УДК 622.324

М.Н.КУЛИК, академик НАН Украины, доктор техн. наук, профессор,
Институт общей энергетики НАН Украины,
ул. Антоновича, 172, г. Киев, 03150, Украина

ПЕРЕСМОТР ВОЗМОЖНОСТЕЙ МОДЕЛЕЙ РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН И ВЫПУСКОВ В ТЕОРИИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

На основе проведенного анализа многочисленных публикаций, содержащих модели равновесных цен и выпусков теории межотраслевого баланса, доказано, что использование в них транспонированных матриц прямых затрат является необоснованным и приводит к грубым ошибкам. Предложены корректные системы уравнений, связывающие равновесные цены и выпуски в структуре данных «затраты-выпуск». Показано в общем виде, что такие системы относятся к классу однородных систем линейных алгебраических уравнений, их матрицы являются особенными и имеют ранги, на единицу меньшие размерностей матриц. Установлено, что такие системы дают вырожденные решения. С использованием этих свойств из континуального множества решений уточненных моделей равновесных цен и выпусков выделен в общем виде класс их решений, которые можно использовать для определения практически приемлемых значений этих показателей. Предложен алгоритм такого определения, который предусматривает расширение структуры данных «затраты-выпуск». Аналитические исследования иллюстрированы примером расчета равновесных цен и выпусков на основе таблиц «затраты-выпуск» в Украине в 2012 году.

К л ю ч е в ы е   с л о в а: равновесные цены, затраты, выпуск, матрица, определитель, ранг, сектор.

Хорошо известно, что таблицы «затраты-выпуск», из которых формируются модели межотраслевого баланса, составляются в стоимостной форме. Следствием этого является то, что результаты расчетов с использованием моделей межотраслевого баланса также получаются в стоимостной форме. В частности, при прогнозировании объемов выпуска энергетического угля в Украине, например, в 2025 году с использованием моделей межотраслевого баланса мы получим этот показатель в миллиардах гривен. Однако в последующих операциях этот показатель, как правило, необходим в единицах выпуска, а именно, в тоннах. В обширной литературе по межотраслевому балансу [1–5 и др.] задача перевода показателя выпуска в «физические» величины прямо не ставится, однако повсеместно встречаются математические модели, рекомендуемые для вычисления равновесных цен, через которые потом легко определяются равновесные выпуски в единицах выпуска (физических величинах). В данной работе показано, что модели равновесных цен, наведенные в цитированных и многочисленных других источниках, не могут обеспечить правильные результаты и требуют пересмотра. Кроме того, в статье даются рекомендации относительно решения оговоренной задачи.

1. **Пересмотр уравнений баланса затрат.** В.В. Леонтьев [6] впервые предложил использовать статистические таблицы «затраты-выпуск» (1) в целях прогнозирования состояния экономики. В современной конфигурации эти таблицы имеют вид

$\boldsymbol{L}$

Сектор	1	i	j	n
1	x_{11}	x_{1i}	x_{1j}	x_{1n}
i	x_{i1}	x_{ii}	x_{ij}	x_{in}
j	x_{j1}	x_{ji}	x_{jj}	x_{jn}
n	x_{n1}	x_{ni}	x_{nj}	x_{nn}

;

$\boldsymbol{c}$

Кон-е потр-е
c_1
c_i
c_j
c_n

;

$\boldsymbol{x}$

Выпуск
x_1
x_i
x_j
x_n

;

$\boldsymbol{d}'$

Доб-я стоим.	d_1	d_i	d_j	d_n

;

$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{x}'$

Затр-ы, всего	z_1	z_i	z_j	z_n

, (1)

здесь x_{ij} – элементы матрицы промежуточного потребления $\boldsymbol{L}$; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{z}$ – векторы конечного потребления, выпуска, добавленной стоимости и суммарных затрат соответственно. При упомянутом прогнозировании были употреблены уравнения баланса выпуска

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + c_i = x_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

в которых вектор сумм $\sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i = \overline{1,n}$

элементов матрицы $\boldsymbol{L}$ был преобразован к виду

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \sum_{j=1}^{n} x_{ji}, \sum_{j=1}^{n} x_{nj} \right]' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица с элементами

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j},\ i, j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

получившая название матрицы прямых затрат. Введение преобразования (3), (4) позволило В.В. Леонтьеву установить знаменитое уравнение

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица.

В дальнейших исследованиях В.В. Леонтьевым и его последователями в математические модели, построенные на данных таблиц «затраты-выпуск», были привлечены уравнения баланса затрат

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j = z_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

причем в силу природы таблиц (1) имеют место равенства

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} d_i. \tag{8}$$

Для приведения уравнений (6) к матрично-векторному виду единственно возможной операцией является транспортирование всей системы таблиц (1) с дальнейшими преобразованиями, аналогичными (3) – (5), а именно, с учетом (7) эти уравнения приводятся к виду

$$\boldsymbol{Bx} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}, \tag{9}$$

где матрица $\boldsymbol{B}$ имеет элементы

$$b_{ij} = \frac{x_{ji}}{x_j}, \; i, j = \overline{1, n}\,. \tag{10}$$

В итоге уравнение баланса затрат (6) принимает вид

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \tag{11}$$

В публикациях [1 – 5] и многих других утверждается, что для матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ справедливо соотношение

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}' \tag{12}$$

где $\boldsymbol{A}'$ – транспонированная матрица $\boldsymbol{A}$, и, как следствие, уравнение (11) приобретает вид

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}')\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}. \tag{13}$$

Покажем, что зависимости (12), (13) являются неверными. Преобразование (3), (4) приводит к матрице

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & & i & j & \\ \hline & \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{1i}}{x_i} & \frac{x_{1j}}{x_j} & \frac{x_{1n}}{x_n} \\ \hline i & \frac{x_{i1}}{x_1} & \frac{x_{ii}}{x_i} & \frac{x_{ij}}{x_j} & \frac{x_{in}}{x_n} \\ \hline j & \frac{x_{j1}}{x_1} & \frac{x_{ji}}{x_i} & \frac{x_{jj}}{x_j} & \frac{x_{jn}}{x_n} \\ \hline & \frac{x_{n1}}{x_1} & \frac{x_{ni}}{x_i} & \frac{x_{nj}}{x_j} & \frac{x_{nn}}{x_n} \\ \hline \end{array}\,, \tag{14}$$

