

## МОДЕЛЬ РИНКУ ЦИФРОВИХ КРИПТОВАЛЮТ У РАМКАХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГРИ ЯКОСТІ

**Малюков Володимир Павлович**

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, м. Київ,  
<https://orcid.org/0000-0002-7533-1555>

*volod.malyukov@gmail.com*

**Малюкова Інна Володимирівна**

Рейтингове агентство «Експерт-рейтинг», м. Київ,  
<https://orcid.org/0000-0002-7207-539X>

*imalyukova82@gmail.com*

Стаття присвячена розробці неперервної багатофакторної моделі ринку цифрових криптовалют (ЦКВ) у рамках схеми диференціальної гри якості. Розглянуто ігрову модель торговельної сесії на ринку ЦКВ. Показано, що керуваність процесу на торговельній сесії може бути описана з погляду ігрового підходу на основі рішення системи білінійних диференціальних ігор, які дають змогу адекватно описати процес розподілу обсягів цифрових криптовалют. Такий підхід не відкидає реалізацій гри з боку загального колективного контрагента. Він дозволяє розглянути випадки, що призводять до нестабільності співвідношення фінансових ресурсів гравців, наприклад, ЦКВ1 до ЦКВ2 і навпаки. Новизна моделі полягає у тому, що вона відрізняється від існуючих підходів рішенням білінійної диференціальної гри якості з кількома термінальними поверхнями. Знайдено рішення нової білінійної диференціальної гри якості з залежними рухами, що адекватно описує процедуру купівлі-продажу ЦКВ на ринку криптовалют. Проілюстровано результати обчислювального експерименту, під час якого враховувалися різні співвідношення параметрів, що описують процес купівлі-продажу ЦКВ. Отримані результати можуть виявитися корисними для запобігання ситуаціям курсової нестабільності на ринку інвестицій у ЦКВ. Також їх можна використовувати як деякі рекомендації щодо вибору керуючих впливів для підтримки курсової стабільності на ринку інвестування у ЦКВ на рівні великих банківських гравців. Запропонований підхід дає можливість конструктивного знаходження стратегій валютної стабільності на ринку ЦКВ. Він полягає в адекватності розробленої моделі неперервному процесу купівлі-продажу ЦКВ, що дозволило використовувати інструментарій білінійних диференціальних ігор якості для знаходження стратегій гравців. Наведено розрахунки, в яких розглянуто різні співвідношення параметрів, що характеризують процеси на ринку ЦКВ. Отримані результати дозволяють учасникам цього ринку мати інструменти, які підтримуватимуть валютну стабільність на ринках традиційних валют і ЦКВ. Запропонована модель може бути використана у програмних продуктах, що застосовуються на торгових майданчиках, призначених для проведення угод по ЦКВ.

**Ключові слова:** цифрові криптовалюти, купівля-продаж цифрових криптовалют, диференціальна гра, стратегія, множина переваги.

### Вступ

Останнім часом у світі фінансів особливу увагу привертає сфера цифрових криптовалют (ЦКВ). Викликано це передусім тим, що вони не регулюються жод-  
© В.П. МАЛЮКОВ, І.В. МАЛЮКОВА, 2024

ною державною системою. Функція спостереження та контролю в цьому разі лежить на користувачах мережі і власниках ЦКВ. У контексті економічних відносин ЦКВ може бути як інвестицією, так і об'єктом інвестиційної діяльності. Це особливий електронний платіжний засіб (електронні гроші), курс якого (яких) підтримується лише попитом та пропозицією [1, 2].

Ключовий момент однієї з перших ЦКВ, біткоїну (BTC — Bitcoin), полягає у тому, що ця технологія дозволяла двом людям обмінюватися грошима особисто без посередника і робити це повністю у цифровій формі. Сьогодні понад сто тисяч організацій приймають до оплати біткоїни. Якщо розглядати глобальний ринок, до таких компаній можна віднести: Overstock.com (найбільший роздрібний торговець), BlackRock, Virgin Galactic, Wordpress, PayPal (eBay), Tesla, Microsoft, Dell, AirBaltic, Air Lituania, LOT тощо. Іншою опцією використання біткоїну є купівля подарункових карток у таких магазинах, як Walmart, Amazon, Target та Nike.

Багато країн світу застосовують ЦКВ у фінансових операціях. Це сприяє зростанню ринкової капіталізації ринків ЦКВ, що дає підстави для більш глибокого аналізу процесів на цьому ринку та розроблення нових методів та моделей, які дозволяють удосконалити процеси управління торговельними операціями з ЦКВ.

Ринок ЦКВ є відносно новим. Незважаючи на те що біткоїн був створений ще у 2009 році, інвестиційні властивості цього активу повноцінно виявилися лише у 2017 році. Зокрема, валютні пари BTC–USD, ETH (Ethereum)–USD та інші знайшли своє визнання на міжнародному фінансовому інформаційному майданчику Yahoo Finance, що ще раз підтверджує інвестиційну значущість відповідних активів. Слід зазначити, що валютна пара BTC–ETH від BlackRock є лідером надходження коштів на біржові фонди флагманської криптовалюти. З часу запуску спотового біржового біткоїн-фонду під управлінням BlackRock на початок січня 2024 року вартість активів досягла \$13,5 млрд.

Як відомо, ціна активу визначається лише балансом попиту та пропозиції. Там, де пропозиція відповідає попиту, з'являється ринок. Це дає можливість вирішувати проблему підвищення вартості фінансового активу, зокрема вартості криптоактивів, на відповідному ринку, де виникають різні тренди, що вказують на напрямки руху ціни криптовалюти. Основними ринковими трендами є «бичий» та «ведмежий»: перший відповідає ситуації, коли ціни постійно зростають, другий — коли ціни постійно знижуються. Можливі випадки, коли немає чітко вираженого тренду. Виникнення трендів є наслідком багатьох чинників, особливо застосування торгових стратегій учасниками ринку. Постійне зростання капіталізації ринку ЦКВ веде до створення моделей управління торгівлею ЦКВ із застосуванням методів теорії ігор. У статті запропоновано модель управління процесом торгівлі ЦКВ, що базується на представленні процедури цієї торгівлі як білінійної диференціальної гри. Білінійність відіграє істотну роль, оскільки процес торгівлі вимагає використання процедури розподілу ЦКВ, яка полягає у визначенні частини криптовалюти на купівлю або на її продаж та частини, яка залишається у покупця або продавця для його торговельних операцій у майбутньому. Така процедура визначає білінійну динаміку ЦКВ. Дана модель дозволяє ефективно прогнозувати виникнення трендів ціни криптовалюти і, відповідно, приймати рішення або про купівлю, або про продаж ЦКВ.

Хоча інвестиційній діяльності на ринках ЦКВ, а також питанням аналізу та оцінки ефективності інвестицій у ЦКВ присвячено багато наукової літератури, питанням управління процедурою купівлі-продажу ЦКВ на основі теорії ігор досі не приділялося великої уваги. Теоретико-ігрове моделювання в задачах управління процедурами купівлі-продажу ЦКВ з урахуванням конфліктності та породже-

них ними економічних та фінансових ризиків для інвесторів дозволяє оцінити рівень надійності потенційних угод на ринку ЦКВ і зменшити рівні відповідних ризиків для інвестицій у ЦКВ.

### Огляд літератури

Досить швидко можна переконатися, що інтерес до ринку ЦКВ стрімко зростає впродовж невеликого проміжку часу. Спочатку інтерес до ЦКВ виявляли виключно ентузіасти [1–4], а потім цей ринок зацікавив дуже широке коло інвесторів [5–8]. Сьогодні багато держав та їхніх фінансових організацій, таких як банки, кредитні та страхові компанії, мають у своїх активах ЦКВ [9–11], обговорюють питання про повне визнання ЦКВ як повноцінного платіжного засобу і, відповідно, просують ідею розвитку повноцінних платіжних систем для ЦКВ на рівні держав. Зараз у світі активно функціонують спеціалізовані криптовалютні біржі [12–15], що сприяють веденню торгів між приватними інвесторами і окремими компаніями, які визнають ЦКВ як легітимні платіжні засоби [15].

Можна говорити про певну відповідність між класичною біржовою діяльністю та діяльністю бірж, що займаються угодами з ЦКВ. Однак динаміка зміни цін на ринку ЦКВ не співставна з динамікою зміни цін на класичних біржових майданчиках. Це робить задачу прогнозування курсів ЦКВ та аналізу ризиків інвестування у ЦКВ надзвичайно актуальною. Саме розгляду цієї задачі і присвячено проведене дослідження.

