УДК 518.9

А.О. Бєлоусов, А.О. Чикрій, І.І. Корнюш, О.С. Петрик

ЛІНІЙНІ ІГРОВІ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ НА КЕРУВАННЯ

Бєлоусов Андрій Олександрович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

abelousov@ukr.net

Чикрій Аркадій Олексійович

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
https://orcid.org/0000-0001-9665-9085

g.chikrii@gmail.com

Корнюш Ірина Інокентіївна

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
https://orcid.org/0009-0006-6571-4276

ii-kor@ukr.net

Петрик Олена Семенівна

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,
https://orcid.org/0009-0002-7957-4076

olena.semenivna@gmail.com

Разом з прямими методами Л.С. Понтрягіна, правилом екстремального прицілювання М.М. Красовського, методом Гамільтона–Якобі–Беллмана–Айзекса (ГЯБА) в теорії динамічних ігор ефективним для досліджень є метод розв'язуючих функцій. Останній має широке коло застосувань, включаючи задачі з групами учасників (переслідувачів та втікачів) та процеси зі складною динамікою (рівняння в частинних похідних та з дробовими похідними різних типів). У статті розглядаються лінійні конфліктно-керовані процеси з інтегральними обмеженнями на керування. В основу досліджень покладено ідеї методу розв'язуючих функцій з використанням накопичувального принципу при побудові вищезгаданих скалярних функцій, які визначають момент виведення траєкторії системи на термінальну множину. Вважається виконаною певна умова переваги переслідувача над втікачем за ресурсами керування — аналог умови Понтрягіна, яка надає можливість будувати гарантовані керування переслідувача (вимірні функції) на основі теореми Філіпова–Кастена про вимірний вибір на активному та пасивному проміжках у процесі гри. З використанням техніки багатозначних відображень вивчено властивості розв'язуючих функцій та встановлено достатні умови завершення диференціальної гри. Теоретичні результати ілюструються на модельному прикладі з простими рухами гравців та контрольному прикладі Понтрягіна. Вказана можливість перенесення викладених результатів на випадок більш складних інтегральних обмежень на керування.

Ключові слова: диференціальна гра, інтегральні обмеження, умова Понтрягіна, розв'язуюча функція, вимірний вибір, простий рух.

Вступ

У теорії диференціальних ігор вже досить давно існує правило, що нові конструкції відпрацьовуються спочатку при так званих геометричних обмеженнях на керування [1–4]. Можливо, для дослідника це видається найбільш звичним чи навіть більш простим. При перенесенні результатів на інтегральні чи змішані обмеження інколи виникають серйозні труднощі математичного характеру. Тому інколи маємо значний проміжок часу між основними результатами для геометричних обмежень та їхніми аналогами для інтегральних обмежень.

Перший прямий метод Л.С. Понтрягіна [1] розвинено в працях М.С. Нікольського [5–7] при інтегральних обмеженнях на керування. Згодом зазначена задача з використанням прийому Д. Зонневенда [8], пов'язаного з розтягуванням часу, в рамках згаданої техніки вивчалася в [9]. До цієї методики можна віднести дослідження А.В. Мезенцева [10], Н.Л. Григоренка [11], А.Я. Азімова та Ф.В. Гусєйнова [12].

Правило екстремального прицілювання М.М. Красовського [2] знайшло своє втілення при інтегральних обмеженнях у роботах В.Н. Ушакова [13], Б.М. Пшеничного та Ю.М. Онопчука [14], а згодом Й.С. Раппопорта [15]. Останній також вивчав змішані обмеження на керування.

Доробок Б.Н. Соколова [16, 17], можливо, слід віднести до ідеології динамічного програмування.

У роботі [18] зроблено спробу перевести метод розв'язуючих функцій [3] на інтегральні обмеження на керування. Цій же проблемі присвячені праця [19] та розвідка [20]. Дана робота продовжує зазначені дослідження, при цьому суттєво використовується техніка нелінійного та опуклого аналізу [21–23].

Метод розв'язуючих функцій, який є базовим в даній роботі, тісно пов'язаний з функціоналами Мінковського, точніше, з оберненими до них відображеннями [6]. Він полягає в оцінці дії переслідувача в кожний момент часу за допомогою деякої скалярної функції, сумування значень якої дає інтегральний критерій закінчення гри зближення за відповідний гарантований час. Можливість обчислення розв'язуючих функцій в аналітичному вигляді для досить широкого класу задач дозволяє робити висновки щодо умов закінчення гри зближення із заданих початкових станів за скінченний час.

Постановка задачі

Динаміка гри задається лінійним диференціальним рівнянням

$$\dot{z} = Az + Bu + Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1}$$

де $u \in R^m$, $v \in R^l$, A, B, C — постійні матриці розміру $n \times n$, $n \times m$, $n \times l$ відповідно.