а преобразование (9), (10) – к матрице

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & & i & j & \\ \hline & \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{i1}}{x_i} & \frac{x_{j1}}{x_j} & \frac{x_{n1}}{x_n} \\ \hline i & \frac{x_{1i}}{x_1} & \frac{x_{ii}}{x_i} & \frac{x_{ji}}{x_j} & \frac{x_{ni}}{x_n} \\ \hline j & \frac{x_{1j}}{x_1} & \frac{x_{ij}}{x_i} & \frac{x_{jj}}{x_j} & \frac{x_{nj}}{x_n} \\ \hline & \frac{x_{1n}}{x_1} & \frac{x_{in}}{x_i} & \frac{x_{jn}}{x_j} & \frac{x_{nn}}{x_n} \\ \hline \end{array}\,. \tag{15}$$

Равенство (12) выполняется, если $b_{ij} = a_{ij}$ при $i, j = \overline{1,n}$. Из (14), (15) видно, что $b_{ij} = a_{ij}$ только для диагональных элементов матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Для недиагональных элементов ($i \neq j$) имеем соотношения

$$b_{ij} = \frac{x_{ji}}{x_j} \neq a_{ji} = \frac{x_{ji}}{x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}; \; i \neq j. \tag{16}$$

Неравенство (16) доказывает, что зависимость (12) неверна, её использование является безосновательным. То же самое относится и к уравнению (13). Между тем их широко применяют многие авторы (в частности, [1 – 5]) в различных приложениях. Особенно часто равенства (12) и (13) используют в уравнениях, где фигурирует вектор добавленной стоимости $\boldsymbol{d}$. Все подобные модели требуют пересмотра, в них нельзя применять матрицу $\boldsymbol{A}'$ вместо матрицы $\boldsymbol{B}$. В первую очередь это относится к публикациям, использующим уравнения для определения равновесных цен и выпусков [1 – 5 и многие другие]. Практические расчеты показывают, что применение матрицы $\boldsymbol{A}'$ вместо матрицы $\boldsymbol{B}$ приводит к грубо неточным результатам. Поэтому в упомянутых и подобных уравнениях необходимо использовать матрицу $\boldsymbol{B}$ с элементами, вычисленными в соответствии с зависимостью (10).

2. **Пересмотр возможностей моделей равновесных цен и выпусков.** Связь между равновесными ценами и выпусками отображается уравнением

$$x_i = P_i M_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

где P_i – равновесная цена продукции i-го сектора, M_i – его выпуск в единицах выпуска.

Уравнения для определения равновесных цен могут быть получены с использованием таблиц «затраты-выпуск» (1) и баланса затрат (6) следующим образом. Каждый из столбцов j матрицы $\boldsymbol{L}$ и соответствующие элементы векторов – строк $\boldsymbol{d'}$ и $\boldsymbol{x'}$ таблиц (1) делятся на величины M_j, $j = \overline{1,n}$ с последующим транспонированием затратной части таблицы, в результате имеем

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \frac{x_{11}}{M_1} & \frac{x_{i1}}{M_i} & \frac{x_{j1}}{M_j} & \frac{x_{n1}}{M_n} \\ \hline \frac{x_{1i}}{M_1} & \frac{x_{ii}}{M_i} & \frac{x_{ji}}{M_j} & \frac{x_{ni}}{M_n} \\ \hline \frac{x_{1j}}{M_1} & \frac{x_{ij}}{M_i} & \frac{x_{jj}}{M_j} & \frac{x_{nj}}{M_n} \\ \hline \frac{x_{1n}}{M_1} & \frac{x_{in}}{M_i} & \frac{x_{jn}}{M_j} & \frac{x_{nn}}{M_n} \\ \hline \end{array}\;,\quad \begin{array}{|c|}\hline \frac{d_1}{M_1} \\ \hline \frac{d_i}{M_i} \\ \hline \frac{d_j}{M_j} \\ \hline \frac{d_n}{M_n} \\ \hline \end{array}\;,\quad \begin{array}{|c|}\hline \frac{x_1}{M_1} \\ \hline \frac{x_i}{M_i} \\ \hline \frac{x_j}{M_j} \\ \hline \frac{x_n}{M_n} \\ \hline \end{array}\;. \qquad (18)$$

Для структуры (18) справедлив баланс затрат в виде

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ji}}{M_j} + \frac{d_i}{M_i} = \frac{x_i}{M_i}, \quad i, j = \overline{1,n}. \qquad (19)$$

С использованием (17) и преобразований, аналогичных (3) – (5), получаем векторно-матричное уравнение равновесных цен

$$\boldsymbol{BP} + \boldsymbol{d_н} = \boldsymbol{P}, \qquad (20)$$

или

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{d_н}, \qquad (21)$$

где $\boldsymbol{d_н}$ – вектор с элементами

$$d_{нi} = \frac{d_i}{M_i}, \quad i = \overline{1,n}\,, \qquad (22)$$

называемыми долей добавленной стоимости на единицу продукции.

В большинстве публикаций (в т. ч., [1 – 5]) используется уравнение (21) с тем отличием, что в нем вместо матрицы $\boldsymbol{B}$ применяют матрицу $\boldsymbol{A'}$. При этом утверждается, что это уравнение надо использовать для вычисления равновесных цен. Выше было доказано, что в уравнениях типа (20), (21) нельзя использовать матрицу $\boldsymbol{A'}$ вместо матрицы $\boldsymbol{B}$. Однако практические вычисления показывают, что даже при строгом использовании уравнений равновесных цен в форме (20), (21) получаем результаты в виде вырожденных решений, неприемлемых в смысловом отношении. Покажем это на примере и далее объясним причину этих явлений.

Пример. С использованием уравнения (21) были рассчитаны равновесные цены и выпуски в «физических» величинах по таблице «затраты-выпуск» в Украине в 2012 г. При этом была использована агрегированная таблица «затраты-выпуск», полученная в [7].

В табл. 1 кроме данных формы «затраты-выпуск» для сравнения приведены матрица прямых затрат А и матрица В, рассчитанные по зависимостям (4) и (10) соответственно. Видно, что равенство (12) для этих матриц не выполняется.

В табл. 2 представлен итерационный процесс расчета равновесных цен и выпусков по форме «затраты-выпуск» табл. 1, который проводился по схеме

Таблица 1 — Агрегированная таблица «затраты-выпуск» в Украине в 2012 г., млн грн, цены 2012 г.