Аналіз наукових публікацій показує, що питання привабливості інвестицій у ЦКВ вивчено не до кінця. Здебільшого дослідження зосереджені на такому аспекті, як волатильність (мінливість) ЦКВ [11–15]. Майже кожен із авторів [8–15] розглядає біткоїн як альтернативу традиційним грошам, наголошуючи на перспективах їхнього подальшого поширення та використання в економіці як світової валюти. Разом з тим більшість вчених і практиків відзначають значну волатильність криптовалют. Це робить BTC та інші ЦКВ досить ризикованими об'єктами інвестування.

Успішний розвиток економіки будь-якої держави [8, 9] неможливий без стабільної валюти. Особливо це важливо нині, коли держави розпочали цифрову трансформацію економіки. Для підтримки стабільності національної валюти розробляються різні моделі, які поряд із наявними чинниками враховують нові, пов'язані з переходом до епохи суцільної інформатизації. При цьому найбільшу цінність становлять моделі, що дозволяють застосовувати науково обґрунтовані методи підтримки валютної стабільності. Саме така модель пропонується у цій роботі.

Багато дослідників, що представляють різні напрямки науки, починаючи від математиків і закінчуючи практикуючими психологами, стали приділяти феномену ЦКВ пильну увагу. На цей час огляд публікацій за останні роки показав, що відсутня чітка методологічна основа, яка дозволяє повною мірою дати вичерпний опис ринків ЦКВ та, що важливіше, сформулювати однозначний прогноз про їхні перспективи. Адже саме ці перспективи багато в чому диктують інтерес інвесторів до даного виду фінансових ресурсів як до джерела накопичення.

Зазначимо, що для багатьох задач у різних сферах людської діяльності, у тому числі в економіці чи торгівлі, прогноз є виключно важливим. Оскільки якісний математично обґрунтований прогноз має особливе значення для задач інвестування в ЦКВ, розглянемо питання щодо методів прогнозування для валютного ринку.

Все сказане вище й зумовило мету дослідження, яка полягає у розробці багатофакторної диференціальної моделі торговельних операцій з ЦКВ на базі апарата білінійних диференціальних ігор якості з кількома термінальними поверхнями.

## Багатофакторна диференціальна модель торговельних операцій з цифровими криптовалютами

Вважаємо, що в торговельних операціях на ринку ЦКВ у неперервному процесі купівлі-продажу за допомогою множини ЦКВ (наприклад, ADA (Cardano), BTC (Bitcoin), DOT (Polkadot), EOS (EOS), ETC (Ethereum Classic), ETH (Ethereum), LINK (Chainlink), LTC (Litecoin), XRP (XRP) та ін.) беруть участь два гравці.

Опишемо безперервну процедуру купівлі-продажу ЦКВ, яка є базисною для створення багатофакторної диференціальної моделі ЦКВ.

Отже, перший гравець, що має набір цифрових криптовалют ЦКВ1, що дорівнює  $x(0) = (x_1(0), \dots, x_K(0))$ , купує (або продає) набір цифрових криптовалют ЦКВ2, що дорівнює  $y(0) = (y_1(0), \dots, y_M(0))$ , у другого гравця. Другий гравець, якому належить ЦКВ2, продає (або купує) ЦКВ1. Перед початком торговельної сесії встановлено спот-курси ЦКВ1 стосовно ЦКВ2 (тобто вартість одиниці ЦКВ1, виражену у вартості ЦКВ2 та визначену на час угоди) і навпаки.

Позначимо  $\Psi$  матрицю спот-курсів валют другої групи до валют першої групи. Елемент матриці означає спот-курс  $j$ -валюти другої групи по відношенню до  $i$ -ї валюти першої групи ( $i = 1, \dots, K; j = 1, \dots, M$ ). Позначимо  $\Phi$  матрицю спот-курсів валют першої групи до валют другої групи. Елемент  $\phi_{ij}$  матриці означає спот-курс  $i$ -валюти першої групи по відношенню до  $j$ -ї валюти другої групи ( $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, K$ ). Зазначимо, що спот-курси цифрових валют є постійними для будь-якого моменту  $t \in [0, +\infty)$ .

У момент  $t \in [0, +\infty)$  перший гравець має набір  $x(t)$  ЦКВ1 на купівлю набору ЦКВ2. Другий гравець має набір  $y(t)$  ЦКВ2 для купівлі ЦКВ1.

Наведемо опис моделі торговельних операцій з обраними ЦКВ. У момент  $t \in [0, +\infty)$  перший та другий гравці поповнюють наявні у них набори  $x(t)$  ЦКВ1 та  $y(t)$  ЦКВ2 і мають обсяги ЦКВ  $A \cdot x(t)$  і  $y(t)$  відповідно. Тут  $A$  і  $B$  — матриці перетворення наборів ЦКВ1 та ЦКВ2 (аналогі темпів зростання в одновимірному випадку), де  $A$  — матриця порядку  $K$  з позитивними елементами, які більші елементів одиничної матриці  $E$  порядку  $K$  або рівні;  $B$  — матриця порядку  $M$  з додатними елементами, які більші елементів одиничної матриці  $E$  порядку  $M$  або рівні.

Гравці виділяють  $U(t) \cdot A \cdot x(t)$  ЦКВ1 та  $V(t) \cdot B \cdot y(t)$  ЦКВ2 на купівлю ЦКВ2 та ЦКВ1 відповідно. Тут  $U(t) \cdot A \cdot x(t)$  — вектор, компоненти якого характеризують витрати цієї криптовалюти першого гравця в процесі купівлі криптовалют другого гравця,  $U(t)$  — діагональна матриця порядку  $K$ , що складається з елементів  $u_i(t): 0 \leq u_i(t) \leq 1, 1 \leq i \leq K$ . Крім того,  $V(t) \cdot B \cdot y(t)$  — вектор, компоненти якого характеризують витрати саме цієї криптовалюти другого гравця в процесі купівлі криптовалют першого гравця;  $V(t)$  — діагональна матриця порядку  $M$ , що складається з елементів  $v_j(t): 0 \leq v_j(t) \leq 1, 1 \leq j \leq M$ .

Передбачається, що в момент проведення торговельної сесії гравцям відомі матриці  $G_{pok}, D_{prod}, D_{prod}^*, \Lambda, \Gamma, \Theta, \Omega, R, \Gamma^*, L, \Omega^*$ , де  $G_{pok}$  — матриця купівлі кожною криптовалютою другої групи криптовалют першої групи; дана матриця розмірності  $K \times M$  складається з елементів  $(g_{ij}^{pok})$ ;  $D_{prod}$  — матриця продажу кожною криптовалютою другої групи на криптовалюти першої групи; ця матриця розмірності  $M \times K$  складається з елементів  $q_{ij}^{prod}$ ;  $D_{prod}^*$  — матриця

розмірності  $M \times K$  з елементами  $1/q_{ij}^{prod}$ ;  $\Lambda$  — діагональна матриця з елементами  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, M$ ):  $\lambda_j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^M \lambda_j = 1$ ;  $\Gamma$  — діагональна матриця з елементами  $\gamma_i$  ( $j=1, \dots, K$ ):  $\gamma_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^K \gamma_i = 1$ ;  $\Theta$  — діагональна матриця з елементами  $\theta_i$  ( $j=1, \dots, K$ ):  $\theta_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^K \theta_i = 1$ ;  $\Omega$  — діагональна матриця з елементами  $\omega_i$  ( $j=1, \dots, K$ ):  $\omega_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^K \omega_i = 1$ ;  $R$  — діагональна матриця з елементами  $r_i$  ( $j=1, \dots, K$ ):  $r_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^K r_i = 1$ ;  $\Gamma^*$  — діагональна матриця з елементами  $\gamma_i^*$  ( $j=1, \dots, M$ ):  $\gamma_i^* \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^M \gamma_i^* = 1$ ;  $L$  — діагональна матриця з елементами  $l_i$  ( $j=1, \dots, M$ ):  $l_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^M l_i = 1$ ;  $\Omega^*$  — діагональна матриця з елементами  $\omega_i^*$  ( $j=1, \dots, M$ ):  $\omega_i^* \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^M \omega_i^* = 1$ .

Фінансово-економічний зміст елементів матриць  $\Lambda$ ,  $\Gamma$ ,  $\Theta$ ,  $\Omega$ ,  $R$ ,  $\Gamma^*$ ,  $L$ ,  $\Omega^*$  наведено нижче.

