ISSN 2522-4344 (Online), ISSN 1562-8965 (Print).
The problems of general energy. 2017, 2(49): 14-39
doi: https://doi.org/10.15407/pge2017.02.0014

УДК 622.324

М.Н. КУЛИК, академик НАН Украины, доктор техн. наук, профессор,
Институт общей энергетики НАН Украины,
ул. Антоновича, 172, г. Киев, 03150, Украина

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОСНОВНЫХ МАТРИЧНЫХ ФОРМ В СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Исследованы фундаментальные свойства матриц трех систем алгебраических уравнений, которыми формализуются ключевые задачи межотраслевого баланса: определение выпуска по данным конечного спроса, определение выпуска по данным добавленной стоимости, установление взаимосвязи между равновесными ценами и выпуском. Все эти задачи решены с использованием одного и того же предложенного здесь метода, названного методом экстраполяции к нулевому детерминанту. Показано, что система уравнений, рекомендуемая многими авторами для установления взаимосвязи равновесных цен и объемов выпуска в единицах выпуска, является однородной. Доказано, что в этой матрице существует, как минимум, n положительных миноров с размерностью $r = n - 1$, где n – размерность матрицы. Эта важная особенность обусловливает то, что в континуальном множестве решений соответствующей системы невозможно найти хотя бы один вектор, который соответствовал бы смысловому содержанию таблиц «затраты-выпуск». Поэтому эту систему нельзя использовать не только для определения равновесных цен и выпусков в единицах выпуска, но и для решения других задач межотраслевого баланса.
Доказано, что матрица системы уравнений для определения выпуска по данным конечного спроса имеет ранг $r = n$, а детерминант является всегда положительным при любой размерности этой матрицы и неотрицательности элементов конечного спроса, причем последнее условие не всегда является необходимым.
Установлено, что система уравнений для определения выпуска по данным добавленной стоимости имеет матрицу, ранг которой $r = n$, а детерминант положителен при всех значениях переменных, удовлетворяющих условию баланса затрат.

Ключевые слова: матрица, детерминант, ранг, вектор, выпуск, затраты, баланс, цена.

На протяжении почти 100-летнего развития теория межотраслевого баланса (input-output) получила широкое распространение и разнообразные применения практически во всех странах мира и международных экономических, финансовых, бизнесовых, научных и прочих структурах и организациях. Информационной базой, используемой при формировании соответствующих многочисленных математических моделей, применяемых при решении широкого комплекса задач межотраслевого баланса, являются статистические таблицы «затраты-выпуск», современная конфигурация которых приведена ниже:

$\boldsymbol{L}$

Сектор	1	i	j	n
1	x_{11}	x_{1i}	x_{1j}	x_{1n}
i	x_{i1}	x_{ii}	x_{ij}	x_{in}
j	x_{j1}	x_{ji}	x_{jj}	x_{jn}
n	x_{n1}	x_{ni}	x_{nj}	x_{nn}

;

$\boldsymbol{c}$

Кон-е потр-е
c_1
c_i
c_j
c_n

;

$\boldsymbol{x}$

Выпуск
x_1
x_i
x_j
x_n

; (1)

$\boldsymbol{d'}$

Доб-я стоим.	d_1	d_i	d_j	d_n

;

$\boldsymbol{z'} = \boldsymbol{x'}$

Затр-ы, всего	z_1	z_i	z_j	z_n

,

здесь $i, j = \overline{1,n}$ – нумерация секторов, x_{ij} – элементы матрицы промежуточного потребления $\boldsymbol{L}$; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{z}$ – векторы конечного потребления, выпуска, добавленной стоимости и суммарных затрат соответственно.

В.В. Леонтьевым и его последователями на базе таблиц «затраты-выпуск» были разработаны три основные системы уравнений для двух ключевых задач межотраслевого баланса, а именно: определение выпуска по данным конечного спроса либо по данным добавленной стоимости и установление взаимосвязи между равновесными ценами и объемами выпуска в единицах выпуска [1 – 3]. В теоретических и прикладных исследованиях в области межотраслевого баланса эти модели играют ключевую роль.

В данной работе исследованы и установлены основные свойства и взаимосвязи матриц, фигурирующих в упомянутых системах уравнений.