Керування гравця-переслідувача та гравця-втікача є вимірними (за Лебегом) функціями, які задовольняють інтегральні обмеження

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \|v(\tau)\|^2 d\tau \le 1. \tag{2}$$

Ці керування будуть називатися допустимими.

Термінальна множина M є лінійним підпростором R^n.

Визначення. Вважаємо, що гра може бути закінчена в момент $T = T(z^0)$, якщо для-будь якого допустимого керування гравця, що втікає $v(t)$, існує допустиме керування переслідувача $u(t)$, яке гарантує приведення розв'язку рівняння (1) $z(t)$, що відповідає керуванням $u(t)$, $v(t)$ і початковому положенню z^0, на термінальну множину в момент $T : z(T) \in M$. Вважаємо, що при побудові керування $u(t)$ переслідувач в момент t може використати інформацію щодо реалізованого до цього моменту керування супротивника $v(t)$, $\tau \in [0, t]$.

Позначимо π оператор проєктування з R^n на підпростір L, де L — доповнення до M в R^n.

Розглянемо припущення на параметри гри, яке можна назвати аналогом умови Л.С. Понтрягіна [1] для диференціальних ігор з інтегральними обмеженнями.

Припущення. Існує таке число λ, $0 \le \lambda < 1$, що для всіх додатних t виконується включення

$$\pi e^{At} CV \subset \lambda \pi e^{At} BU, \tag{3}$$

де $U = \{u \in R^m : \|u\|^2 \le 1\}$ і $V = \{v \in R^l : \|v\|^2 \le 1\}$ — одиничні кулі в просторах керування.

Далі вважаємо, що це припущення на параметри гри виконується.

Допоміжні твердження

Зафіксуємо початкову позицію z^0. Введемо допоміжне багатозначне відображення

$$\Omega(t, \tau, v) = \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2}\, \pi e^{A\tau} BU\}, \tag{4}$$

де $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$, $R_+ = [0, \infty)$. Розглянемо допоміжну функцію (так звану розв'язуючу функцію [3]):

$$\gamma(t, \tau, v) = \sup \Omega(t, \tau, v). \tag{5}$$

Дослідимо властивості допоміжного відображення і цієї функції.

Лема 1. *Мають місце співвідношення*

$\gamma(t, \tau, v) \ge 0$ *для всіх* $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$,

$\gamma(t, \tau, v) = +\infty$ *при* $\pi e^{At} z^0 = 0$ *для всіх* $(\tau, v) \in R_+ \times R^l$,

$\gamma(t, \tau, v) < \infty$ *при* $\pi e^{At} z^0 \ne 0$ *для всіх* $(\tau, v) \in R_+ \times R^l$.

Доведення. Для першого твердження досить показати, що $0 \in \Omega(t, \tau, v)$, тобто

$$\pi e^{At} Cv \in \sqrt{\lambda \|v\|^2}\, \pi e^{At} BU. \tag{6}$$

При $v = 0$ це включення, очевидно, виконується. При $v \ne 0$, враховуючи і включення $0 \in U$, маємо ланцюг включень

$$\pi e^{A\tau} C \frac{v}{\|v\|} \in \pi e^{A\tau} CV \subset \lambda \pi e^{A\tau} BU \subset \sqrt{\lambda}\, \pi e^{A\tau} BU,$$

що означає $\gamma(t, \tau, v) \ge 0$.

 ISSN 2786-6491

З урахуванням (6) очевидно, що при $\pi e^{At} z^0 = 0$ включення $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$ виконується для будь-якого додатного числа γ.

Зафіксуємо вектор $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$, такий, що $\pi e^{At} z^0 \neq 0$. Величина норми вектора $\| \gamma \pi e^{At} + \pi e^{A\tau} C v \|$ зростає по γ лінійно (при досить великих γ), а норма векторів з правої частини включення в (4) обмежена функцією

$$\sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \max_{\|u\| \le 1} \| \pi e^{A\tau} B u \|,$$

яка як функція від γ зростає не швидше квадратного кореня. Тому для досить великих γ включення в (4) виконується, тобто $\gamma(t, \tau, v) < \infty$.

Лема 2. *Інтервал* $[0, \gamma(t, \tau, v)) \subset \Omega(t, \tau, v)$ *для всіх* $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$.

Доведення. Вважаємо, що для деякого додатного числа γ виконується включення $0 \in \Omega(t, \tau, v)$. Тоді для будь-якого числа β, $0 < \beta < \gamma$, виконується включення $\beta \pi e^{At} z^0 + \frac{\beta}{\gamma} \pi e^{A\tau} C v \in \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU$. З включення (6) випливає, що $\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \pi e^{A\tau} C v \in \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU$. Звідси, враховуючи опуклість множини $\pi e^{A\tau} BU$, отримуємо

$$\beta \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} C v \in \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU +$$

$$+ \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{\lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU \subset \left(\frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{\lambda \|v\|^2} \right) \pi e^{A\tau} BU.$$

Функція $f(\gamma) = \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2}$ є увігнутою, тобто $f''(\gamma) < 0$ при $\gamma > 0$.