Ситуація на ринку криптовалют розвивається таким чином, що перший гравець збільшує обсяг набору своїх ЦКВ1 з  $x(t)$  до  $A \cdot x(t)$  та виділяє їхню частину для купівлі набору ЦКВ2 у вигляді набору криптовалют  $U(t) \cdot A \cdot x(t)$ . Після цього він (на підставі статистики попередніх торговельних сесій) визначає структуру (частку) своїх вкладень (витрат) наборів власних ЦКВ1 у кожен криптовалюту другої групи. Ця структура задається матрицею  $\Lambda$  та обумовлюється наступними обставинами: якщо є набір криптовалют  $U(t) \cdot A \cdot x(t)$  першого гравця, то, зробивши операцію  $D_{prod}^* \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t)$ , отримаємо  $M$ -мірний вектор, який «як би» означає обсяг набору криптовалют другого гравця. Однак насправді це визначення дає можливість з'ясувати лише одну компоненту цього  $M$ -мірного вектора, оскільки весь вектор  $U(t) \cdot A \cdot x(t)$  витрачено на купівлю лише цієї компоненти. На інші компоненти (іншу криптовалюту) другого гравця перший гравець не має більше криптовалют, бо вже витратив її. Тому необхідно робити розбиття набору валют на  $M$  частин, щоб можна було купувати весь асортимент криптовалют другого гравця. Це відбувається шляхом введення матриці  $\Lambda$ .

Після визначення матриці  $\Lambda$  перший гравець визначає обсяг валюти другого гравця, яку він купив:  $\Lambda \cdot D_{prod}^* \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t)$ . Це відповідає тому, що обсяг криптовалют першого гравця збільшився на величину  $\Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^* \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t)$ , де  $\Psi$  — матриця спот-курсів криптовалют першого гравця по відношенню до криптовалют другого гравця. Зазначимо, що величина  $\Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^* \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t)$  визначає набір криптовалют першого гравця у випадку, коли всі криптовалюти другого гравця конвертуються в одну конкретну криптовалюту (одну компоненту). Для того щоб конвертація була зроблена в усі компоненти криптовалют першого гравця, вводиться матриця  $\Gamma$ , яка характеризує структуру курсового обміну набору криптовалют другого гравця на набір криптовалют першого гравця.

Отже, вектор  $\Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^* \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t)$  представляє набір криптовалют першого гравця після здійсненої їм купівлі набору криптовалют другого гравця.

Другий гравець, як і перший, виділяє для купівлі криптовалют першого гравця величину набору криптовалют  $V(t) \cdot B \cdot y(t)$ . Проводиться конвертація даного набору криптовалют  $\Psi \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t)$ , де  $\Psi$  — матриця спот-курсів криптовалют першого гравця по відношенню до криптовалют другого гравця. Зазначимо, що тут, як і вище, конвертація зроблена в одну з криптовалют першого гравця (одну компоненту), тому вводиться матриця  $\Theta$  — матриця структури набору криптовалют першого гравця. Тоді отримуємо  $\Theta \cdot \Psi \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t)$  — обсяг набору криптовалют першого гравця, після того як другий гравець виділив набір  $V(t) \cdot B \cdot y(t)$  на купівлю набору криптовалют першого гравця. Розрахунок першого гравця відбувається за купівлю другим гравцем набору криптовалют першого гравця. Зауважимо, що величина  $G_{pok} \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t)$  означає лише одну компоненту з набору криптовалют першого гравця; щоб встановити всі компоненти цього набору, вводиться матриця  $\Omega$  — матриця структури набору криптовалют першого гравця. Тоді вектор  $\Omega \cdot G_{pok} \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t)$  визначає набір криптовалют першого гравця за всіма його компонентами, який був куплений другим гравцем.

Наведені міркування дають можливість з'ясувати обсяги криптовалют першого гравця у випадку, якщо купівля-продаж криптовалют відбувається покроково (дискретно у часі):

$$x^* = A \cdot x(t) + [-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t) + [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}] \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t).$$

Оскільки другий гравець діє абсолютно симетрично, то таким же чином можна визначити обсяги його криптовалют за умови, що процедура купівлі-продажу криптовалют відбувається дискретно у часі:

$$y^* = B \cdot y(t) + [-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}] \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t) + [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t).$$

Щоб формалізувати процедуру купівлі криптовалют гравцями безперервно у часі, необхідно навести додаткові міркування.

Нехай є точково-множинне відображення  $a(\cdot)$  з простору  $R^n$  у множину всіх обмежених підмножин  $\Omega$  простору:  $R^n: a(x) \in \Delta, x \in R^n, \Delta \in \Xi$ . Розглянемо множину пар  $(x, y) \in R^n \times R^n$ , які мають властивість  $y \in a(x)$ . Тоді, якщо заданий вектор  $x(0)$  у просторі  $R^n$ , можна розглянути траєкторію  $x(0), \dots, x(k), \dots; k$  — натуральне число, де  $x(k+1) \in a(x(k))$ . Таким чином, можна задавати динаміку векторів  $x(k)$  у разі, коли змінна часу змінюється дискретно. Для задання процедури зміни безперервно у часі векторів  $x(k)$  зробимо таке припущення.

Нехай  $\delta t: 0 \leq \delta t \leq 1$  — часова змінна. Вважатимемо, що виконується наступна умова.

*Умова.* У момент часу  $t + \delta t$  вектор  $x(t + \delta t)$  трансформується у вектор  $x(t) - \delta t \cdot x(t) + y(t) \cdot \delta t$ , де  $y(t) \in a(x(t))$ . (\*)

Тоді із співвідношення  $\{[x(t) - \delta t \cdot x(t) + y(t) \cdot \delta t] - x(t)\} / \delta t = -x(t) + y(t)$  виходить, що  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \{[x(t) - \delta t \cdot x(t) + y(t) \cdot \delta t] - x(t)\} / \delta t = -x(t) + y(t)$ .

Це означає, що виконується співвідношення  $\dot{x} \in -x + a(x)$ .

Якщо  $a(x)$  складається з одного вектора  $y$ , наприклад  $y = \alpha \cdot x, \alpha \in R$ , то наведене диференціальне включення перетворюється у диференціальне рівняння  $\dot{x} = -x + \alpha \cdot x$ .

Можна навести наступну інтерпретацію умови (\*) (у рамках теорії моделей економічної динаміки [16]): якщо  $x \in R_+^n$ ,  $a(x) \in \Xi^*$ , де  $\Xi^*$  — множина всіх випуклих, обмежених, замкнутих підмножин в  $R_+^n$ ,  $a(\cdot)$  — технологічне відображення деякої моделі економічної динаміки, то пару  $(x, y)$ , де  $y \in a(x)$ , можна назвати технологічним процесом,  $x$  — вектором витрат,  $y$  — вектором випуску моделі економічної динаміки. Умова (\*) означає, що відбувається випуск вектора  $y$  в тій самій пропорції (за часом), що і витрати вектора  $x$ .

Позначимо  $z(t)$  вектор  $(x(t), y(t))$ ;  $a^*(x(t), y(t))$  — вектор  $(x^*, y^*)$ .

Розглянемо для векторів  $z(t)$  функціонування у часі, яке задається за допомогою точкового відображення  $a^*(\cdot, \cdot)$ , яке, по суті, репрезентує процедуру купівлі-продажу криптовалют гравцями.

Вважатимемо, що умова (\*) виконується для векторів  $z(t)$ , які «генеровані» процедурою купівлі-продажу криптовалют. Тоді отримаємо, що виконується наступне твердження.

**Твердження.** *Обсяг набору криптовалют гравців у момент часу  $t \in [0, +\infty)$  при виконанні умови (\*) визначатиметься із співвідношень*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -x(t) + A \cdot x(t) + [-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t) + \\ & + [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}] \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $E$  — одинична матриця порядку  $K$ ,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & -y(t) + B \cdot y(t) + [-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}] \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t) + \\ & + [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $E$  — одинична матриця порядку  $M$ .

Отже, маємо, що величини наборів валют гравців у момент часу  $t \in [0, \infty)$  записуються у вигляді співвідношень (1), (2).