L

№№	Сектор	Промежуточное потребление						***c*** Конечное потребление	***x*** Выпуск, всего
		1	2	3	4	5	6		
1	Сельское хозяйство и др.	80387	554	42	686	348	71006	168160	321183
2	Добывающая промышленность и др.	2954	12764	69432	5632	18991	188306	-107633	190446
3	Электроэнергия, газ и др.	3752	16312	7556	1099	12993	83466	26854	152032
4	Строительство	748	820	603	40883	3929	15193	127710	189886
5	Транспорт и др.	11977	20694	1257	3136	19755	98986	72596	228401
6	Другие секторы	1040301	49042	20122	92815	62540	1218241	1171409	2718199

Валовой внутренний продукт	117335	90260	53020	45635	109845	1043001	***d'***
Затраты, всего	321183	190446	152132	189886	228401	2718199	***x'***

Матрица прямых затрат

A

1	0,250284	0,002909	0,000276	0,003613	0,001524	0,026122
2	0,009197	0,06702	0,456693	0,02966	0,083148	0,069276
3	0,011681	0,085652	0,0497	0,005788	0,056887	0,030706
4	0,002328	0,004306	0,003966	0,215303	0,017202	0,005589
5	0,037290	0,108661	0,008268	0,016515	0,08649	0,036416
6	0,323896	0,257511	0,132354	0,488793	0,273817	0,44818

Нормированная матрица затрат

B

1	0,250284106	0,015511	0,024679	0,003939	0,052438	0,038272
2	0,001724873	0,067022	0,107293	0,004318	0,090604	0,018042
3	0,000130767	0,364576	0,0497	0,003176	0,005503	0,007403
4	0,002135854	0,029573	0,007229	0,215303	0,01373	0,034146
5	0,001083494	0,099719	0,085462	0,020691	0,086493	0,023008
6	0,221076458	0,988763	0,549003	0,080011	0,433387	0,448179

Таблица 2 – Расчет равновесных цен и выпусков по таблицам «затраты-выпуск» в Украине в 2012 г.

Итера-ция	Сектор	P_i^k, грн/…	$d_{нi}^k$, грн/…	$M_i^k \cdot 10^6$	Итера-ция	Сектор	P_i^k, грн/…	$d_{нi}^k$, грн/…	$M_i^k \cdot 10^6$
1	1	1000	365,32	321,18	10	1	1206,7	440,84	266,17
	2	1500	710,91	126,96		2	720,03	341,25	264,5
	3	1000	348,74	152,03		3	575,33	200,64	264,25
	4	2000	480,66	94,94		4	714,74	171,77	265,67
	5	1000	480,93	228,4		5	861,67	414,4	265,07
	6	5000	1918,55	543,64		6	10235,1	3927,3	265,58
2	1	986,3	360,3	325,6	11	1	1208,6	441,53	265,75
	2	1106,1	524,2	172,2		2	719,06	340,79	264,85
	3	859,3	299,7	176,9		3	574,32	200,29	264,72
	4	1012,2	243,3	187,6		4	715,3	171,91	265,46
	5	942,9	453,5	241,7		5	861,43	414,29	265,14
	6	7600	2916,2	357,7		6	10241,3	3929,68	265,42
3	1	1045,9	382,1	307,1	12	1	1209,65		265,52
	2	913,3	432,8	208,5		2	718,56		265,04
	3	742,7	259	204,7		3	573,78		265
	4	757	181,9	250,8		4	715,59		265,36
	5	908,3	436,8	251,5		5	861,3		265,18
	6	8902,6	3416	305,3		6	10244,5		265,33

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{н}}^{\boldsymbol{k-1}}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{T} = \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\right)^{-1}, \tag{24}$$

$$d_{нi}^{k-1} = \frac{d_i}{M_i^{k-1}}, \tag{25}$$

$$M_i^{k-1} = \frac{x_i}{P_i^{k-1}}, \tag{26}$$

$$Max_i \frac{\left|P_i^k - P_i^{k-1}\right|}{P_i^k} \le \varepsilon = 10^{-3}, \tag{27}$$

где $i = \overline{1,n}$; $k = 1,\ldots$ – номер итерации.

Данные табл. 2 позволяют сделать следующие обобщения.

Уравнения (17), (20) имеют решения, которые могут быть найдены применением итерационного алгоритма (23) – (27).

Эти решения удовлетворяют зависимость (17), поэтому формально их можно считать равновесными ценами и выпусками.

Все выпуски M_i, $i = \overline{1,n}$ в полученных решениях имеют одинаковые значения и, как следствие, равновесные цены прямо пропорциональны значениям выпусков x_i в стоимостном исчислении.

В силу этого решения, основанные на уравнениях (17), (20), являются вырожденными и в содержательном плане не могут использоваться в приложениях.

Дополнительные расчеты по уравнениям (17), (20), результаты которых не приведены в данной статье, показывают, что они (уравнения) имеют множество решений. В частности, достаточно в итерационном процессе (23) – (27) изменить начальное приближение по P_i (причем, изменить P_i^0 только в одном секторе), чтобы получить новый вектор решений, т. е. множество решений системы (17), (20) является континуальным.

3. **Особенности системы (17), (20) определения равновесных цен и выпусков.** Отмеченные выше и ряд других особенностей этой системы обусловлены её следующими свойствами.

Система (20) путем подстановки $M_i = x_i / P_i$ в выражение (22) преобразуется в систему однородных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{QP} = 0, \qquad (28)$$

где

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{G}, \qquad (29)$$

а диагональная матрица $\boldsymbol{G}$ имеет элементы

$$g_i = \frac{d_i}{x_i}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (30)$$

Для системы (28) имеется тривиальное решение $\boldsymbol{P} = 0$, которое для определения равновесных цен принято быть не может. Известно, что нетривиальные решения однородной системы существуют лишь в том случае, когда определитель её матрицы равен нулю. Определитель $\boldsymbol{\Delta_s}$ матрицы (29) с использованием (1), (6) и (11) может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\Delta_s} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \boldsymbol{\Delta_x}, \qquad (31)$$

где

$$\boldsymbol{\Delta_x} = \begin{array}{c|cccc|} & & i & j & \\ \hline & x_1 - x_{11} - d_1 & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ i & -x_{1i} & x_i - x_{ii} - d_i & -x_{ji} & -x_{ni} \\ j & -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} - d_j & -x_{nj} \\ & -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_n - x_{nn} - d_n \\ \hline \end{array}. \qquad (32)$$

С учетом (6), (10), (11) можем записать

$$x_i - x_{ii} - d_i = \sum_{j=1\, i \neq j}^{n} x_{ji}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (33)$$

$$x_{ji} = x_i - \sum_{k=1 k \neq j}^{n} x_{ki} - d_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (34)$$

Тогда, суммируя все столбцы определителя (32), кроме j-го, и используя (33), (34), получаем новый столбец

$$\boldsymbol{S'} = \begin{bmatrix} x_{j1} & x_{ji} & -x_j + x_{jj} + d_j & x_{jn} \end{bmatrix}'. \qquad (35)$$

Столбец (35), будучи умноженный на (–1), совпадает с j-м столбцом определителя (32), т. е. этот определитель равен нулю, и система (28) имеет ненулевые решения. Аналогично доказывается, что все миноры матрицы (29), полученные вычеркиванием ее i-х строк и столбцов, равны нулю.

