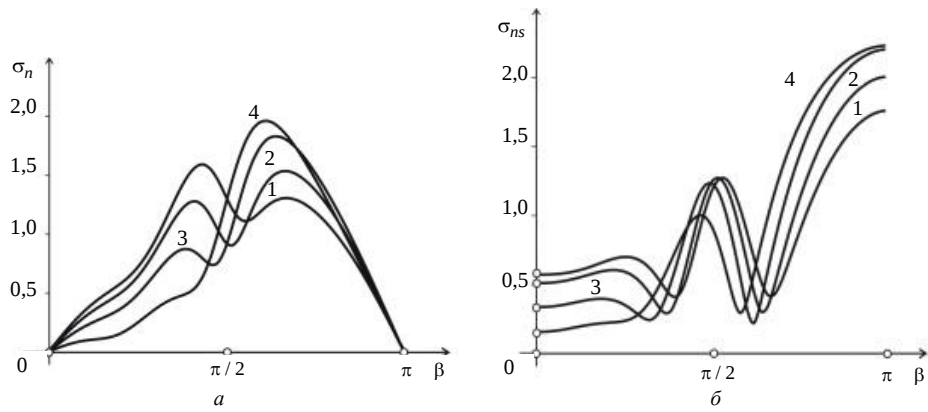


Рис. 2

З метою демонстрації еволюціонування хвильового поля наведемо результати дослідження для включення ромбічної форми. Зазначимо, що такого порівняння в [3] проведено не було.

На рис. 3, а, б та 4, а, б наведено розподіл напружень σ_n і σ_{ns} вздовж контуру ромбічного жорсткого включення (12) у разі набігання P - та SV -хвиль відповідно при $a/b = 0,5$; $\gamma_1 a = 3,2$; $\nu = 0,3$. Тут також $\gamma_1 a = \gamma_2 a = 3,2$, що для порівняння відповідають параметрам з [3]. Як і в [3], криві 1–4 задовольняють значення $\rho_0/\rho = 0,5; 1,0; 2,0; 5,0$. Очевидно, що спостерігається вплив форми контуру не лише на загальний вигляд залежностей, а й на амплітуди значень.