Тому для функції f виконується нерівність [21]

$$\frac{f(\gamma) - f(0)}{\gamma} \le \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \quad \text{для } \gamma > \beta > 0,$$

звідси

$$\frac{\beta}{\gamma} f(\gamma) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) f(0) \le f(\beta)$$

або

$$\frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \| v \|^2} + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{\lambda \|v\|^2}) \le \sqrt{(1-\lambda)\beta + \lambda \|v\|^2}.$$

Тому, так як $0 \in \pi e^{A\tau} BU$, маємо

$$\beta \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} C v \in \sqrt{(1-\lambda)\beta + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU.$$

Значить, $\beta \in \Omega(t, \tau, v)$ для будь-якого $\beta \in [0, \gamma]$.

Лема 3. *При* $\pi e^{At} z^0 = 0$ *верхня грань у визначенні* $\gamma(t, \tau, v)$ *(5) досягається. Функція* $\gamma(t, \tau, v)$ *вимірна за Борелем за сукупністю змінних* $(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l$.

Доведення. Розглянемо функцію відстані між вектором і компактом з визначення $\Omega(t, \tau, v)$ (4)

$$\delta(\gamma, t, \tau, v) = \min_{u\in U} \| \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv - \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} Bu \|.$$

Ця функція є неперервною на множині $R_+ \times R_+ \times R_+ \times R^l$. Включення $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$ еквівалентне рівності $\delta(\gamma, t, \tau, v) = 0.$ Значить, визначення (5) означає, що існує послідовність чисел γ_i, таких, що

$$\delta(\gamma_i, t, \tau, v) = 0 \quad \gamma_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \gamma(t, \tau, v).$$

Звідси, враховуючи скінченність $\gamma(t, \tau, v)$ (при $\pi e^{At} z^0 \neq 0$), випливає, що $\delta(\gamma(t, \tau, v), t, \tau, v) = 0,$ тобто верхня межа в означенні функції (5) є досяжною.

Розглянемо множину рівня функції $\gamma(t, \tau, v)$

$$\Lambda_a \{(t, \tau, v) \in R_+ \times R_+ \times R^l : \gamma(t, \tau, v) < a\}.$$

Покажемо, що ця множина є відкритою, а значить, і борелівською для будь-якого додатного a. Це і буде означати, що функція $\gamma(t, \tau, v)$ є вимірною за Борелем [24].

Зафіксуємо додатне число a і візьмемо довільну точку $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v}) \in \Lambda_a$. Значить, $a \notin \Omega(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$, тобто для цієї точки виконується нерівність $\delta(a, \bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v}) > 0.$ Неперервність функції $\delta(\cdot)$ гарантує існування такого околу Δ точки $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$, що для всіх $(t, \tau, v) \in \Delta$ виконується нерівність $\delta(a, t, \tau, v) > 0,$ тобто $\gamma(t, \tau, v) < a$ для всіх $(t, \tau, v) \in \Delta.$ Це і означає відкритість множини Λ_a, що і потрібно було довести.

Основна теорема

Сформулюємо достатні умови гарантованого приведення розв'язку рівняння (1), (2) на термінальну множину M з початкового положення z^0.

Теорема. *Має місце умова (3) на параметри гри (1), (2). Якщо існує момент* $T = T(z^0)$, *такий, що або* $\pi e^{AT} z^0 = 0$, *або* $\pi e^{AT} z^0 \neq 0$ *і для всіх допустимих керувань* $v(\cdot)$ *виконується нерівність*

$$\int_0^T \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau \geq 1, \tag{7}$$

тоді диференціальна гра може бути закінчена в момент T.

Доведення. Зафіксуємо момент T, який задовольняє припущення теореми. Спочатку проаналізуємо випадок $\pi e^{AT} z^0 \neq 0.$

Згідно з лемою 3 розв'язуюча функція $\gamma(T, \tau, v)$ є вимірною за Борелем і для всіх $(\tau, v) \in R_+ \times R^l$ виконується включення

$$\gamma(T, \tau, v) \pi e^{AT} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma(T, \tau, v) + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU. \tag{8}$$

Це включення, вимірне за Борелем, залежить від (τ, v) та неперервне від $u \in U$.