Согласно теории однородных систем [8] для определения решений системы уравнений (28) необходимо найти ранг матрицы $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G}$.

Покажем, что эта матрица имеет ранг

$$r = n - 1. \tag{36}$$

Для этого достаточно, чтобы один из её миноров имел ранг $n-1$. Рассмотрим определитель матрицы (29), у которой вычеркнуты n-е строка и столбец. После преобразований, аналогичных (31), (32), получим определитель

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - x_{11} - \\ -d_1 - x_{1n} + x_{1n} \end{matrix} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n-11} \\ -x_{1i} & \begin{matrix} x_i - x_{ii} - \\ -d_i - x_{in} + x_{in} \end{matrix} & -x_{ji} & -x_{n-1i} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & \begin{matrix} x_j - x_{jj} - \\ -d_j - x_{jn} + x_{jn} \end{matrix} & -x_{n-1j} \\ -x_{1n-1} & -x_{i\,n-1} & -x_{j\,n-1} & x_{n-1\,n-1} \end{vmatrix},$$

который согласно [8] может быть представлен как сумма определителей

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - x_{11} - \\ -d_1 - x_{1n} \end{matrix} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n-11} \\ -x_{1i} & \begin{matrix} x_i - x_{ii} - \\ -d_i - x_{in} \end{matrix} & -x_{ji} & -x_{n-1i} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & \begin{matrix} x_j - x_{jj} - \\ -d_j - x_{jn} \end{matrix} & -x_{n-1j} \\ -x_{1n-1} & -x_{i\,n-1} & -x_{j\,n-1} & \begin{matrix} x_{n-1} - x_{n-1n-1} - \\ -d_{n-1} - x_{n-1n} \end{matrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1n} & & & \\ & x_{in} & & \\ & & x_{jn} & \\ & & & x_{n-1n} \end{vmatrix}. \tag{38}$$

В выражении (38) первый определитель имеет структуру определителя (32) с той разницей, что его размерность равна $n-1$, т. е. он равен нулю. Тогда значение $\Delta_{x(n-1)}$ совпадает со значением второго определителя этого равенства, который положительный и равняется

$$\Delta_{x(n-1)} = \prod_{i=1}^{n-1} x_{in}\,. \tag{39}$$

Таким образом, один из миноров особенной матрицы (29), имеющий размерность $n-1$, является ненулевым, т. е. ранг этой матрицы равен $n-1$. Аналогично доказывается, что все миноры этой матрицы, получающиеся вычеркиванием её одноименных строк и столбцов, являются ненулевыми и положительными.

Отмеченные особенности рассматриваемой системы дают основание [9] выделить из бесконечного количества n ее решений в виде

$$\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{P}^* = -P_i^0\boldsymbol{q}^*, \tag{40}$$

где $\boldsymbol{Q}^*$ – матрица (29), у которой вычеркнуты i-е строка и столбец, $\boldsymbol{P}^*$– вектор цен без i-го элемента, $\boldsymbol{q}^*$– i-й столбец матрицы $\boldsymbol{Q}$ без элемента $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ii}}$, P_i^0 – равновесная цена i-го сектора, определенная ранее вне системы (28), $i=\overline{1,n}$.

Практические расчеты, проведенные с использованием системы (40), позволили выделить следующую особенность полученных результатов. Несмотря на то, что в системе (40) отсутствует показатель равновесного выпуска

$$M_i^0 = x_i / P_i^0, \qquad (41)$$

показатели всех равновесных цен $\boldsymbol{P}_k^*$ получали значения, удовлетворяющие равенство

$$P_k^* \cdot M_i^0 = x_k, \quad k = \overline{1,n}; \quad k \neq i. \qquad (42)$$

Таким образом, как и в случае приведенного примера, получаемые цены $\boldsymbol{P}_k^*$ формально являются равновесными, поскольку они удовлетворяют уравнениям (17) и (20). Однако их практическое использование невозможно, они никоим образом не соответствуют смысловому содержанию таблиц «затраты-выпуск».

Анализ рассмотренного материала и рекомендации. Основным итогом проведенного анализа является то, что широко используемая математическая модель (17), (20) не может обеспечить практически приемлемые равновесные цены и выпуски. Причина этого явления с математической точки зрения состоит в том, что системы (20), (28) представляют собой однородные системы линейных алгебраических уравнений. Из теории таких систем известно, что отношения их решений y_k / y_l определены однозначно [8]. В случае системы (20) эти отношения имеют согласно (42) вид

$$\frac{P_k^*}{P_l^*} = \frac{x_k}{x_l},$$

где P_k^*, x_k, P_l^*, x_l – цены и выпуски секторов k и l соответственно.

В информационном плане вырожденность решений (42) объясняется тем, что в составе таблиц «затраты-выпуск» недостаточно данных для определения практически приемлемых значений равновесных цен и выпусков. Добавление в эту таблицу значений цен P_i, $i = \overline{1,n}$ позволит с использованием (17) определить выпуски M_i. Прогнозные цены P_i при этом рассчитываются заранее другими методами (определения зависимостей и др.). Предварительное прогнозирование можно проводить также для равновесных выпусков M_i, поскольку легко показать, что система (20) может быть получена в виде $\boldsymbol{PM} + \boldsymbol{d}_н = \boldsymbol{M}$, где $\boldsymbol{M}$ – вектор выпусков, а $d_{нi} = d_i / P_i$. Для этой системы справедливы все свойства, определенные для системы (20). Однако наиболее целесообразным является предварительное прогнозирование части равновесных цен P_i, $i = \overline{1,k}$ и части выпусков M_i, $i = \overline{k+1,n}$. Соотношение количеств k и n–k определяется степенью точности внешнего прогнозирования цен и выпусков соответствующих секторов.

1. *Кубонива М. и др.* Математическая экономика на персональном компьютере. – Москва: Финансы и статистика, 1991. – С. 176–188.
2. *Картер А.* Структурные изменения в экономике США. – Москва: Статистика, 1974. – С. 150–191.
3. *Шандра И.Г.* Математические аспекты микро- и макроэкономики // Издание Финансовой академии при правительстве Российской Федерации. – Москва, 1998. – 40 с.
4. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.* Математика в экономике. Ч. 1. – Москва: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.
5. *Казанцев Э.Ф.* Математика (учебно-методическое пособие). – Москва: Издательский дом Международного университета в Москве, 2005. – 49 с.
6. *Леонтьев В. и др.* Исследование структуры американской экономики. – Москва: Государственное статистическое издательство, 1958. – С. 27–63.
7. *Кулик М.М.* Агрегування моделей міжгалузевого балансу / М.М. Кулик // Проблеми загальної енергетики. – 2016. – № 44. – С. 5–9.
8. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. – Москва: Наука, 1973. – С. 46–47.
9. *Демидович Б.П. и Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – Москва: Наука, 1966. – С. 356–358.