Умовами закінчення торговельної сесії в момент  $t \in [0, \infty)$  буде виконання таких умов:

$$(x(t), y(t)) \in S_0 \quad (3)$$

або

$$(x(t), y(t)) \in F_0 \quad (4)$$

або

$$(x(t), y(t)) \in D_0. \quad (5)$$

Умова, коли гравці продовжують взаємодію, така:

$$(x(t), y(t)) \in H_0. \quad (6)$$

В умовах (3)–(6)

$$S_0 = \bigcup_{i=1}^M \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, x \succ 0, y_i = 0\},$$

$$F_0 = \bigcup_{i=1}^K \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, x_i = 0, y > 0\},$$

$$D_0 = \left\{ \bigcup_{i=1}^M \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, y_i = 0\} \right\} \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^K \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, x_i = 0\} \right\},$$

$$H_0 = \text{int } R_+^{K+M}.$$

Випадок (3) є бажаним для першого гравця, випадок (4) — для другого. У разі виконання умов (3) або (4) взаємодія закінчується. У випадку (5) обидва гравці не досягають своєї мети і взаємодія вважається закінченою. У випадку (6) вони продовжують взаємодію для моментів часу  $t^* > t$ .

Багатофакторну безперервну процедуру купівлі-продажу ЦКВ розглянемо у рамках схеми позиційної диференціальної гри якості з повною інформацією [17–20].

З огляду на симетричність обмежимося розглядом задачі з позиції першого гравця-союзника. Друга задача вирішується аналогічно.

Математична формалізація задачі у рамках схеми вказаної вище гри докладно наведена у [20]. Нагадаємо основні моменти формалізації.

Оскільки система диференціальних рівнянь при довільних реалізаціях стратегій гравців може не мати рішення, виникає питання, що робити у цьому разі. І тому розглядається дискретний аналог системи диференціальних рівнянь, породжений деяким розбиттям  $\Delta$  часової півосі  $[0, +\infty)$ . Потім визначаються ламані Ейлера, які є кусково-лінійними функціями, що отримані «з'єднанням» сусідніх точок змінних  $(x, y)$  прямими лініями, які є значеннями деяких лінійних функцій. Сусідніми точками є точки, в яких часові змінні розташовані поруч. Оскільки задача розглядається у рамках схеми позиційної диференціальної гри з повною інформацією, передбачається, що є гравець-союзник і гравець-противник. Гравець-союзник застосовує свою позиційну стратегію, тобто функцію від позиції  $(t, (x, y))$ , а гравець-противник обирає реалізацію власної стратегії на підставі будь-якої інформації. Припустимо, що гравці обрали свої стратегії. При кожному розбитті часової осі виходить своя ламана Ейлера. Таким чином буде згенерована множина ламаних Ейлера, які є безперервними функціями та породжені вихідним диференціальним рівнянням. Відповідно, множина ламаних Ейлера є множиною рівномірно обмежених і рівномірно безперервних функцій в банаховому просторі  $C[0, T]$ ,  $(T < +\infty)$  безперервних функцій. Отже, ця множина ламаних Ейлера є відносно компактною (згідно з теоремою Арцела), тобто її замикання є компактною множиною, що означає, що будь-яка обмежена послідовність функцій має граничну точку, яка є безперервною функцією. Тоді кожна така гранична точка послідовності ламаних Ейлера буде називатися рухом, породженим стратегіями першого гравця-союзника і розбиттям  $\Delta$  часової півосі  $[0, +\infty)$ , в яких інтервал (діаметр) розбиття  $\Delta$  прагне до нуля. Зазначимо, що якщо стратегії гравців є такими, що існує рішення системи диференціальних рівнянь, то одночасно рух є рішенням такої системи.

Визначення чистої стратегії та множини переваги першого гравця у рамках схеми позиційної диференціальної гри з повною інформацією наведено в [17–20]. Нагадаємо, що множина переваги першого гравця — це множина таких початкових станів гравців, які мають таку властивість, що якщо гра почнеться з них, то перший гравець може вибором своєї стратегії забезпечити в один з моментів часу виконання умови (3). При цьому дана стратегія, обрана першим гравцем, сприяє недопущенню другим гравцем виконання умов (4) у попередні моменти часу. Зазначимо, що за умов (3)–(6) змінні  $(x(t), y(t))$  є значеннями рухів, що породжені стратегіями гравця-союзника.

Множину таких станів будемо називати множиною переваги першого гравця  $W_1$ . Відповідно, стратегії  $U(\cdot)$  першого гравця, які мають зазначені властивості, є його оптимальними стратегіями.

Розв'язання задачі з погляду першого гравця полягає у знаходженні множин «переваги» першого гравця-союзника та його оптимальних стратегій. Аналогічно ставиться задача з погляду другого гравця-союзника.

Питанням розбиття ігрового простору на область переваги гравців присвячені роботи [17–27]. Найбільш геометрично наочною виглядає ситуація у разі дискретного часу з використанням зворотної процедури. Можливі чотири варіанти в залежності від взаємної поінформованості гравців на кожному кроці: мінорантна та мажорантна ігри, які закінчуються за фіксоване число кроків або не пізніше встановленого часу. У кожному із згаданих випадків ігровий простір розбивається на області переваги, які не співпадають. Збіг можливий у випадку спеціальної умови повного вимітання для параметрів гри [22].

Безперервний варіант зворотної процедури формалізовано у [22, 23], у [22] розвинено метод альтернованого інтеграла Л.С. Понтрягіна, а у [23] — метод напівгрупових  $T_\varepsilon$ -операторів Б.Н. Пшеничного. Ці ключові методики досліджено у багатьох роботах послідовників згаданих авторів.

Деяко інший підхід до розбиття на області переваги запропоновано М.М. Красовським [17] у вигляді теорем про альтернативу.

Усі згадані вище методики тісно пов'язані з ідеологією динамічного програмування, в тому чи іншому вигляді реалізують її, намагаючись описати стратегії оптимальної поведінки гравців. Слід зазначити, що в більшості робіт з конфліктно-керованих процесів дослідники, які усвідомлюють складність поставленої задачі, знаходять лише достатні умови для опису деяких частин областей переваги гравців, що з практичної точки зору цілком виправдано. У цьому разі слід, очевидно, виділити перший прямий спосіб Л.С. Понтрягіна [22], правило екстремального прицілювання М.М. Красовського [18] та метод вирішальних функцій [19, 23]. Більше того, два останні методи є досить ефективними при аналізі конфліктних ситуацій з групами учасників. Так, достатньо виконати формалізацію ситуації «оточення» на основі вирішальних функцій, враховуючи той факт, що даний метод дає повне аналітичне обґрунтування класичних інженерних методів погонної кривої Ейлера, паралельного переслідування, пропорційної навігації та переслідування по променю для простих рухів [19, 24].

**Рішення задачі з погляду першого гравця.** Репрезентоване рішення диференціальної гри ґрунтується на дискретно-апроксимаційному методі вирішення диференціальних ігор [20]. Суть його полягає в тому, що замість вирішення вихідної диференціальної гри знаходяться рішення багатокрокових ігор, породжених розбиттям часової осі системою напівінтервалів. Потім робиться граничний перехід, де величину максимального інтервалу розбиття спрямовують до нуля. На підставі формалізації рішення диференціальної гри [20], що базується на застосуванні рішень багатокрокових ігор для вирішення диференціальної гри, знаходиться рішення вихідної диференціальної гри.

Розв'язання задачі залежить від співвідношення параметрів, що визначають процедуру протистояння гравця-союзника та гравця-противника.

Усі випадки співвідношення параметрів, що задають безперервну багатофакторну модель ринку ЦКВ, представимо у вигляді двох випадків матричних нерівностей.

**Випадок 1.**

$$[-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \geq 0, [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}] \geq 0,$$

$$[-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}] \leq 0, [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \leq 0.$$

**Випадок 2.**

$$-\{[-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \geq 0, [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}] \geq 0,$$

$$[-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}] \leq 0, [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \leq 0\}.$$

Випадок 1 характеризує ситуацію, коли перший гравець-союзник може досягти своєї мети за умови, що початкові стани гравців належать його множині переваги. Другий гравець-противник при такому співвідношенні параметрів гри досягти мети не може. У випадку 2 ймовірні різні варіанти, у тому числі такі, коли у гравців множини переваги може і не бути.

Зазначимо, що наведені умови випадків 1 та 2 є достатніми, але не є необхідними.