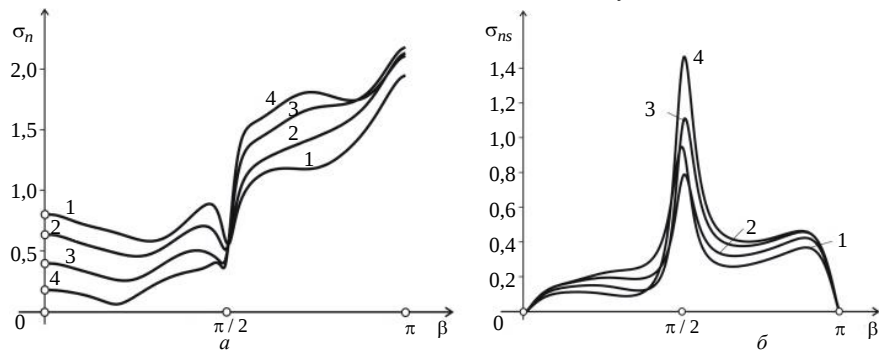


Рис. 3

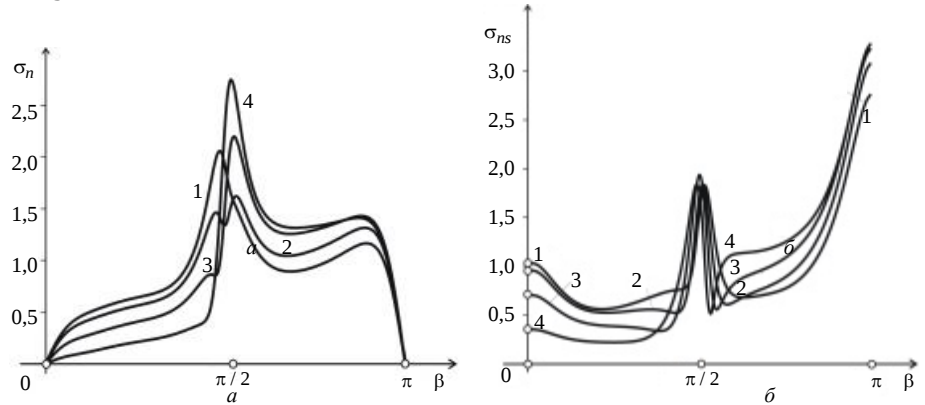


Рис. 4

На рис. 5, а, б, як і в [3], наведено розподіл максимальних контурних напружень σ_n та σ_{ns} у випадку еліптичного включення та P -хвилі залежно від відношення значень щільності включення та матриці ρ_0/ρ при $a/b = 0,5$; $\nu = 0,3$. Криві 1–4 задовольняють значення $\gamma_1 a = 9,6; 6,4; 3,2; 1,3$ (в [3] це $\lambda_0/2a = 1/3; 0,5; 1,0; 2,5$). А на

рис. 6, а, б наведено розподіл максимальних контурних напружень σ_n та σ_{ns} у випадку ромбічного включення та P -хвилі залежно від тих самих параметрів, що і на рис. 5.

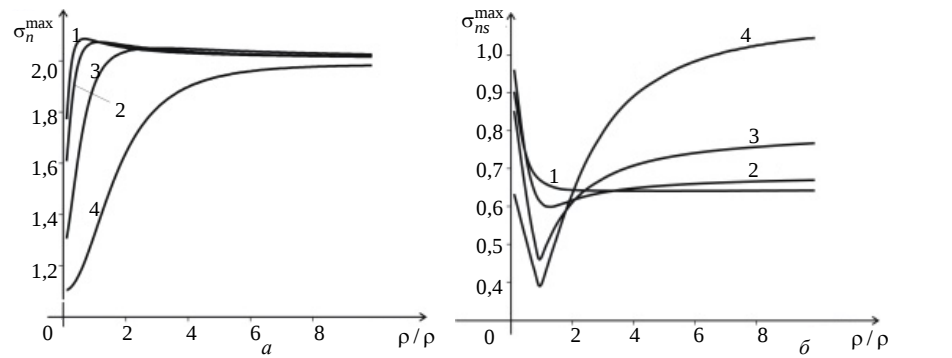


Рис. 5

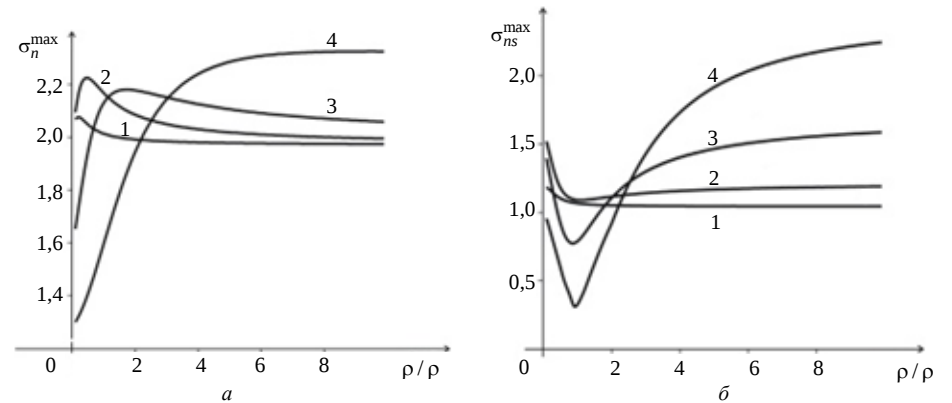


Рис. 6

Як видно, всі наведені для порівняння з [3] залежності отримані з використанням нового алгоритму. Повний збіг репрезентованих результатів з відповідними результатами роботи [3] показує достовірність застосованих алгоритмів. Нижче наведені залежності параметрів поля напружень від безрозмірного хвильового числа $\gamma_{1,2}a$, тобто частоти коливань. Для дослідження питання вірогідності руйнування матеріалу з ускладненими властивостями, наприклад, коли включення є армуючим матеріалом, цей показник більш важливий. В [3] його не досліджено.