Надійшла до редколегії: 26.10.2016

SCIENTIFIC FOUNDATIONS OF THE DEVELOPMENT AND OPTIMIZATION OF FUEL-AND-ENERGY BALANCES

UDC 622.324

M.N. KULYK, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Institute of General Energy of the NASU,
Kiev, Antonovicha str., 172, 03150, Ukraine

REVISION OF THE POSSIBILITIES OF THE MODELS OF EQUILIBRIUM PRICES AND OUTPUTS IN THE THEORY OF INTERSECTORAL BALANCE

Based on the performed analysis of numerous publications containing the models of equilibrium prices and outputs in the theory of intersectoral balance, we have proved that the use of transposed matrices of direct cost in such models is unreasonable and leads to serious mistakes. We have proposed correct systems of equations connecting equilibrium prices and outputs in the data structure "expenditure–output". We have shown in the general form that such systems belong to the class of homogeneous systems of linear algebraic equations, and their matrices are singular and have ranks smaller by one than the matrix dimensions. It has been established that such systems give degenerate solutions. With the use of these properties, from the continual set of solutions of the refined models of equilibrium prices and outputs, we have isolated in the general form a class of their solutions that can be applied for determining practically acceptable values of these indices. We have proposed an algorithm of such determination that provides for the broadening of the structure of data "expenditure–output". Our analytic investigations are illustrated by an example of the calculation of equilibrium prices and outputs based on the tables "expenditure–output" in Ukraine in 2012.

Key words: equilibrium prices, expenditure, output, matrix, determinant, rank, sector.

As is well known, the tables "expenditure—output", of which one forms the models of intersectoral balance, are composed in the cost form. As a consequence, the results of calculations with using the models of intersectoral balance are also obtained in the cost form. For example, predicting the volumes of power-generating coal production in Ukraine in 2025 with using the models of intersectoral balance, we shall obtain this quantity in billions of hryvnas. However, in subsequent operations, one needs, as a rule, this quantity in units of the product, namely, in tons. In rich literature devoted to intersectoral balance (see, e.g., [1—5]), the problem of conversion of the volume of production to "physical" quantities is not formulated directly, but there are numerous mathematical models recommended for the calculation of equilibrium prices, which afterwards enable one to determine equilibrium outputs in their units (physical quantities). In the present work, we show that the models of equilibrium prices, presented in the quoted and numerous other works, cannot provide correct results and require revision. In addition, we give recommendations for the solution of the formulated problem.

1. **Revision of the equations of expenditure balance.** Leontief was the first to propose using statistical tables "expenditure—output" (1) with the purpose to predict the state of economy [6]. In the present-day configuration, these tables have the form

$\boldsymbol{L}$

Sector	1	i	j	n
1	x_{11}	x_{1i}	x_{1j}	x_{1n}
i	x_{i1}	x_{ii}	x_{ij}	x_{in}
j	x_{j1}	x_{ji}	x_{jj}	x_{jn}
n	x_{n1}	x_{ni}	x_{nj}	x_{nn}

;

$\boldsymbol{c}$

Final consumption
c_1
c_i
c_j
c_n

;

$\boldsymbol{x}$

Output
x_1
x_i
x_j
x_n

;

$\boldsymbol{d'}$

Added value	d_1	d_i	d_j	d_n

; (1)

$\boldsymbol{z'} = \boldsymbol{x'}$

Total expenditure	z_1	z_i	z_j	z_n

,

where x_{ij} are elements of the matrix of intermediate consumption L; c, x, d, and z are the vectors of final consumption, output, added value, and total expenditure, respectively. In the mentioned prediction, the following equations of output balance were used:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + c_i = x_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

in which the vector of sums $\sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i = \overline{1,n}$ of elements of the matrix $\boldsymbol{L}$ was reduced to the form

$$\left[\sum_{j=1}^{n} x_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \sum_{j=1}^{n} x_{ji}, \sum_{j=1}^{n} x_{nj}\right]' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{A}$ is a matrix with elements

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ i, j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

which was called the matrix of direct cost. The introduction of transformation (3), (4) enabled Leontief to establish the well-known relation

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \tag{5}$$

where $\boldsymbol{E}$ is the unit matrix.

In subsequent investigations by Leontief and his followers, the equations of expenditure balance

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j = z_j, \ j = \overline{1,n}, \tag{6}$$

were involved into the mathematical models constructed with using the data of tables “expenditure–output”. Note that, due to the nature of tables (1), the following equalities take place:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} d_i. \tag{8}$$

For reducing Eqs. (6) to the matrix-vector form, the only possible operation is the transposition of the entire system of tables (1) with subsequent transformations similar to (3) – (5), namely, with regard for (7), these equations are reduced to the form

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}, \tag{9}$$

where the matrix $\boldsymbol{B}$ has elements

$$b_{ij} = \frac{x_{ji}}{x_j}, \; i, j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

As a result, the equation of expenditure balance (6) takes the form

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \tag{11}$$

It is asserted in books [1 – 5] and numerous other works that, for the matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{A}$, the following relation is true:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}' \tag{12}$$

where $\boldsymbol{A}'$ is the transposed matrix of $\boldsymbol{A}$, and, as a consequence, Eq. (11) takes the form

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}')\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}. \tag{13}$$

We now show that relations (12) and (13) are incorrect. Transformation (3) and (4) leads to the matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \quad & i & j & \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{1i}}{x_i} & \frac{x_{1j}}{x_j} & \frac{x_{1n}}{x_n} \\ \hline \frac{x_{i1}}{x_1} & \frac{x_{ii}}{x_i} & \frac{x_{ij}}{x_j} & \frac{x_{in}}{x_n} \\ \hline \frac{x_{j1}}{x_1} & \frac{x_{ji}}{x_i} & \frac{x_{jj}}{x_j} & \frac{x_{jn}}{x_n} \\ \hline \frac{x_{n1}}{x_1} & \frac{x_{ni}}{x_i} & \frac{x_{nj}}{x_j} & \frac{x_{nn}}{x_n} \\ \hline \end{array} \end{array}, \tag{14}$$

and transformation (9), (10) to the matrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \quad & i & j & \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{i1}}{x_i} & \frac{x_{j1}}{x_j} & \frac{x_{n1}}{x_n} \\ \hline \frac{x_{1i}}{x_1} & \frac{x_{ii}}{x_i} & \frac{x_{ji}}{x_j} & \frac{x_{ni}}{x_n} \\ \hline \frac{x_{1j}}{x_1} & \frac{x_{ij}}{x_i} & \frac{x_{jj}}{x_j} & \frac{x_{nj}}{x_n} \\ \hline \frac{x_{1n}}{x_1} & \frac{x_{in}}{x_i} & \frac{x_{jn}}{x_j} & \frac{x_{nn}}{x_n} \\ \hline \end{array} \end{array}. \tag{15}$$