 ISSN 2786-6491

З теореми щодо вимірного селектора Куратовського і Риль–Нардзевського [25, 26] випливає, що це включення має вимірний за Борелем селектор, тобто вимірне за Борелем відображення $w(\tau, v) \in U,$ для якого

$$\pi e^{A\tau} C v \sqrt{\lambda \| v \|^2} \pi e^{A\tau} B w(\tau, v)$$

при всіх $(\tau, v) \in R_+ \times R^l.$

Припустимо, гравець-втікач використовує на інтервалі $[0, T]$ довільне, вимірне за Лебегом керування $v(\tau),$ яке задовольняє інтегральне включення

$$\int_0^T \| v(\tau) \|^2 d\tau \le 1.$$

Згідно з припущенням (7) теореми існує момент $T^* = T^*(z^0, v(\cdot)),$ такий, що

$$\int_0^T \gamma(T, T-\tau, v(\tau)). \tag{9}$$

Тоді керування гравця-переслідувача на інтервалі $[0, T]$

$$u(\tau) = \begin{cases} -\sqrt{(1-\lambda)\gamma(T, T-\tau, v(\tau) + \lambda \| v(\tau) \|^2} w(T, T-\tau, v(\tau)) & \text{при } \tau \in [0, T^*], \\ -\sqrt{\lambda \| v(\tau) \|^2} \overline{w}(T-\tau, v(\tau) & \text{при } \tau \in (T^*, T]. \end{cases} \tag{10}$$

Такий закон вибору керувань переслідувача є контркеруванням з одним перемиканням.

Зазначимо, що суперпозиція борелівської та вимірної за Лебегом функцій буде вимірною за Лебегом функцією [24]. Тому побудоване таким чином керування (10) є вимірним за Лебегом для довільного вимірного керування $u(\tau).$

Покажемо, що при такому виборі керування переслідувача розв’язок (1) попаде на термінальну множину в момент $T.$

$$\pi z(T) = \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} [Bu(\tau) + Cv(\tau)] d\tau =$$

$$= \pi e^{AT} z^0 + \int_0^{T^*} \pi e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_{T^*}^T \pi e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau) d\tau =$$

$$= \pi e^{AT} z^0 - \int_0^{T^*} \sqrt{(1-\lambda)\gamma(T, T-\tau, v(\tau)) + \lambda \| v(\tau) \|^2} \pi e^{A(T-\tau)} Bw(T-\tau, v(\tau)) d\tau -$$

$$- \int_{T^*}^T \sqrt{\lambda \| v(\tau) \|^2} \pi e^{A(T-\tau)} B\overline{w}(T-\tau, v(\tau)) d\tau + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau) d\tau =$$

$$= \pi e^{AT} z^0 - \int_0^{T^*} [\gamma(T, T-\tau, v(\tau)) \pi e^{AT} z^0 + \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau)] d\tau -$$

$$-\int_{T^*}^{T} \pi e^{A(T-\tau)} C v(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{T} \pi e^{A(T-\tau)} C v(\tau)\, d\tau =$$

$$= \pi e^{AT} z^0 - \int_{0}^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau \bullet \pi e^{AT} z^0 = 0.$$

Ця рівність доводить приведення розв'язку на термінальну множину $z(T) \in M$.

Перевіримо, що побудоване таким чином (10) керування $u(\tau)$ задовольняє інтегральні обмеження (2)

$$\int_0^T \|u(\tau)\|^2\, d\tau = \int_0^{T^*} [(1-\lambda)\gamma(T, T-\tau, v(\tau)) + \lambda \|v(\tau)\|^2] \|w(T-\tau, v(\tau))\|^2\, d\tau +$$

$$+ \int_{T^*}^{T} \lambda \|v(\tau)\|^2 \|\bar{w}(T-\tau, v(\tau))\|^2\, d\tau \le (1-\lambda) \int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau + \lambda \int_0^T \|v(\tau)\|^2\, d\tau.$$

Аналогічно розглядається випадок $\pi e^{AT} z^0 = 0.$ У цьому разі керування переслідувача на інтервалі $[0, T]$

$$u(\tau) = -\sqrt{\lambda \|v(\tau)\|^2}\, \tilde{w}(T-\tau, v(\tau)). \tag{11}$$

Як і раніше, можна показати, що і у цьому разі керування (11) гарантує приведення розв'язку (1) на термінальну множину M в момент T (для будь-якого довільного керування $v(\tau)$) і $u(\tau)$ задовольняє інтегральне обмеження (2).

Таким чином, теорему доведено.

Зауваження. Теорема легко переноситься на більш загальні інтегральні обмеження на керування

$$\int_0^\infty u^{\mathrm{T}}(\tau) G u(\tau)\, d\tau \le \mu^2, \quad \int_0^\infty v^{\mathrm{T}}(\tau) H v(\tau)\, d\tau \le \nu^2, \tag{12}$$

де G і H — симетричні, додатно-визначені матриці розміру $m \times m$ і $l \times l$ відповідно, $v(\tau)$ і $u(\tau)$ — вимірні функції, μ і ν — додатні числа, а знак T позначає транспонування.