Розглянемо випадок 1.

$$[-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \geq 0, [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}] \geq 0,$$

$$[-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}] \leq 0, [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \leq 0.$$

Введемо позначення

$$c_*^i = \sum_{j=1}^K \{[L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} / \left\{ \sum_{j=1}^K \{[L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} \right\} \times \\ \times [(L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*) \cdot A]_j^\Sigma, \quad (7)$$

$$b_*^i = \sum_{j=1}^K \{[-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} / \left\{ \sum_{j=1}^K \{[-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} \right\} \times \\ \times [(-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*) \cdot A]_j^\Sigma. \quad (8)$$

Тут запис  $(G)^\Sigma$ , де  $G$  — будь-яка матриця, означає суму стовпців цієї матриці,  $q_*^i$  — величина, яка дорівнює величині  $c_*^i / b_*^i$ .

Позначимо  $W_1^i$  множини початкових станів  $(x(0), y(0)) \in R_+^{K+M}$ , що задовольняють співвідношення

$$\left\{ y_i(0) < q_*^i \cdot \left\{ \sum_{j=1}^K \{[L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} / \left[ \sum_{j=1}^K \{[L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} \right] \cdot x_j(0) \right\} \right\}_i.$$

Тобто  $W_1^i = \{(x(0), y(0)) : (x(0), y(0)) \in R_+^{K+M},$

$$\left. \left\{ y_i(0) < q_*^i \cdot \left\{ \sum_{j=1}^K \{[L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} / \left[ \sum_{j=1}^K \{[L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A\}^{ij} \right] \cdot x_j(0) \right\} \right\}_i \right\},$$

$$i = 1, \dots, M,$$

$$W_1 = \left( \bigcup_{i=1}^M W_1^i \right). \quad (9)$$

Справедлива наступна теорема.

**Теорема.** *Задача має рішення при виконанні умов випадку 1 та умови:*

$$\sum_{j=1}^K \{ [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A \}^{ij} / \left\{ \sum_{j=1}^K \{ [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot A \}^{ij} \right\} \cdot (A)_j^{\sum} \succ \sum_{j=1}^M B^{ij}. \quad (10)$$

Множина переваги першого гравця-союзника  $W_1$  визначається співвідношенням (9), а оптимальна стратегія  $U_*(.)$  — так:

$$U_*(.) = \begin{cases} E, & (x, y) \in W_1, \\ \text{не визначена,} & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

де  $E$  — одинична матриця порядку  $K$ .

*Доведення.* Як зазначалося, рішення вихідної диференціальної гри знаходиться за допомогою рішень багатокрокових ігор, які «згенеровані» розбиттям часової осі системою напівінтервалів. Без зменшення спільності вважатимемо, що система напівінтервалів  $t_{i+1} - t_i = \delta_i t = \delta t$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ) має ту саму довжину (діаметр)  $\delta t$ . Це припущення не зменшує можливості знайти рішення диференціальної гри. Для формалізації рішення багатокрокової гри, породженої розбиттям часової осі системою напівінтервалів  $t_{i+1} - t_i = \delta_i t = \delta t$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ), запишемо дискретний аналог системи (1), (2):

$$\begin{aligned} x(t + \delta t) &= (1 - \delta t) \cdot E \cdot x(t) + \delta t \cdot A \cdot x(t) + \delta t \cdot [-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*] \times \\ &\quad \times U(t) \cdot A \cdot x(t) + \delta t \cdot [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}] \cdot V(t) \cdot B \cdot y(t), \\ y(t + \delta t) &= (1 - \delta t) \cdot E \cdot y(t) + \delta t \cdot B \cdot y(t) + \delta t \cdot [-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}] \times \\ &\quad \times V(t) \cdot B \cdot y(t) + \delta t \cdot [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*] \cdot U(t) \cdot A \cdot x(t). \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$Q_1 = \delta t \cdot [-E + \Gamma \cdot \Psi \cdot \Lambda \cdot D_{prod}^*], \quad Q_2 = \delta t \cdot [\Theta \cdot \Psi - \Omega \cdot G_{pok}],$$

$$S_1 = \delta t \cdot [-E + \Gamma^* \cdot \Phi \cdot R \cdot G_{pok}], \quad S_2 = \delta t \cdot [L \cdot \Phi - \Omega^* \cdot D_{prod}^*],$$

$$x(n \cdot \delta t) = x(n), \quad x(n \cdot \delta t + \delta t) = x(n+1),$$

$$y(n \cdot \delta t) = y(n), \quad y(n \cdot \delta t + \delta t) = y(n+1); \quad n = 0, 1, \dots$$

Отримаємо

$$x(n+1) = (1 - \delta t) \cdot E \cdot x(n) + \delta t \cdot A \cdot x(n) + Q_1 \cdot U(n) \cdot A \cdot x(n) + Q_2 \cdot V(n) \cdot B \cdot y(n),$$

$$y(n+1) = (1 - \delta t) \cdot E \cdot y(n) + \delta t \cdot B \cdot y(n) + S_1 \cdot V(n) \cdot B \cdot y(n) + S_2 \cdot U(n) \cdot A \cdot x(n).$$

Після задання багатокрокової динаміки визначимо цілі гравців у такій багатокроковій грі.

Умовами закінчення торговельної сесії у багатокроковій грі в момент  $t_n \in [0, +\infty)$  буде виконання умов

$$(x(t_n), y(t_n)) \in S_0^* \quad (11)$$

або

$$(x(t_n), y(t_n)) \in F_0^* \quad (12)$$

або

$$(x(t_n), y(t_n)) \in D_0^* \quad (13)$$

Умова, коли гравці продовжують взаємодію, така:

$$(x(t_n), y(t_n)) \in H_0^* \quad (14)$$

В умовах (11)–(14)

$$S_0^* = \bigcup_{i=1}^M \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, x \geq 0, y_i < 0\},$$

$$F_0^* = \bigcup_{i=1}^K \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, x_i < 0, y \geq 0\},$$

$$D_0^* = \left\{ \bigcup_{i=1}^M \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, y_i < 0\} \right\} \cap \left\{ \bigcup_{i=1}^K \{(x, y) : (x, y) \in R^{K+M}, x_i < 0\} \right\},$$

$$H_0^* = R_+^{K+M}.$$

Випадок (11) є бажаним для першого гравця, випадок (12) — для другого. У разі виконання умов (11) або (12) взаємодія закінчується. У випадку (13) обидва гравці не досягають своєї мети і взаємодія вважається закінченою. У випадку (14) вони продовжують взаємодію для часу  $t_j > t_n$ .

Багатокрокова гра, що моделює процедуру купівлі-продажу ЦКВ у випадку дискретного часу, розглянута в рамках схеми багатокрокової позиційної гри якості з повною інформацією [17–20].

Внаслідок симетричності обмежимося розглядом задачі з позиції першого гравця-союзника. Задача з позиції другого гравця вирішується аналогічно.

Визначення чистої стратегії та множини переваги першого гравця наведено у [17–20]. Нагадаємо, що множина переваги першого гравця — це множина таких початкових станів гравців, які мають таку властивість, що якщо гра почнеться з них, то перший гравець може вибором своєї стратегії  $U_1^*(\dots)$  забезпечити в один з моментів часу  $t_n$  виконання умови (11). При цьому дана стратегія, обрана першим гравцем, сприяє недопущенню другим гравцем виконання умов (12) у попередні моменти часу.

Множину таких станів будемо називати множиною переваги першого гравця  $W_1^*$ . Відповідно, стратегії  $U_1^*(\dots)$  першого гравця, які мають зазначені властивості, є його оптимальними стратегіями.

Розв'язання задачі з погляду першого гравця полягає у знаходженні множин «переваги» першого гравця-союзника та його оптимальних стратегій. Аналогічно ставиться задача з погляду другого гравця-союзника.

Почнемо процедуру побудови множини переваги першого гравця-союзника, яка полягає у побудові зворотної конструкції, заснованої на застосуванні методу динамічного програмування [17–19].

Нехай виконуються умови, що відповідають випадку 1. Тоді  $S_1 \leq 0$ ,  $S_2 \leq 0$ .

**Крок 1.** Знаходимо множину станів гри, які мають таку властивість, що якщо багатокрокова (дискретна за часом) гра почнеться з цих станів, то перший гравець досягне своєї мети.

Для цього на початку знаходяться реалізації стратегій гравців, які, на погляд останніх, є найкращими з їхнього боку. Це означає, що при  $n = 0$   $U(0) = E$ ,  $V(0) = 0$ .

Отримаємо  $\{(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot B\} \cdot y(0) \prec -S_2 \cdot A \cdot x(0)_i$ .