Equality (12) is satisfied if $b_{ij} = a_{ij}$ for $i, j = \overline{1,n}$. As follows from (14) and (15), the equality $b_{ij} = a_{ij}$ is true only for diagonal elements of the matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$. For nondiagonal elements ($i \neq j$), we have

$$b_{ij} = \frac{x_{ji}}{x_j} \neq a_{ji} = \frac{x_{ji}}{x_i}, \quad i, j = \overline{1, n}; \; i \neq j. \tag{16}$$

Inequality (16) proves that dependence (12) is incorrect, and its use is unreasonable. The same concerns Eq. (13). At the same time, these dependences are widely used by numerous scientists (in particular, [1 – 5]) in different applications. Relations (12) and (13) are applied especially often for equations containing the vector of added value $\boldsymbol{d}$. All similar models require revision, and it is impossible to use in them the matrix $\boldsymbol{A}'$ instead of $\boldsymbol{B}$. First of all, this concerns numerous works where equations for determining equilibrium prices and outputs are used (see, e.g., [1 – 5]). Practical calculations show that the application of matrix $\boldsymbol{A}'$ instead of $\boldsymbol{B}$ leads to roughly erratic results. Therefore, in the mentioned and similar equations, it is necessary to use the matrix $\boldsymbol{B}$ with elements calculated by dependence (10).

2. **Revision of the possibilities of the models of equilibrium prices and outputs.** The connection between equilibrium prices and outputs is described by the equation

$$x_i = P_i M_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{17}$$

where P_i is the equilibrium price of production of the i-th sector, and M_i is its output in output units.

Equations for determining equilibrium prices can be obtained with the use of tables "expenditure–output" (1) and expenditure balance (6) in the following way: We divide each column j of the matrix $\boldsymbol{L}$ and the corresponding elements of row-vectors $\boldsymbol{d}'$ and $\boldsymbol{x}'$ of tables (1) by the quantities M_j, $j = \overline{1,n}$ with subsequent transposition of the expenditure part of the table. As a result, we obtain

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \frac{x_{11}}{M_1} & \frac{x_{i1}}{M_i} & \frac{x_{j1}}{M_j} & \frac{x_{n1}}{M_n} \\ \hline \frac{x_{1i}}{M_1} & \frac{x_{ii}}{M_i} & \frac{x_{ji}}{M_j} & \frac{x_{ni}}{M_n} \\ \hline \frac{x_{1j}}{M_1} & \frac{x_{ij}}{M_i} & \frac{x_{jj}}{M_j} & \frac{x_{nj}}{M_n} \\ \hline \frac{x_{1n}}{M_1} & \frac{x_{in}}{M_i} & \frac{x_{jn}}{M_j} & \frac{x_{nn}}{M_n} \\ \hline \end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|}\hline \frac{d_1}{M_1} \\ \hline \frac{d_i}{M_i} \\ \hline \frac{d_j}{M_j} \\ \hline \frac{d_n}{M_n} \\ \hline \end{array}\,, \quad \begin{array}{|c|}\hline \frac{x_1}{M_1} \\ \hline \frac{x_i}{M_i} \\ \hline \frac{x_j}{M_j} \\ \hline \frac{x_n}{M_n} \\ \hline \end{array}\,. \tag{18}$$

For structure (18), the expenditure balance has the form

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{x_{ji}}{M_j}+\frac{d_i}{M_i}=\frac{x_i}{M_i}, \quad i,j=\overline{1,n}. \tag{19}$$

Using (17) and carrying out transformations similar to (3) – (5), we obtain the vector-matrix equation of equilibrium prices

$$\boldsymbol{BP} + \boldsymbol{d}_{н} = \boldsymbol{P} \tag{20}$$

or

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{d}_{н}, \tag{21}$$

where $\boldsymbol{d}_{н}$ is a vector with elements

$$d_{нi}=\frac{d_i}{M_i}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{22}$$

called the part of added value per unit of production.

In most publications (including [1 – 5]), researchers apply an equation similar to (21) but differing from it by the fact that the matrix $\boldsymbol{A'}$ is used instead of $\boldsymbol{B}$. Here, it is asserted that this equation should be used for calculating equilibrium prices. We proved above that, in equations of the type (20) and (21), it is impossible to use the matrix $\boldsymbol{A'}$ instead of $\boldsymbol{B}$. However, practical calculations show that, even in the case of strict use of the equations of equilibrium prices in the form (20) and (21), the results obtained have the form of degenerate solutions, whose sense is unacceptable. We illustrate this result on an example and afterwards explain the cause of such phenomena.

Example. With the use of equation (21), we calculated equilibrium prices and outputs in "physical" quantities based on the table "expenditure–output" in Ukraine in 2012. We used here the aggregated table "expenditure–output" obtained in [7].

In Table 1, in addition to the data "expenditure–output," we give for comparison the matrix of direct cost A and matrix B, calculated according to relations (4) and (10), respectively. We see that equality (12) for these matrices is not satisfied.

In Table 2, we show the iterative process of the calculation of equilibrium prices and outputs by the form "expenditure–output" of Table 1, which was performed by the scheme

$$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{d}_{н}^{\boldsymbol{k-1}}, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{T} = \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\right)^{-1}, \tag{24}$$

$$d_{нi}^{k-1} = \frac{d_i}{M_i^{k-1}}, \tag{25}$$

$$M_i^{k-1} = \frac{x_i}{P_i^{k-1}}, \tag{26}$$

$$Max_i \frac{\left|P_i^k - P_i^{k-1}\right|}{P_i^k} \le \varepsilon = 10^{-3}, \tag{27}$$

Table 1 – Aggregated table “expenditure–output” in Ukraine in 2012, millions of hryvnas, prices of 2012

		$\boldsymbol{L}$						$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{x}$
No.	Сектор	Intermediate consumption						Final consumption	Total output
		1	2	3	4	5	6		
1	Agriculture etc.	80387	554	42	686	348	71006	168160	321183
2	Extractive industry etc.	2954	12764	69432	5632	18991	188306	-107633	190446
3	Electric power, gas etc.	3752	16312	7556	1099	12993	83466	26854	152032
4	Building	748	820	603	40883	3929	15193	127710	189886
5	Transport etc.	11977	20694	1257	3136	19755	98986	72596	228401
6	Other sectors	1040301	49042	20122	92815	62540	1218241	1171409	2718199