Заміна

$$\tilde{u} = \frac{1}{\mu} G^{\frac{1}{2}} u, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\nu} H^{\frac{1}{2}} v, \quad \tilde{B} = \mu B G^{\frac{1}{2}}, \quad \tilde{C} = \nu C H^{\frac{1}{2}}$$

приводить диференціальну гру (1), (12) до початкового вигляду

$$\dot{z} = Az + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{C}\tilde{v}, \quad z \in R^n,\ \tilde{u} \in R^m,\ \tilde{v} \in R^l, \quad z(0) = z^0,$$

$$\int_0^\infty \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \|\tilde{v}(\tau)\|^2 d\tau \le 1.$$

У такому вигляді теорема повністю переноситься на зазначений загальний випадок.

Приклади

Приклад 1 (Простий рух). Рух переслідувача та втікача описується диференціальними рівняннями

$$\begin{aligned} &\dot{x} = u, \quad x(0) = x^0, \quad x \in R^n, \quad u \in R^n, \\ &\dot{y} = v, \quad y(0) = y^0, \quad y \in R^m, \quad v \in R^m. \end{aligned} \tag{13}$$

Обмеження мають вигляд

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 d\tau \le \mu^2, \quad \int_0^\infty \|v(\tau)\|^2 d\tau \le \nu^2, \quad \mu > \nu > 0. \tag{14}$$

Термінальна множина задається рівністю $x = y$.

Зробивши заміну

$$z = x - y, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\mu}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\nu},$$

приведемо гру до стандартного вигляду

$$\dot{z} = \mu\tilde{u} - \nu\tilde{v}, \quad z^0 = x^0 - y^0,$$

$$\int_0^\infty \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau \le 1, \quad \int_0^\infty \|\tilde{v}(\tau)\|^2 d\tau \le 1.$$

Термінальна множина $M = \{0\}$, оператор π представляє собою тотожне перетворення.

Припущення (3) виконується для параметра $\lambda = \dfrac{\nu}{\mu} < 1$:

$$-\nu D \subset \lambda\mu D, \quad D = \{z \in R^n : \|z\|^2 \le 1\}.$$

Розв'язуюча функція $\gamma(\cdot)$ знаходиться на багатозначному відображенні

$$\Omega(t, \tau, \tilde{v}) = \{\gamma \in R : yz^0 - v\tilde{v} \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|\tilde{v}\|^2}\mu D\} =$$

$$= \{\gamma \in R : (yz^0 - v\tilde{v})^2 \le [(1-\lambda)\gamma + \lambda\|\tilde{v}\|^2]\mu^2\} =$$

$$= \{\gamma \in R : F(\gamma, \tilde{v}) = \| z^0 \|^2 \gamma^2 - 2\gamma\left[v(z^0, \tilde{v}) + \frac{\mu(\mu - v)}{2}\right] - v(\mu - v)\|\tilde{v}\|^2 \le 0\}. \tag{15}$$

Функція $F(\gamma, \tilde{v})$ являє собою квадратний многочлен відносно γ з додатним коефіцієнтом при старшому степені, тому $\gamma(\tilde{v})$ (5) є більшим коренем квадратного рівняння $F(\gamma, \tilde{v}) = 0$.

Зазначимо, що $F(0, v) \le 0$ для всіх $v \in R^n$, тому функція $\gamma(v)$ визначена для всіх v і $\gamma(v) \ge 0$.

Знайдемо вектор v^*, на якому досягається мінімум функції $\gamma(v)$. Для цього продиференціюємо

$$\frac{\partial\gamma}{\partial v} = \frac{\partial F / \partial v}{\partial F / \partial\gamma} = \frac{2\gamma\nu z^0 + 2\nu(\mu - \nu)v^*}{\partial F / \partial\gamma} = 0,$$

звідси отримаємо єдиний екстремум функції $\gamma(\cdot)$

$$v^* = -\frac{\gamma}{\mu - \nu} z^0.$$

Відповідне v^* значення функції $\gamma(\cdot)$ отримаємо з квадратного рівняння $F(\gamma, v^*) = 0$:

$$\gamma(v^*) = \frac{(\mu - \nu)^2}{\| z^0 \|^2},$$

а значить,

$$v^* = \frac{\mu - \nu}{\| z^0 \|^2} z^0.$$

Неважко показати, що (як більший корінь квадратного рівняння) функція

$$\gamma(v) \geq \frac{\sqrt{\nu(\mu - \nu)} \|v\|}{\| z^0 \|^2} \to \infty \ \text{ при } \|v\| \to \infty.$$

Тому єдиний екстремум функції $\gamma(v)$ є мінімумом.

Згідно з твердженням теореми час завершення гри визначається співвідношеннями

$$\int_0^T \gamma(v(\tau))\, d\tau \geq \int_0^T \gamma(v^*)\, d\tau = \frac{(\mu - \nu)^2}{\| z^0 \|^2} T = 1,$$

звідси

$$T = \frac{\| z^0 \|^2}{(\mu - \nu)^2}. \qquad (16)$$

Слід зазначити, що момент T співпадає з часом першого поглинання [1] для гри (13), тобто з першим моментом, коли множина досяжності переслідувача x поглине множину досяжності втікача y. Цей час T є мінімальним часом гарантованого завершення гри (13).