Позначимо  $T_1 = [(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot B]$ ,  $H_1 = -S_2 \cdot A$ , де  $S_2 \cdot A$  — матриця розмірності  $M \times K$ ,  $T_1$  — квадратна матриця порядку  $M$ ,  $Q_1$  — квадратна матриця порядку  $K$ ,  $S_2$  — прямокутна матриця розмірності  $M \times K$ ,  $Q_2$  — прямокутна матриця розмірності  $K \times M$ ,  $S_1$  — квадратна матриця порядку  $M$ .

Тоді буде така нерівність:  $\{T_1 \cdot y(0) \prec H_1 \cdot x(0)\}_i$ .

**Крок 2.**

$$\{T_1 \cdot y(1) \prec H_1 \cdot x(1)\}_i. \quad (15)$$

Розпишемо (15) і отримаємо

$$\begin{aligned} & \{T_1 \cdot \{(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot B\} \cdot y(0) + S_1 \cdot V(0) \cdot B \cdot y(0) + S_2 \cdot U(0) \cdot A \cdot x(0)\} \prec H_1 \cdot \\ & \times \{(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot A\} \cdot x(0) + Q_1 \cdot U(0) \cdot A \cdot x(0) + Q_2 \cdot V(0) \cdot B \cdot y(0)\}_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Для вибору стратегій необхідно дивитися на знаки елементів  $i$ -го рядка матриць  $T_1 \cdot S_1 - H_1 \cdot Q_2$  та  $H_1 \cdot Q_1 - T_1 \cdot S_2$ .

Нехай виконуватимуться такі співвідношення:

$$\{T_1 \cdot S_1 - H_1 \cdot Q_2\}_i \prec 0 \text{ та } \{H_1 \cdot Q_1 - T_1 \cdot S_2\}_i \succ 0. \quad (17)$$

Тоді  $V(0) = 0$  і  $U(0) = E$ , а нерівність (16) набуде вигляду

$$\{T_1 \cdot \{(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot B\} \cdot y(0)\} \prec \{H_1 \cdot [(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot A] \cdot x(0) + [H_1 \cdot Q_1 - T_1 \cdot S_2] \cdot A \cdot x(0)\}_i.$$

Введемо позначення

$$\{T_2\}_i = \{T_1 \cdot [(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot B]\}_i,$$

$$\{H_2\}_i = \{H_1 \cdot [(1-\delta t) \cdot E + \delta t \cdot A] + H_1 \cdot Q_1 \cdot A - T_1 \cdot S_2 \cdot A\}_i.$$

Для будь-якого  $k = 1, \dots$  запишемо

$$\{T_{k+1}\}_i = \{T_k \cdot [(1-\delta t) + \delta t \cdot B]\}_i,$$

$$\{H_{k+1}\}_i = \{H_k \cdot [(1-\delta t) + \delta t \cdot A] + H_k \cdot Q_1 \cdot A - T_k \cdot S_2 \cdot A\}_i.$$

Слід зазначити, що запис цих матриць виходить, якщо гравці застосовують реалізації  $U(n) = E$ ,  $V(n) = 0$  (нульова матриця).

Вживання гравцями таких реалізацій є правомірним, оскільки з умови (1) випливає, що для будь-якого  $k$  виконуватимуться співвідношення

$$T_k \cdot S_1 - H_k \cdot Q_2 \leq 0 \text{ і } H_k \cdot Q_1 - T_k \cdot S_2 \geq 0. \quad (18)$$

Позначимо  $(W_1^*)_i^k$  таку множину:

$$(W_1^*)_i^k = \{(x(0), y(0)) : (x(0), y(0)) \in R_+^{K+M}, [T_k \cdot y(0)]_i \prec [H_k \cdot x(0)]_i\}.$$

Тоді  $W_1^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^K (W_1^*)_i^k$  буде множиною переваги першого гравця-союзника

в багатокроковій грі, а функція

$$U_1^*(\dots): U_1^*(\dots) = \begin{cases} E, & (x, y) \in W_1^*, \\ \text{не визначена,} & \text{в іншому разі,} \end{cases}$$

де  $E$  — квадратна матриця порядку  $K$ , є оптимальною стратегією першого гравця-союзника.

Множини оптимальності та оптимальної стратегії у другого гравця-союзника при виконанні умови 1 у такій багатокроковій грі не існує.

На основі рішень багатокрокових ігор знайдемо рішення диференціальної гри.

Позначимо  $q_k^i(\delta t)$  ( $i=1, \dots, M$ ) величину  $\left( \frac{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}}{\sum_{j=1}^K T_k^{ij}} \right)$ .

Проведемо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^K H_{k+1}^{ij} &= (1-\delta t) \cdot \sum_{j=1}^K H_k^{ij} + \delta t \cdot \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K (H_k^{im} \cdot A^{mj}) + \\ &+ \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K \{ [H_k^{im} \cdot (Q_1 \cdot A)^{mj}] - [T_k^{im} \cdot (S_2 \cdot A)^{mj}] \}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^M T_{k+1}^{ij} = (1-\delta t) \cdot \sum_{j=1}^M T_k^{ij} + \delta t \cdot \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M (T_k^{im} \cdot B^{mj}). \quad (20)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^K H_{k+1}^{ij} &= (1-\delta t) \cdot \sum_{j=1}^K H_k^{ij} + \delta t \cdot \left( \frac{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}}{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}} \right) \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K \left[ \left( \frac{H_k^{im}}{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}} \right) \cdot (A^{mj}) \right] + \\ &+ \left( \frac{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}}{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}} \right) \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K \left\{ \left[ \left( \frac{H_k^{im}}{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}} \right) \cdot (Q_1 \cdot A)^{mj} \right] - \right. \\ &\left. - \left[ \left( \frac{T_k^{im}}{\sum_{j=1}^K T_k^{ij}} \right) \cdot (S_2 \cdot A)^{mj} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^M T_{k+1}^{ij} = (1-\delta t) \cdot \sum_{j=1}^M T_k^{ij} + \delta t \cdot \left( \frac{\sum_{j=1}^M T_k^{ij}}{\sum_{j=1}^M T_k^{ij}} \right) \left( \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \left[ \left( \frac{T_k^{im}}{\sum_{j=1}^M T_k^{ij}} \right) \cdot (B^{mj}) \right] \right).$$

Позначимо  $\gamma_{k,i}^{sred}(A^j)$  середню величину компонентів  $j$ -го стовпця матриці  $A$ , що дорівнює величині  $\sum_{m=1}^K \left[ \left( \frac{H_k^{im}}{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}} \right) \cdot A^{mj} \right]$ ;  $\lambda_{k,i}^{sred}((Q_1 \cdot A)^j)$  —

середню величину компонентів  $j$ -го стовпця матриці  $Q_1 \cdot A$ , що дорівнює величині  $\sum_{m=1}^K \left[ \left( \frac{H_k^{im}}{\sum_{j=1}^K H_k^{ij}} \right) \cdot (Q_1 \cdot A)^{mj} \right]$ ;  $\psi_{k,i}^{sred}((S_2 \cdot A)^j)$  — середню величину

ну компонентів  $j$ -го стовпця матриці  $S_2 \cdot A$ , що дорівнює величині

$$\sum_{m=1}^M \left[ \left( T_k^{im} / \sum_{j=1}^M T_k^{ij} \right) \cdot (S_2 \cdot A)^{mj} \right]; \quad \varphi_{k,i}^{sred} ((B)^j) — середню величину компонентів$$

$$j\text{-го стовпця матриці } B, \text{ що дорівнює величині } \sum_{m=1}^M \left[ \left( T_k^{im} / \sum_{j=1}^M T_k^{ij} \right) \cdot B^{mj} \right].$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} q_{k+1}^i(\delta t) = & \left\{ (1-\delta t) \cdot q_k^i(\delta t) + \delta t \cdot q_k^i(\delta t) \cdot \left( \sum_{j=1}^K \gamma_{k,i}^{sred} (A^j) \right) + \right. \\ & + q_k^i(\delta t) \cdot \left. \left\{ \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K [\lambda_{k,i}^{sred} ((Q_1 \cdot A)^j) \cdot (Q_1 \cdot A)^{mj}] - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K [\psi_{k,i}^{sred} ((S_2 \cdot A)^j) \cdot (S_2 \cdot A)^{m,j}] \right\} / \left\{ (1-\delta t) + \delta t \cdot \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \varphi_{k,i}^{sred} (B^j) \right\} \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Позначимо  $a^i = \left( \sum_{j=1}^K \gamma_{k,i}^{sred} (A^j) \right)$  середню величину компонент суми стовпців

матриці  $A$ ;  $b^i = \left( \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K \lambda_{k,i}^{sred} ((Q_1 \cdot A)^j) \right)$  — середню величину компонент суми сто-

впців матриці  $Q_1 \cdot A$ ;  $c^i = \left( \sum_{j=1}^K \sum_{m=1}^K \psi_{k,i}^{sred} ((S_2 \cdot A)^j) \right)$  — середню величину компонент

суми стовпців матриці;  $d^i = \left( \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \varphi_{k,i}^{sred} (B^j) \right)$  — середню величину компонент суми стовпців матриці  $B$ .