На рис. 7–10 наведено залежності максимальних контурних напружень на контурі еліптичного (рис. 7 та 8) та ромбічного (рис. 9 та 10) включень від безрозмірного хвильового числа $\gamma_{1,2}a$ для P - та SV -хвиль відповідно. Скрізь криві 1–4 відповідають значенням $a/b=0,5$; $\nu=0,3$ та $\rho_0/\rho=1,0$; 2,0; 3,0; 5,0.

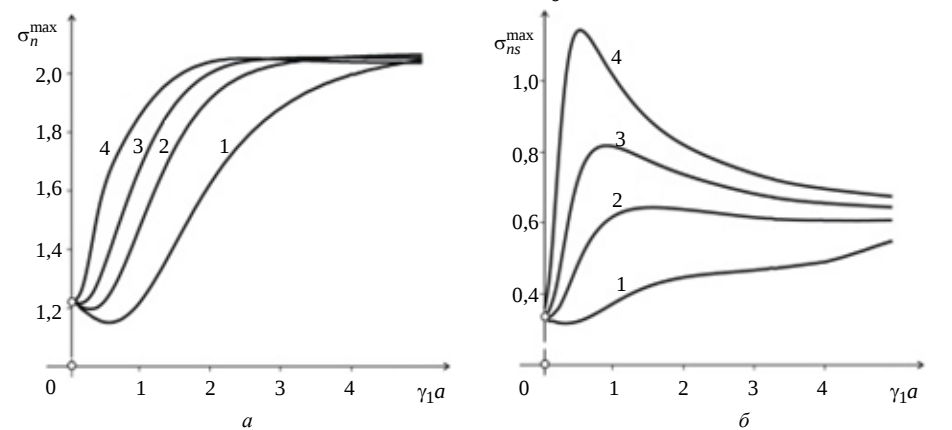


Рис. 7

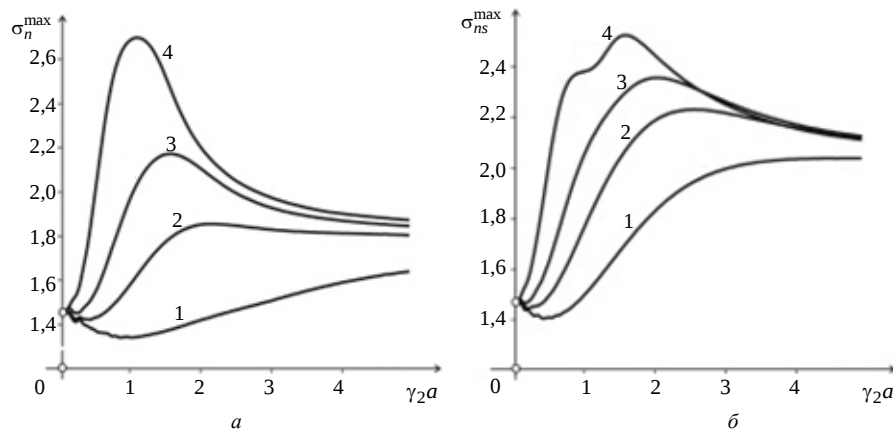


Рис. 8

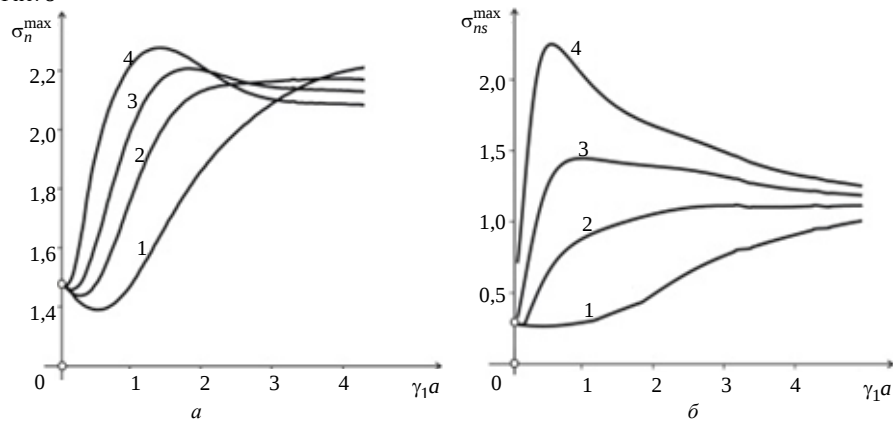


Рис. 9

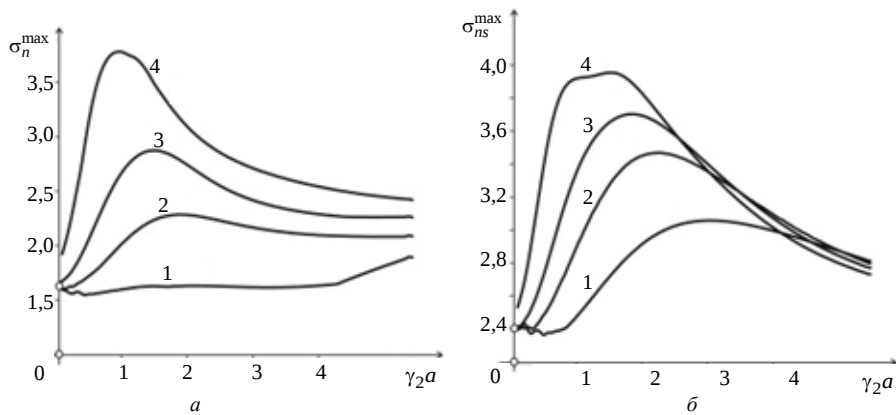


Рис. 10

Треба зазначити, що при подальшому збільшенні значення хвильових чисел спостерігається явище, яке можна було б назвати «резонансом». Проте спростування описано в [12, с. 298], де зазначено, що внутрішня задача поширення гармонічної хвилі має єдине рішення, якщо частота коливань не дорівнює одному з власних значень системи. Існують, однак, споріднені труднощі у разі відповідної зовнішньої граничної задачі, хоча рівняння, що моделює її, задовольняє умови регулярності та випромінювання на нескінченності. Є нескінченна послідовність значень частот, що збігаються з відповідними «резонансними» хвильовими числами або власними значеннями відповідної внутрішньої задачі, при яких це рівняння має безліч розв'язків. Тому розв'язання

зовнішніх задач Діріхле або Неймана не матиме успіху при хвильових числах, що відповідають власним значенням відповідних внутрішніх задач. Проте це не фізична складність, властива зовнішній задачі, оскільки у зовнішніх задачах не існує власних значень. Проблема повністю обумовлена формулюванням задачі через граничні інтеграли.

В контексті цього пояснення описану задачу можна було б віднести до «зовнішньо-внутрішніх», адже дослідження проведено саме на границі різних середовищ, коли існують не лише ті хвилі, що набігають, а й такі, що розповсюджуються у включенні, в якому відбиваються від границі. Завдяки абсолютній жорсткості включення хвильові числа мають значення поблизу нуля, тому при збільшенні значень хвильових чисел «резонансними» явищами треба нехтувати або застосувати уточнювальні методи з [12].

Наведена задача, як зазначено у вступі, є окремим випадком задачі про дифракцію гармонічних пружних хвиль на пружному включенні довільної форми [4]. Перспективним видається відокремлення у ній внутрішньої задачі, коли контур є джерелом коливань, а хвилі, що розповсюджуються у включенні, мають хвильові числа, далекі від нуля. Але це питання подальших досліджень.