Вкажемо явний вигляд контркерування $u(v)$ переслідувача на інтервалі [0, T], яке розв'язує задачу зближення. Стратегія переслідувача визначається співвідношеннями (8) і (10).

$$yz^0 - \nu\tilde{v} = \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\tilde{v}^2}\,\mu\omega, \quad \|\omega\| \leq 1,$$

$$\tilde{u}(\tilde{v}) = -\sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\tilde{v}^2}\,\omega.$$

Звідси

$$\tilde{u}(\tilde{v}) = \frac{-\gamma z^0 + \nu\tilde{v}}{\mu}.$$

Враховуючи заміну $u = \mu\tilde{u}, \ \ v = \nu\tilde{v}$ і квадратне рівняння (15), отримуємо

$$u(v) = v - \gamma(v)\, z^0,$$

де

$$\gamma(v) = \frac{1}{\| z^0 \|^2} \left\{ (z^0, v) + \frac{\mu(\mu - \nu)}{2} + \sqrt{\left((z^0, v) + \frac{\mu(\mu - \nu)}{2} \right)^2 + \| z^0 \|^2 \|v\|^2 \left(\frac{\mu - \nu}{\nu} \right)} \right\}.$$

Таким чином, це керування гарантує розв'язок задачі переслідування (13), (14) не пізніше моменту (16).

ISSN 2786-6491

Приклад 2 (Контрольний приклад Л.С. Понтрягіна). Рухи переслідувача та втікача задаються рівняннями

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = \rho u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^n, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0 \quad \alpha, \rho > 0,$$
$$\ddot{y} + \beta\dot{y} = \sigma v, \quad y \in R^n, \quad v \in R^n, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, \quad \beta, \sigma > 0. \tag{17}$$

Інтегральні обмеження мають вигляд (2). Переслідування вважається завершеним, якщо $x = y$.

Введемо нові змінні

$$z_1 = x - y, \quad z_2 = \dot{x}, \quad z_3 = \dot{y}, \quad z = (z_1, z_2, z_3) \in R^{3n}.$$

Система рівнянь (17) прийме вигляд

$$\dot{z}_1 = z_2 - z_3, \qquad z_1^0 = x^0 - y^0,$$
$$\dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \rho u, \qquad z_2^0 = \dot{x}^0,$$
$$\dot{z}_3 = -\beta z_3 + \sigma v, \qquad z_3^0 = \dot{y}^0.$$

Термінальна множина $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in R^{3n} : z_1 = 0\}$. Оператор ортогонального проєктування $\pi : R^{3n} \to L$ задається матрицею $\pi = (E \quad 0_n \quad 0_n)$, де E — одинична матриця порядку n, 0_n — нульова. Матриці (1) приймуть вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & E & -E \\ 0_n & -\alpha E & 0_n \\ 0_n & 0_n & -\beta E \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0_n \\ \rho E \\ 0_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \sigma E \end{pmatrix}.$$

Фундаментальна матриця системи

$$e^{At} = \begin{pmatrix} E & \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} E & -\dfrac{1-e^{-\beta t}}{\beta} E \\ 0_n & e^{-\alpha t} E & 0_n \\ 0_n & 0_n & e^{-\beta t} E \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення

$$a(t) = \pi e^{At} z^0 = z_1^0 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2^0 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3^0,$$

$$\pi e^{At} B = f(t)E, \quad \pi e^{At} C = g(t)E,$$

де

$$f(t) = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho, \quad g(t) = \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma.$$

Згідно з проведеним Л.С. Понтрягіним дослідженням [1] умови на параметри гри

$$\sigma < \rho, \quad \frac{\sigma}{\beta} < \frac{\rho}{\alpha} \tag{18}$$

забезпечують виконання нерівності $g(t) \le \lambda f(t)$ для всіх $t \ge 0$, де $\lambda =$ $= \max\left\{\dfrac{\sigma}{\rho}, \dfrac{\sigma\alpha}{\rho\beta}\right\} < 1.$

Значить, при наявності нерівності (18) для цього значення λ виконується припущення (3):

$$\pi e^{At} CV = -g(t)D \subset \lambda f(t)D = \lambda \pi e^{At} BU, \quad D = U = V = \{u \in R^n : \|u\|^2 \le 1\}.$$