1. Система уравнений для взаимосвязи равновесных цен и объемов выпуска. Данная модель базируется на балансе затрат

$$z_j = x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Используя (1), (2) и преобразования, аналогичные описанным в [1, 2], а также зависимость

$$x_j = M_j P_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где P_j, M_j – равновесные цены и выпуск в единицах выпуска j-го сектора соответственно, в [1, 2] получают векторно-матричное уравнение равновесных цен

$$\boldsymbol{QP} + \boldsymbol{d_н} = \boldsymbol{P}, \tag{4}$$

в котором матрица

$$\boldsymbol{Q} \underset{j}{\overset{i}{=}} \begin{array}{cccc} & i & j & \\ \dfrac{x_{11}}{x_1} & \dfrac{x_{i1}}{x_i} & \dfrac{x_{j1}}{x_j} & \dfrac{x_{n1}}{x_n} \\ \dfrac{x_{1i}}{x_1} & \dfrac{x_{ii}}{x_i} & \dfrac{x_{ji}}{x_j} & \dfrac{x_{ni}}{x_n} \\ \dfrac{x_{1j}}{x_1} & \dfrac{x_{ij}}{x_i} & \dfrac{x_{jj}}{x_j} & \dfrac{x_{nj}}{x_n} \\ \dfrac{x_{1n}}{x_1} & \dfrac{x_{in}}{x_i} & \dfrac{x_{jn}}{x_j} & \dfrac{x_{nn}}{x_n} \end{array}, \tag{5}$$

а $\boldsymbol{d_н}$ – вектор с элементами

$$d_{нj} = \frac{d_j}{M_j}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Поскольку в выражении (6) фигурирует неизвестная величина M_j, уравнение (4) с использованием (6) преобразуется к виду

$$\boldsymbol{KP} = \boldsymbol{0}, \tag{7}$$

где матрица

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{G}, \tag{8}$$

а $\boldsymbol{G}$ – диагональная матрица с элементами

$$q_{jj} = \frac{d_j}{x_j}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Система (7) является однородной и имеет ненулевые решения, поскольку, как показано в [4], детерминант матрицы (8) равен нулю. На характер этих решений кардинальным образом влияет ранг матрицы (8). В [4] показано, что ранг этой матрицы $r = n - 1$, где n – число секторов в системе. Этот вывод сделан на основании оценки миноров $n - 1$-го порядка матрицы (8). В [4] эта оценка определена как оценка снизу. Ниже приводится полное доказательство того, что ранг матрицы (8) равен $n - 1$.

Определитель $\boldsymbol{\Delta_s}$ матрицы (8) с использованием (1), (6) и (9) может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\Delta_s} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i} \boldsymbol{\Delta_x}, \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{\Delta_x} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} x_1 - x_{11} - d_1 & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & x_i - x_{ii} - d_i & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} - d_j & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_n - x_{nn} - d_n \end{vmatrix}. \tag{11}$$

С учетом (2), (5), (6) можем записать

$$\overset{s}{x}_{ii} = x_i - x_{ii} - d_i = \sum_{j=1\, i \neq j}^{n} x_{ji}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{12}$$

после чего определитель (11) получит вид

$$\boldsymbol{\Delta_x} = \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \\ n \end{array} \begin{vmatrix} \overset{s}{x}_{11} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & \overset{s}{x}_{ii} & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & \overset{s}{x}_{jj} & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & \overset{s}{x}_{nn} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Определение ранга матрицы (8) целесообразно производить путем анализа её миноров размерности $n - 1$, получаемых путем вычеркивания i-й строки и столбца в определителе (13).

Анализ произведем сначала для системы с размерностью $n = 4$ с дальнейшим обобщением для произвольного n. Для случая $n = 4$ определитель (13) имеет вид

$$\boldsymbol{\Delta_{x(4)}} = \begin{vmatrix} \overset{s}{x}_{11} & -x_{21} & -x_{31} & -x_{41} \\ -x_{12} & \overset{s}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{13} & -x_{23} & \overset{s}{x}_{33} & -x_{43} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & \overset{s}{x}_{44} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

После вычеркивания в (14) первых строки и столбца получаем минор третьего порядка

$$\boldsymbol{\Delta_{x(4)m}} = \begin{vmatrix} \overset{s}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{23} & \overset{s}{x}_{33} & -x_{43} \\ -x_{24} & -x_{34} & \overset{s}{x}_{44} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