Gross domestic product	117335	90260	53020	45635	109845	1043001	$\boldsymbol{d'}$
Total expenditure	321183	190446	152132	189886	228401	2718199	$\boldsymbol{x'}$

Matrix of direct cost

$\boldsymbol{A}$

1	0.250284	0.002909	0.000276	0.003613	0.001524	0.026122
2	0.009197	0.06702	0.456693	0.02966	0.083148	0.069276
3	0.011681	0.085652	0.0497	0.005788	0.056887	0.030706
4	0.002328	0.004306	0.003966	0.215303	0.017202	0.005589
5	0.037290	0.108661	0.008268	0.016515	0.08649	0.036416
6	0.323896	0.257511	0.132354	0.488793	0.273817	0.44818

Normalized expenditure matrix

$\boldsymbol{B}$

1	0.250284106	0.015511	0.024679	0.003939	0.052438	0.038272
2	0.001724873	0.067022	0.107293	0.004318	0.090604	0.018042
3	0.000130767	0.364576	0.0497	0.003176	0.005503	0.007403
4	0.002135854	0.029573	0.007229	0.215303	0.01373	0.034146
5	0.001083494	0.099719	0.085462	0.020691	0.086493	0.023008
6	0.221076458	0.988763	0.549003	0.080011	0.433387	0.448179

where $i = \overline{1,n}$; $k = 1,\ldots$ is the number of iteration.

The data of Table 2 enable us to carry out the following generalizations:

The solutions of Eqs. (17) and (20) can be found by applying the iteration algorithm (23) – (27).

These solutions satisfy dependence (17), and, hence, we may formally consider them as equilibrium prices and outputs.

All outputs M_i, $i = \overline{1,n}$ in the solutions obtained have equal values, and, as a consequence, the equilibrium prices are proportional to outputs x_i in cost units.

By virtue of this fact, the solutions based on Eqs. (17) and (20) are degenerate and, according to their content, cannot be used in applications.

Additional calculations by Eqs. (17) and (20), whose results are not described in the present work, show that these equations have a set of solutions. In particular, it is sufficient to change the initial approximation by P_i (and to change P_i^0 only in a single sector) in the iterative process (23) – (27), and we shall obtain a new vector of solutions, i.e., the set of solutions of system (17), (20) is continual.

3. **Specific features of system (17), (20) for determining equilibrium prices and outputs.** The specific features of this system, mentioned above and other, are caused by its following properties:

Substituting the formula $M_i = x_i / P_i$ in expression (22), we transform system (20) to a system of

***Table 2* – Calculation of equilibrium prices and outputs by the tables "expenditure–output" in Ukraine in 2012**

Iteration	Sector	P_i^k, UAH/…	$d_{нi}^k$, UAH/…	$M_i^k \cdot 10^6$
1	1	1000	365.32	321.18
	2	1500	710.91	126.96
	3	1000	348.74	152.03
	4	2000	480.66	94.94
	5	1000	480.93	228.4
	6	5000	1918.55	543.64
2	1	986.3	360.3	325.6
	2	1106.1	524.2	172.2
	3	859.3	299.7	176.9
	4	1012.2	243.3	187.6
	5	942.9	453.5	241.7
	6	7600	2916.2	357.7
3	1	1045.9	382.1	307.1
	2	913.3	432.8	208.5
	3	742.7	259	204.7
	4	757	181.9	250.8
	5	908.3	436.8	251.5
	6	8902.6	3416	305.3

Iteration	Sector	P_i^k, UAH/…	$d_{нi}^k$, UAH/…	$M_i^k \cdot 10^6$
10	1	1206.7	440.84	266.17
	2	720.03	341.25	264.5
	3	575.33	200.64	264.25
	4	714.74	171.77	265.67
	5	861.67	414.4	265.07
	6	10235.1	3927.3	265.58
11	1	1208.6	441.53	265.75
	2	719.06	340.79	264.85
	3	574.32	200.29	264.72
	4	715.3	171.91	265.46
	5	861.43	414.29	265.14
	6	10241.3	3929.68	265.42
12	1	1209.65		265.52
	2	718.56		265.04
	3	573.78		265
	4	715.59		265.36
	5	861.3		265.18
	6	10244.5		265.33

homogeneous algebraic equations

$$\boldsymbol{QP} = 0, \tag{28}$$

where

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{G}, \tag{29}$$

and the diagonal matrix $\boldsymbol{G}$ has elements

$$g_i = \frac{d_i}{x_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{30}$$

System (28) has the trivial solution $\boldsymbol{P} = 0$ that cannot be used for determining equilibrium prices. As is known, a homogeneous system of equations has nontrivial solutions if and only if the determinant of its matrix is equal to zero. The determinant $\boldsymbol{\Delta_s}$ of matrix (29) with the use of (1), (6), and (11) can be represented in the form

$$\boldsymbol{\Delta_s} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i} \boldsymbol{\Delta_x}, \tag{31}$$

where

$$\boldsymbol{\Delta_x} = \begin{array}{c|cccc|} & & i & j & \\ & x_1-x_{11}-d_1 & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ i & -x_{1i} & x_i-x_{ii}-d_i & -x_{ji} & -x_{ni} \\ j & -x_{1j} & -x_{ij} & x_j-x_{jj}-d_j & -x_{nj} \\ & -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_n-x_{nn}-d_n \end{array}. \tag{32}$$

With regard for (6), (10), and (11), we may write

$$x_i - x_{ii} - d_i = \sum_{j=1\, i \neq j}^{n} x_{ji}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{33}$$

$$x_{ji} = x_i - \sum_{k=1 k \neq j}^{n} x_{ki} - d_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{34}$$

Then, summarizing all columns of determinant (32) except the j-th and using (33) and (34), we obtain a new column

$$\boldsymbol{S'} = \begin{vmatrix} x_{j1} & x_{ji} & -x_j + x_{jj} + d_j & x_{jn} \end{vmatrix}'. \tag{35}$$

Column (35) after its multiplication by (–1) coincides with the jth column of determinant (32), i.e., this determinant is equal to zero, and system (28) has nonzero solutions. It can be proved by analogy that all minors of matrix (29), obtained by deleting its i-th row and column, are equal to zero.

According to the theory of homogeneous systems [8], for determining solutions of the system of equations (28), it is necessary to find the rank of matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{G}$.