Вставимо в (21)  $q_{k+1}^i(\delta t) = \{ [1-\delta t] \cdot q_k^i(\delta t) + \delta t \cdot q_k^i(\delta t) \cdot a^i + q_k^i(\delta t) \cdot b^i - c^i \} / \{ [1-\delta t] + \delta t \cdot d^i \}$ .

Методом математичної індукції показано, що при виконанні умови (10) послідовність  $q_k^i(\delta t)$  є зростаючою по  $k$  для будь-якого  $\delta t$  і обмеженою зверху. Отже, має межу (ліміт) по змінній  $k$ . Позначимо її  $q_*^i(\delta t)$ . Тоді отримаємо  $q_*^i(\delta t) = \{ [1-\delta t] \cdot q_*^i(\delta t) + \delta t \cdot q_*^i(\delta t) \cdot a^i + q_*^i(\delta t) \cdot b^i - c^i \} / \{ [1-\delta t] + \delta t \cdot d^i \}$ ;  $q_*^i(\delta t) \cdot \delta t \cdot d^i = \{ [\delta t \cdot q_*^i(\delta t) \cdot a^i + q_*^i(\delta t) \cdot b^i - c^i] \}$ ;  $q_*^i(\delta t) \cdot [\delta t \cdot d^i - \delta t \cdot a^i - b^i] = -c^i$  або  $q_*^i(\delta t) = c^i / [b^i + \delta t \cdot (a^i - d^i)]$ .

Тоді межа (ліміт)  $q_*^i$  при  $\delta t \rightarrow 0$  буде дорівнювати  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} [c^i / b^i] = c_*^i / b_*^i$  (див. (7), (8)).

Розглянемо нерівність  $[T_k \cdot y(0)]_i < [H_k \cdot x(0)]_i$ . Приведемо її до вигляду

$$\left[ (T_k \cdot y(0)) / \left( \sum_{j=1}^M T_k^{ij} \right) \right]_i < (q_k^i(\delta t)) \times \left[ (H_k \cdot x(0)) / \left( \sum_{j=1}^K H_k^{ij} \right) \right]_i. \quad (22)$$

При переході в нерівності (22) до межі (ліміту) по  $k \rightarrow \infty$  і по  $\delta t \rightarrow 0$  отримаємо доведення теореми.

Знаходження множини переваги першого гравця-союзника та його оптимальних стратегій у випадку 2 аналогічне.

Задача з погляду другого гравця-союзника вирішується симетрично.

*Зауваження.* Оскільки у моделі використовуються діагональні матриці, що задають структури векторів ЦКВ, то можна ними керувати, змінюючи діагональні елементи з метою отримання необхідного результату.

### Обчислювальний експеримент

У середовищі MahtCad проведено обчислювальний експеримент для задачі пошуку множини переваги інвестора в криптовалюту ЦКВ2. Результат обчислювального експерименту 1, де відображено траєкторію руху гравців на ринку біткоїнів, показано на рис. 1.

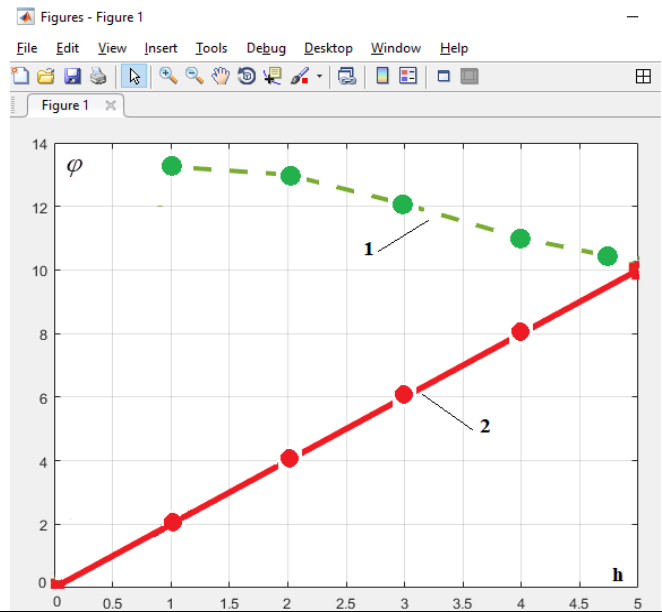


Рис. 1

Результат обчислювального експерименту 2, де відображено промінь збалансованості, показано на рис. 2.

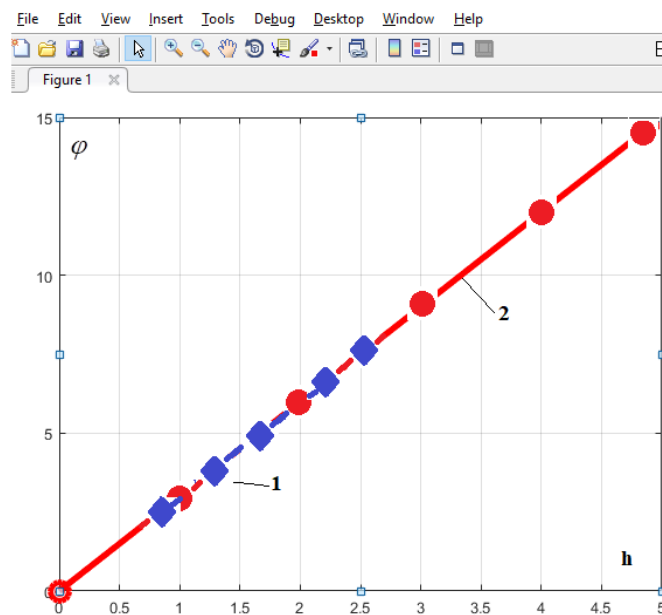


Рис. 2

### Обговорення результатів обчислювального експерименту

На рис. 1, 2 показано, що гравці мають по одній криптовалюти — ЦКВ1 і ЦКВ2. У першого гравця — ЦКВ1, а у другого — ЦКВ2. Це означає, що система диференціальних рівнянь складається з двох одновимірних рівнянь. При вирішенні таких диференціальних ігор знаходяться множини переваги при всіх співвідношеннях параметрів гри. Розглянуто випадки, коли простір гри «розбитий» на дві множини переваги гравців, які розділені променем, що називається променем рівноваги або збалансованості.

На рис. 1 продемонстрована ситуація, коли другий гравець (покупець ЦКВ2) при застосуванні своєї оптимальної стратегії досягає того, що приводить стан системи на свою термінальну поверхню. Якщо траєкторія покупця співпадає з променем збалансованості, це відповідатиме ситуації рівноважного значення курсу криптовалют. У цьому разі (втім, малоймовірному) гравці, що застосовують свої оптимальні стратегії, рухаються по цьому променю. Це задовольняє одночасно обох гравців.

Якщо траєкторія руху перебуватиме під променем збалансованості, це проілюструє ситуацію, коли перший гравець (покупець ЦКВ1) має перевагу у співвідношенні параметрів, тобто вони обидва перебувають у множині його переваги. І тут перший гравець, що застосовує власну оптимальну стратегію, досягне своєї мети: приведення стану системи на «свою» термінальну поверхню.

### Висновок

Розглянуто ігрову модель торговельної сесії на ринку ЦКВ. Показано, що керуваність процесу на торговельній сесії може бути описана з погляду ігрового підходу на основі рішення системи білінійних диференціальних ігор, які дають змогу адекватно репрезентувати процес розподілу обсягів ЦКВ. Такий підхід не відкидає реалізацій гри з боку загального колективного контрагента. Він дозволяє розглянути випадки, що призводять до нестабільності співвідношення фінансових ресурсів гравців, наприклад, ЦКВ1 до ЦКВ2 і навпаки. Новизна моделі полягає у тому, що вона відрізняється від існуючих підходів рішенням білінійної диференціальної гри якості з кількома термінальними поверхнями. Знайдено рішення нової білінійної диференціальної гри якості з залежними рухами, що адекватно описує процедуру купівлі-продажу ЦКВ на ринку криптовалют. Проілюстровано результати обчислювального експерименту, під час якого враховувалися різні співвідношення параметрів, що описують процес купівлі-продажу ЦКВ.