Висновок

При порівнянні результатів для різних типів хвиль, що взаємодіють з різними формами границі включення, можна зробити висновок, що є принципова відмінність у розподілі контурних напружень при набіганні на жорстке включення хвилі розширення-стиснення (1) чи зсуву (2).

У P -випадку для обох форм контуру напруження σ_n досягає локальних максимумів в лобовій $\beta = 180^\circ$ та тіньовій $\beta = 0^\circ$ точках відповідно. У SV -випадку також для обох форм контуру напруження σ_n у цих точках дорівнюють нулю і досягають максимуму в околі точки зісковзування ($\beta = 90^\circ$). Напруження σ_{ns} в P -випадку в лобовій і тіньовій точках дорівнюють нулю, а їх максимум досягається поблизу точки зісковзування. У SV -випадку напруження σ_{ns} приймає максимальне значення в лобовій точці і має локальний максимум поблизу точки $\beta = 90^\circ$.

При збільшенні параметра ρ_0/ρ спостерігається збільшення напружень σ_n у P -випадку та σ_{ns} — у SV -випадку поблизу лобової точки та їх зменшення в околі тіньової точки. А максимум напружень σ_{ns} у P -випадку та σ_n — у SV -випадку зміщується з тіньової області ($60^\circ < \beta < 90^\circ$) в освітлену ($90^\circ < \beta < 120^\circ$). Крім того, у P -випадку переважають напруження σ_n , а значення параметра ρ_0/ρ практично не впливає на значення цього напруження в точці зісковзування $\beta = 90^\circ$. При цьому спостерігається значний вплив форми границі переміщення на амплітудні значення.

Аналіз залежності максимумів контурних напружень від відносної щільності показав, що для еліптичного та ромбічного включень зі збільшенням параметра ρ_0/ρ всі напруження спочатку зростають, а при досягненні певного значення (що залежить від відношення довжини хвилі до осі еліпса чи ромба) починають поступово стабілізуватися, що відповідає випадку нерухомого включення.

Аналіз залежності максимальних контурних напружень від безрозмірного хвильового числа $\gamma_{1,2}a$ підтвердив, що форма границі має суттєвий вплив на амплітудне значення максимумів напружень. Для ромбічної форми спостерігається суттєве зростання значень напружень σ_n та σ_{ns} порівняно з еліптичною, адже ромб є більш суттєвим концентратором напружень. Також для еліптичної форми контуру для P -хвиль зі зростанням значення $\gamma_1 a$ спостерігається певна стабілізація значень σ_n , а значення σ_{ns} на відрізку $0,5 < \gamma_1 a < 1,5$ та для $\rho_0 / \rho = 3,0; 5,0$ мають максимум, після якого зменшуються та стабілізуються. Для SV -хвиль спостерігається дещо інша закономірність: на відрізку $1 < \gamma_2 a < 2$ та для $\rho_0 / \rho = 3,0; 5,0$ максимум мають обидва напруження (σ_n і σ_{ns}), після якого вони також зменшуються і стабілізуються. Для ромба спостерігається практично те саме. Але для SV -хвиль та напружень σ_{ns} ці закономірності спостерігаються вже на відрізку $1 < \gamma_2 a < 3$ та для $\rho_0 / \rho = 1,0; 2,0; 3,0; 5,0$.

B. Panchenko, M. Severyn

MATHEMATICAL MODELING OF THE DIFFRACTION OF PLANE HARMONIC WAVES ON A RIGID CYLINDRICAL INCLUSION OF AN ARBITRARY CROSS SECTION