Let us show that the rank of this matrix is

$$r = n - 1. \tag{36}$$

It is sufficient for this that the rank of one of its minors should be equal to $n - 1$. Consider the determinant of matrix (29) where the n-th row and column are deleted. After transformations similar to (31) and (32), we arrive at a determinant

ISSN 1562-8965. The Problems of General Energy, 2016, issue 4 (47)

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{x(n\text{-}1)}} = \begin{vmatrix} x_1 - x_{11} - d_1 - x_{1n} + x_{1n} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n-11} \\ -x_{1i} & x_i - x_{ii} - d_i - x_{in} + x_{in} & -x_{ji} & -x_{n-1i} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} - d_j - x_{jn} + x_{jn} & -x_{n-1j} \\ -x_{1n-1} & -x_{i\,n-1} & -x_{jn-1} & x_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}, \tag{37}$$

which, according to [8], can be represented as a sum of determinants

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{x(n\text{-}1)}} = \begin{vmatrix} x_1 - x_{11} - d_1 - x_{1n} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n-11} \\ -x_{1i} & x_i - x_{ii} - d_i - x_{in} & -x_{ji} & -x_{n-1i} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} - d_j - x_{jn} & -x_{n-1j} \\ -x_{1n-1} & -x_{i\,n-1} & -x_{jn-1} & x_{n-1} - x_{n-1n-1} - d_{n-1} - x_{n-1n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{1n} & & & \\ & x_{in} & & \\ & & x_{jn} & \\ & & & x_{n-1n} \end{vmatrix}. \tag{38}$$

The first determinant in expression (38) has the same structure as determinant (32) but differs by the fact that its dimension is $n - 1$, i.e., it is equal to zero. Then the value of $\Delta_{x(n-1)}$ coincides with the value of second determinant of this equality, which is positive and equal to

$$\Delta_{x(n-1)} = \prod_{i=1}^{n-1} x_{in}\,. \tag{39}$$

Thus, one of the minors of singular matrix (29), whose dimension is $n - 1$, is equal to nonzero, i.e., the rank of this matrix is equal to $n - 1$. It is easy to prove by analogy that all minors of this matrix, which can be obtained by deleting its homonymous rows and columns, are nonzero and positive.

These features of the system under consideration give reasons [9] to isolate n its solutions from their infinite quantity in the form

$$\boldsymbol{Q}^*\boldsymbol{P}^* = -P_i^0\boldsymbol{q}^*, \tag{40}$$

where $\boldsymbol{Q}^*$ is matrix (29) where its i-th row and column are deleted, $\boldsymbol{P}^*$ is the price vector without the i-th element, $\boldsymbol{q}^*$ is the ith column of matrix $\boldsymbol{Q}$ without element $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{ii}}$, and P_i^0 is the equilibrium price of the i-th sector, $i = \overline{1,n}$, determined earlier outside system (28).

Practical calculations carried out with the use of system (40) enabled us to emphasize the following feature of the results obtained: Despite the fact that system (40) does not contain the index of equilibrium output

$$M_i^0 = x_i / P_i^0, \tag{41}$$

the indices of all equilibrium prices $\boldsymbol{P}_k^*$ took values satisfying the equality

$$P_k^* \cdot M_i^0 = x_k, \quad k = \overline{1,n}; \quad k \neq i. \tag{42}$$

Thus, as in the case of example presented above, the prices being obtained $\boldsymbol{P}_k^*$ are formally equilibrium because they satisfy Eqs. (17) and (20).

However, their practical use is impossible, and they by no means correspond to the sense of tables "expenditure–output".

Analysis of the considered material and recommendations. The main outcome of performed analysis is the fact that the widely used mathematical model (17), (20) cannot predict practically acceptable equilibrium prices and outputs. From the mathematical viewpoint, this phenomenon can be explained by the fact that systems (20) and (28) represent homogeneous systems of linear algebraic equations. As is known from the theory of such systems, the ratios of their solutions y_k / y_l are determined unambiguously [8]. In the case of system (20), these ratios according to (42) have the form

$$\frac{P_k^*}{P_l^*} = \frac{x_k}{x_l},$$

where P_k^*, x_k and P_l^*, x_l are the prices and outputs of sectors k and l, respectively.

From the informational viewpoint, the degeneracy of solutions (42) is explained by the fact that, in the composition of tables "expenditure–output," the volume of data is insufficient for determining practically acceptable values of equilibrium prices and outputs. The addition of price values P_i, $i = \overline{1,n}$, to this table will enable one, with the use of (17), to determine the outputs M_i. The predictive prices P_i are here calculated beforehand by different methods (determination of dependences etc.). One can also perform preliminary prediction for the equilibrium outputs M_i because, as is easy to show, system (20) can be rewritten in the form $\boldsymbol{PM} + \boldsymbol{d_н} = \boldsymbol{M}$, where $\boldsymbol{M}$ is the output vector, and $d_{нi} = d_i / P_i$. This system possesses all properties determined above for system (20). However, the preliminary prediction of a certain part of equilibrium prices P_i, $i = \overline{1,k}$, and a part of outputs M_i, $i = \overline{k+1,n}$ is the most reasonable. The ratio of numbers k and $n–k$ is determined by the degree of accuracy of the external prediction of prices and outputs at the corresponding sectors.

1. *Kuboniva M. etc.* Mathematical economics on a personal computer (translation from Japanese) // Finansy Statistika. – Moscow. – 1991. – P. 176–188.
2. *Carter A.* Structural change in the American economy // Harvard Univ. Press. – Cambridge, Mass. – 1970. – P. 150–191.
3. *Shandra I.G.* Mathematical aspects of micro- and macroeconomics // Finansovaya Akademiya. – Moscow. – 1998. – 40 p.
4. *Solodovnikov A.S., Babaitsev V.A., Brailov A.V.* Mathematics in economics. Part 1 // Finansy Statistika. – Moscow. – 2000. – 224 p.
5. *Kazantsev Y.F.* Mathematics // Izd. Dom Mezhdunarodnogo Universiteta v Moskve. – Moscow. – 2005. – 49 p.
6. *Leontief W.* Studies in the structure of the American economy. Theoretical and empirical explorations in input-output analysis // Oxford Univ. Press. – New York. – 1953. – P. 27–63.
7. *Kulyk M.M.* Input-output model aggregation method // Problemy zahal'noi enerhetyky // 2016. – No. 1(44). – P. 5–9.
8. Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers // McGraw-Hill. – New York. – 1961. – P. 41–51.
9. *Demidovich B.P., Maron I.A.* Foundations of computational mathematics // Nauka. – Moscow. – 1966. – P. 356–358.

Надійшла до редколегії: 26.10.2016