Тоді множина (4) має вигляд

$$\Omega(t, \tau, v) = \{\gamma \in R : \gamma a(t) - g(\tau)v \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} f(\tau)D\} =$$

$$= \{\gamma \in R : \|\gamma a(t) - g(\tau)v\|^2 \le [(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2] f^2(\tau)\} =$$

$$= \{\gamma \in R : F(\gamma, t, \tau, v) \le 0\},$$

де

$$F(\gamma, t, \tau, v) = \|a(t)\|^2 \gamma^2 - 2\gamma\left[g(t)(a(t), v) + \frac{(1-\lambda)}{2}\right] - \|v\|^2 (\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)).$$

Функція F — многочлен другого ступеня по γ з додатним старшим коефіцієнтом, тому розв'язуюча функція $\gamma(t, \tau, v) = \max \Omega(t, \tau, v)$ є більшим коренем квадратного рівняння $F(\gamma, t, \tau, v) = 0.$

Оцінимо нижче розв'язуючу функцію $\gamma(t, \tau, v).$ Для цього скористаємося властивостями градієнта неявної функції. Знайдемо корінь

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -2\gamma g(\tau)\, a(t) - 2v(\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)) = 0,$$

звідси отримаємо єдиний екстремум функції $\gamma(t, \tau, v)$

$$v^* = -\frac{\gamma g(t)}{\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)} a(t)$$

і

$$F(\gamma, t, \tau, v) = \|a(t)\|^2 \gamma^2 \frac{\lambda f^2(\tau)}{\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)} - \gamma(1-\lambda) f^2(\tau) = 0,$$

а значить,

$$\gamma(t, \tau, v^*(t, \tau)) = \frac{(1-\lambda)(\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau))}{\lambda\|a(t)\|^2} \text{ і } v^*(t, \tau) = \frac{(1-\lambda)g(t)}{\lambda\|a(t)\|^2} a(t).$$

Можна стверджувати, що для будь-якого $v \in R^n$ виконується нерівність

$$\gamma(t, \tau, v) \ge \gamma(t, \tau, v^*(t, \tau)).$$

Тоді, застосовуючи нерівність $g(\tau) \le \lambda f(\tau),$ отримаємо співвідношення

$$\int_0^T \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau \ge \int_0^T \frac{1-\lambda}{\lambda\|a(T)\|^2} (\lambda f^2(T-\tau) - g^2(T-\tau))\, d\tau \ge$$

$$\ge \frac{(1-\lambda)^2}{\|a(T)\|^2} \int_0^T f^2(\tau)\, d\tau = \frac{(1-\lambda)^2 \rho^2}{\|a(T)\|^2 \alpha^2}\left[T - 2\frac{1-e^{\alpha T}}{\alpha} + \frac{1-e^{2\alpha T}}{2\alpha}\right].$$

Так як функція $\|a(T)\|^2$ обмежена, то цей інтервал зростає необмежено зі зростанням T і буде більше одиниці для досить великого числа T.

Таким чином, якщо виконані умови (18), то побудоване в теоремі керування гарантує розв’язок задачі переслідування (17) зі всіх початкових положень $(x^0, y^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0)$ за деякий скінченний час $T = T(z^0)$.

Вкажемо явний вигляд керування $u(t)$ переслідувача на інтервалі $[0, T]$, який розв’язує задачу зближення $[0, T]$ $v(t)$. Припустимо, що гравець, який тікає, застосовує на інтервалі $[0, T]$ допустиме керування $v(t)$. Момент переключення програм контркерування $T^* = T^*(z^0, v(\tau))$ визначається співвідношенням (9)

$$\int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, d\tau = 1,$$

де

$$\gamma(T, \tau, v) = \frac{1}{\|a(T)\|^2} \left\{ g(\tau)(a(T), v) + \frac{(1-\lambda)}{2} f^2(\tau) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left(g(\tau)(a(T), v) + \frac{(1-\lambda)}{2} f^2(\tau) \right)^2 + \|a(T)\|^2 + \|a(T)\|^2 \|v\|^2 (\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau))} \right\}.$$

Керування має вигляд

$$u(\tau) = \begin{cases} -\dfrac{\gamma(T, T-\tau, v(\tau))\, a(T) + g(T-\tau)\, v(\tau)}{f(T-\tau)} & \text{при } \tau \in [0, T^*], \\ -\dfrac{g(T-\tau)\, v(\tau)}{f(T-\tau)} & \text{при } \tau \in [T^*, T]. \end{cases}$$

Висновок

Досліджуються конфліктно-керовані процеси, що описуються лінійними диференціальними рівняннями, за умови інтегральних обмежень на керування протидіючих сторін. Базовим обрано метод розв’язуючих функцій, які чисельно оцінюють якість керування переслідувача у процесі гри. При цьому сповідується накопичувальний принцип, який визначають розв’язувальні функції. Досягнення в сумі цих функцій певного порогового значення означає кінець гри. Керування переслідувача будується на основі теорем вимірного вибору типу Філіпова–Кастена на активному та пасивному проміжках. Цю процедуру забезпечує класична умова Понтрягіна. У результаті з використанням техніки багатозначних відображень отримано достатні умови виведення траєкторії конфліктно-керованого процесу на задану термінальну множину. Аналітичні результати проілюстровано на модельних прикладах ігрових задач з простим рухом та контрольному прикладі Понтрягіна.