Borys Panchenko

Odessa National University named after Mechnikova,

pr-bob@ukr.net

Mykola Severyn

State University of Intellectual Technologies and Communication, Odessa,

n_severin@ukr.net

A new mathematical model based on the method of singular integral equations is proposed. The boundary value problem of the diffraction of plane elastic standing waves on a rigid cylindrical inclusion of arbitrary cross-section located in an infinite isotropic medium was studied. The resulting system of singular integral equations is solved numerically by mechanical quadrature. Additional conditions are used in integral form. To increase the accuracy of the results, the algorithm parallelization method is used. An analysis of the stress-strain state of the inclusion boundary is presented. The effect of the shape of the inclusion contour was studied — the results for elliptical and rhombic shapes were compared. For example, it was found that when comparing the results for different types of waves interacting with different forms of the inclusion boundary, it can be concluded that there is a fundamental difference in the distribution of contour stresses when running into a rigid inclusion of an expansion-compression wave (P -case) or a shear wave (SV -case). In the P -case for an elliptical or rhombic shape, the normal contour stress reaches local maxima at the frontal and shadow points, respectively. In the SV -case, also for both shapes of the contour, the normal stress at these points is zero and reaches a maximum near the slip point. The tangential stress in the P -case at the frontal and shadow points is zero, and its maximum is reached near the slip point. In the SV -case, the normal stress takes a maximum value at the

frontal point and has a local maximum near the slip point. When the parameter of the relative density of the inclusion increases, there is an increase in the normal stress in the *P*-case and tangential stress in the *SV*-case near the frontal point and their decrease in the vicinity of the shadow point. And the maximum of the tangential stress in the *P*-case and the normal stress in the *SV*-case shifts from the shadow area to the illuminated area. In addition, in the *P*-case normal stress prevails, and the value of the relative density parameter practically does not affect the value of this stress at the slip point. At the same time, a significant influence of the shape of the border is observed, primarily on the amplitude values.

Keywords: plane harmonic waves, diffraction, singular integral equations, numerical experiment, hard inclusion.

ПОСИЛАННЯ

1. Гузь О.М., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракція пружних хвиль. К. : Наук. думка, 1978. 307 с.
2. Волобуєва Т.В., Сторожев В.І. Розсіяння плоских гармонійних хвиль на циліндричній порожнині еліптичного перерізу в ортотропному середовищі. *Теоретична та прикладна механіка*. 1999. Вип. 29. С. 66–79.
3. Назаренко А.М. Вычислительные методы в задачах дифракции упругих волн на системах неоднородностей на базе сингулярных интегральных уравнений. Сумы : СумГУ, 2015. 220 с.
4. Панченко Б.С. Розв'язання двувимірних задач дифракції пружних хвиль на циліндричних неоднорідностях: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.02.04. Суми, 1996. 19 с.
5. Панченко Б.Е., Ковалев Ю.Д., Сайко И.Н. Численное исследование систем сингулярных интегральных уравнений первого рода и с неопределяемым индексом в задаче о дифракции плоских волн на неподвижном включении. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, N 4. С. 3–17. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00268-z>
6. Чебан В., Ляшук Д. Історія розвитку геофізичних методів розвідки корисних копалин у західному регіоні України. *Праці наукового товариства ім. Шевченка*. 2007. Т. XIX. С. 213–231.
7. Shibahara M., Taniguchi Y. Application of the integral equation method to the elastodynamic boundary-value problems. *Bulletin of the JSME*. 1983. Vol. 26, N 222. P. 2054–2059. DOI: <https://doi.org/10.1299/jsme1958.26.2054>
8. Панченко Б.Е., Сайко И.Н. Высокоточные максимальные напряжения в задаче о взаимодействии упругих волн с системой цилиндрических полостей в условиях плоской деформации. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, N 5. С. 139–148.
9. Shibahara M., Taneto S., Kuroyanagi O. Diffraction of steady stress waves by arbitrary shaped discontinuities in elastic medium. *Bulletin of the JSME*. 1980. Vol. 23, N 178. P. 493–500. DOI: <https://doi.org/10.1299/jsme1958.23.493>
10. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. К. : 1984. 344 с.
11. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. К. : Вища школа, 1982. 352с.
12. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М. : Мир, 1984. 494 с.

Отримано 11.01.2024