Наведені в роботі результати можуть виявитися корисними для запобігання ситуаціям курсової нестабільності на ринку інвестицій у ЦКВ. Також їх можна використовувати як деякі рекомендації щодо вибору керуючих впливів для підтримки курсової стабільності на ринку інвестування у ЦКВ на рівні великих банківських гравців.

*V. Malyukov, I. Malyukova*

### THE DIGITAL CRYPTOCURRENCY MARKET MODEL WITHIN THE FRAMEWORK OF THE DIFFERENTIAL GAME OF QUALITY

**Volodimir Malyukov**

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv,

*volod.malyukov@gmail.com*

**Inna Malyukova**

Rating agency «Expert-rating», Kyiv,

*imalyukova82@gmail.com*

The article is devoted to the development of a continuous multivariate model of the market of digital cryptocurrencies (DCC) within the framework of the scheme of the differential game of quality. The game model of a trading session on the market of digital cryptocurrencies is considered. It is shown that the controllability of the process in the trading session can be described from the point of view of a game approach based on the solution of a system of bilinear differential games, which make it possible to describe adequately the process of distribution of volumes of digital cryptocurrencies. This approach does not reject implementations of the game by the general collective counterparty. It allows to consider cases that lead to the instability of the ratio of players' financial resources, for example, the digital cryptocurrency DCC1 to the digital cryptocurrency DCC2, and vice versa. The novelty of the model is that it differs from existing approaches by solving a bilinear differential game of quality with several terminal surfaces. A solution to a new bilinear quality differential game with dependent movements has been found, which adequately describes the procedure for buying and selling digital cryptocurrencies on the cryptocurrency market. The article also illustrates the results of a computational experiment. During the computational experiment, various ratios of parameters describing the process of buying and selling digital cryptocurrencies were taken into account. The results presented in the paper may be useful for preventing situations of exchange rate instability in the market of investments in digital cryptocurrencies. Also the obtained results can give some recommendations on the choice of governing influences to maintain exchange rate stability in the market of investing in digital cryptocurrencies at the level of large banking players. The considered approach made it possible constructively to find strategies for currency stability in the DCC market. The proposed approach consists in the adequacy of the developed model to the continuous process of purchase and sale of DCC. The article provides calculations in which various ratios of parameters characterizing processes on the DCC market were considered. The obtained results allow the participants of the DCC market to have tools that allow maintaining currency stability in the markets of traditional currencies and DCC markets. The proposed model can be used in software products that are used on trading platforms designed for transactions on the DCC.

**Keywords:** digital cryptocurrencies, buying and selling digital cryptocurrencies, differential game, strategy, multiple advantages.

#### ПОСИЛАННЯ

1. Trimborn S., Li M., Härdle W.K. Investing with cryptocurrencies — a liquidity constrained investment approach. *Journal of Financial Econometrics*. 2020. Vol. 18, N 2. P. 280–306. DOI: <https://doi.org/10.1093/jjfinec/nbz016>
2. Petukhina A., Trimborn S., Härdle W.K., Elendner H. Investing with cryptocurrencies-evaluating the potential of portfolio allocation strategies. *IRTG 1792 Discussion Paper*. 2018. N 2018-058. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3274193>
3. Hoffmann C.H., Neitzert F., Kraus S., Angerer M. Objective and subjective risks of investing into cryptocurrencies. *Finance Research Letters*. 2021. Vol. 40. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101737>
4. Maiti M., Vukovic D., Krakovich V., Pandey M.K. How integrated are cryptocurrencies. *International Journal of Big Data Management*. 2020. Vol. 1, N 1. P. 64–80. DOI: <https://doi.org/10.1504/IJBDM.2020.106874>
5. Trimborn S., Mingyang L., Härdle W.K. Investing with cryptocurrencies — a liquidity constrained investment approach. SFB 649 Discussion Paper. 2017. N 2017–014.
6. Baur D.G., Dimpfl T. Asymmetric volatility in cryptocurrencies. *Economics Letters*. 2018. Vol. 173. P. 148–151. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.10.008>
7. Peng Y., Albuquerque P.H.M., Sá J.M.C., Padula A.J.A., Montenegro M.R. The best of two worlds: Forecasting high frequency volatility for cryptocurrencies and traditional currencies with support vector regression. *Expert Systems with Applications*. 2018. Vol. 97. P. 177–192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.12.004>

8. Charfeddine L., Maouchi Y. Are shocks on the returns and volatility of cryptocurrencies really persistent? *Finance Research Letters*. 2019. Vol. 28. Issue C. P. 423–430. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.06.017>
9. Caporale G.M., Zekokh T. Modelling volatility of cryptocurrencies using Markov-Switching GARCH models. *Research in International Business and Finance*. 2019. Vol. 48. P. 143–155. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2018.12.009>
10. Glas T.N. Investments in cryptocurrencies: handle with care! *The Journal of Alternative Investments*. 2019. Vol. 22, N 1. P. 96–113. DOI: <https://doi.org/10.3905/jai.2019.22.1.096>
11. Bianchi D. Cryptocurrencies as an asset class? An empirical assessment. *The Journal of Alternative Investments*. 2020. Vol. 23, N 2. P. 162–179. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3077685>
12. Böyükaslan A., Ecer F. Determination of drivers for investing in cryptocurrencies through a fuzzy full consistency method-Bonferroni (FUCOM-F'B) framework. *Technology in Society*. 2021. Vol. 67. 101745. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.techsoc.2021.101745>
13. Dempsey M., Pham H., Ramiah V. Investment in Cryptocurrencies: lessons for asset pricing and portfolio theory. *Applied Economics*. 2022. Vol. 54, N 10. P. 1137–1144. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036846.2021.1998321>
14. Bharadwaj S., Deka S. Behavioural intention towards investment in cryptocurrency: an integration of Rogers' diffusion of innovation theory and the technology acceptance model. *Forum Scientiae Oeconomia*. 2021. Vol. 9, N 4. P. 137–159. DOI: [https://doi.org/10.23762/FSO\\_VOL9\\_NO4\\_7](https://doi.org/10.23762/FSO_VOL9_NO4_7)
15. Petukhina A., Trimborn S., Härdle W.K., Elendner H. Investing with cryptocurrencies—evaluating their potential for portfolio allocation strategies. *Quantitative Finance*. 2021. Vol. 21, N 11. P. 1825–1853. DOI: <https://doi.org/10.1080/14697688.2021.1880023>
16. Makarov V.L., Rubinov A.M. Mathematical theory of economic dynamics and equilibria. New York : Springer-Verlag, 1977. 252 p.
17. Krasovskii N.N. Control of dynamic system. Moscow : Nauka, 1985. 520 p.
18. Krasovskii N.N. Game problems on the encounter of motions. Moscow : Nauka, 1970. 420 p.
19. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London : Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
20. Malyukov V.P. Discrete-approximation method for solving a bilinear differential game. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1993. Vol. 29, N 6. P. 879–888.
21. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Plauer information in discrete games. *Cybernetics*. 1979. Vol. 15, N 5. P. 741–745.
22. Pontryagin L.S. Selected scientific papers. Moscow : Nauka, 1988. Vol. 2. 576 p.
23. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. К. : Наук. думка, 1992. 264 с.
24. Management of securities purchase-sale within the framework of a differential game / V. Malyukov, I. Malyukova, V. Kabyzbekova et al. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*. 2023. Vol. 101, N 13. P. 5240–5248.
25. A model for managing the procedure of continuous mutual financial investment in cybersecurity for the case with fuzzy information / Ber. Akhmetov, V. Lakhno, V. Malyukovat et al. *Sustainable Communication Networks and Application Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. 2022. Vol. 93. P. 539–553. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-981-16-6605-6\\_40](https://doi.org/10.1007/978-981-16-6605-6_40)
26. Malyukov V.P. A constructive method of solving a differential game of quality with two terminal surfaces. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1989. Vol. 29, N 2. P. 1–6. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90001-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90001-3)
27. Malyukov V.P. Game of quality for two groups of objects. *Cybernetics*. 1990. Vol. 26. P. 698–710.

Отримано 28.05.2024