A. Belousov, A. Chikrii, I. Korniush, O. Petryk

LINEAR GAME PROBLEMS UNDER INTEGRAL CONSTRAINTS ON CONTROLS

Andrii Belousov

Taras Shevchenko Kyiv National University,

abelousov@ukr.net

Arkadii Chikrii

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv,

g.chikrii@gmail.com

Iryna Korniush

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv,

ii-kor@ukr.net

Olena Petryk

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv,

olena.semenivna@gmail.com

Alongside Pontryagin's Direct methods, Krasovskii' Extreme Targeting rule and the HJBI (Hamilton-Jacobi-Isaacs) method, in the dynamic games theory an effective method is the Method of Resolving Functions. This method has a wide range of applications that includes problems with groups of participants (both pursuers and evaders) and complex dynamic processes (various type equations with partial and fractional derivatives). In this paper we deal with the linear conflict-controlled process under integral constraints on controls. The study is based on the Method of Resolving Functions and uses the cumulative principle in constructing the above mentioned scalar functions. Such function determinates the moment of the system trajectory hitting the terminal set. We consider that certain condition of the pursuer advantage over the evader in control resources is fulfilled. This condition is the analog of Pontryagin's condition. It's fulfillment makes it possible to build (on the basis of the Filippov-Castaing theorem on measurable choice) the guaranteed pursuer controls in the form of measurable functions, on the active and the passive intervals in the game course. Using the technique of set-valued mapping we derive the properties of resolving functions and establish sufficient conditions of the differential game termination. Theoretical results are illustrated on the model example with «simple motions» and on Pontryagin's Testing Example. The possibility of transferring presented results to the case of more complicated constraints on controls is indicated.

Keywords: differential game, integral constraints, Pontryagin's condition, resolving function, measurable choice, simple motion.

ПОСИЛАННЯ

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. М. : Наука, 1988. 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М. : Наука, 1970. 420 с.
3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев : Наук. думка, 1992. 384 с.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М. : Наука, 1981. 288 с.
5. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы*. Вып. 2. Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1969. С. 49–58.
6. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями. *Дифференц. уравнения.* 1972. Т. 8, № 6. С. 964–971.
7. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями. *Дифференц. уравнения.* 1992. Т. 28, № 2. С. 219–223.
8. Зонневенд Д. Об одном методе преследования. *Докл. АН СССР.* 1972. Т. 204, № 6. С. 1296–1299.
9. Азимов А.Я. Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1974. № 2. С. 31–35.
10. Мезенцев А.В. Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управление. М. : Изд-во МГУ, 1988. 135 с.

11. Григоренко Н.Л. О структуре одного класса дифференциальных игр с интегральными ограничениями. *Управляемые системы.* Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1974. Вып. 12. С. 23–31.
12. Азимов А.Я., Гусейнов Ф.В. О некоторых классах дифференциальных игр с интегральными ограничениями. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1972. № 3. С. 9–16.
13. Ушаков В.Н. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Прикладная математика и механика*. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 15–23.
14. Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н. Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. 1968. № 1. С. 13–22.
15. Раппопорт И.С. Об одной задаче преследования несколькими управляемыми объектами при наличии интегральных ограничений. *Докл. АН УССР*. 1979. Сер. А. № 3. С. 221–224.
16. Соколов В.Н. Об одной дифференциальной игре с запаздыванием информации при наличии интегральных ограничений. *Дифференц. уравнения.* 1974. Т. 8, № 10. С. 436–446.
17. Соколов В.Н. Дифференциальная игра наведения игры с интегральными ограничениями на управление противника. *Дифференц. уравнения.* 1974. Т. 10, № 3. С. 436–446.
18. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика.* 1993. № 4. С. 23–26.
19. Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Дифференциальные уравнения и топология: тез докл. Междунар. конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина.* М. : Ин-т математики им. В.А. Стеклова РАН; МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. С. 321–322.
20. Чикрій А.О., Раппопорт Й.С. Модифікований метод розв’язувальних функцій для ігрових задач керування з інтегральними обмеженнями. *Кібернетика і системний аналіз*. 2023. Т. 59, № 4. С. 82–93. DOI: https://doi.org/10.1007/s10559-023-00593-z
21. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 330 с.
22. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 456 с.
23. Kurzhanski A, Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston : Birkhäuser, 1997. 321 p.
24. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1981. 544 с.
25. Куратовский К. Топология. Т. 2. М. : Мир, 1969. 624 с.
26. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. *Mathematics and its Applications*. Boston : Kluwer Acad. Publ., 1991. Vol. 44. 260 p.

Отримано 27.03.2024