С использованием (2) определитель (15) можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Delta_{x(4)m}} = \begin{vmatrix} \overset{s_0}{x}_{22} + x_{12} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{23} & \overset{s_0}{x}_{33} + x_{13} & -x_{43} \\ -x_{24} & -x_{34} & \overset{s_0}{x}_{44} + x_{14} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

где

$$x_{ii}^{s_0} = x_{ii}^{s} - x_{1i}, \quad i = \overline{2,4}, \tag{17}$$

при этом, как показано в [4], получаем свойство

$$\mathbf{\Delta}_{x(4)m_0} = \begin{vmatrix} x_{22}^{s_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{23} & x_{33}^{s_0} & -x_{43} \\ -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{s_0} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Определитель (16) может быть вычислен с использованием зависимости [5]

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdot & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Последовательно применяя равенство (19) для всех строк детерминанта (16), получаем вычислительную процедуру для определения его значения в общем виде, представленную в табл. 1.

На первом шаге этой процедуры из первой строки определителя $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$ удаляется элемент x_{12}, на втором – из второй строки элемент x_{13} и на третьем – из третьей строки удаляется элемент x_{13}.

В результате получаем равенство

$$\mathbf{\Delta}_{x(4)m} = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{\Delta}_i. \tag{20}$$

В этом равенстве определитель $\mathbf{\Delta_1} = 0$, поскольку он имеет структуру определителя (18); детерминант $\mathbf{\Delta_2}$ является положительным, ибо $x^{S_0}{}_{22} \cdot x^{S_0}{}_{33} > x_{23} \cdot x_{32}$; по аналогичным причинам определители $\mathbf{\Delta_3}$ и $\mathbf{\Delta_5}$ также положительны; детерминанты $\mathbf{\Delta_4}$, $\mathbf{\Delta_6}$, $\mathbf{\Delta_7}$, $\mathbf{\Delta_8}$ равны произведению их диагональных элементов и положительны в силу положительности элементов x_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$ в структуре (1).

Таким образом, определитель $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$ является положительным при произвольных значениях элементов структуры (1), и ранг матрицы (8) при её размерности $n = 4$ равняется $r = n - 1 = 3$.

Важно отметить следующие особенности детерминанта $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$. Все матрицы, представленные во втором и третьем ярусе табл. 1, также имеют положительные детерминанты. Это видно из её структуры. Для положительности $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из его элементов x_{1i}, $i = \overline{2,4}$ был положительным.

Докажем далее, что этим свойством ($r = n - 1$) обладают матрицы (8) при произвольном значении их размерностей. Для этого воспользуемся методом полной индукции, а именно, предполагая, что ранг матрицы (8) при $n \le m$ равняется

$$r = m - 1, \tag{21}$$

докажем, что при размерности матрицы (8) $n = m + 1$ её ранг будет равняться

$$r = m. \tag{22}$$

В случае, когда матрица $\boldsymbol{K}$ имеет размерность $n = m$, детерминант (13) преобразуется к виду

Таблица 1 **– Вычислительная процедура по определению значения детерминанта $\Delta_{x(4)m}$**

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0}+x_{12} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0}+x_{13} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0}+x_{13} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0}+x_{13} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline 0 & x_{13} & 0 \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{13} & 0 \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0}+x_{14} \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{\Delta_1}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{\Delta_2}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{43} \\ \hline 0 & 0 & x_{14} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{\Delta_3}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline 0 & x_{13} & 0 \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{\Delta_4}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ \hline 0 & x_{13} & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{14} \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbf{\Delta_5}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{14} & 0 & 0 \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{43} \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{\Delta_6}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{43} \\ \hline 0 & 0 & x_{14} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{\Delta_7}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{13} & 0 \\ \hline -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{S_0} \\ \hline \end{array} \quad \mathbf{\Delta_8}\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_{13} & 0 \\ \hline 0 & 0 & x_{14} \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta_{x(m)} = \begin{vmatrix} x_{11}^{S} & -x_{21} & -x_{31} & -x_{i1} & -x_{m1} \\ -x_{12} & x_{22}^{S} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ -x_{13} & -x_{23} & x_{33}^{S} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ -x_{1i} & -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S} & -x_{mi} \\ -x_{1m} & -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S} \end{vmatrix}, \quad (23)$$

он равен нулю, а соответствующий минор m – 1-го порядка, полученный, как в предыдущем случае, имеет вид

$$\Delta_{x(m)м} = \begin{vmatrix} x_{22}^{S} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ -x_{23} & x_{33}^{S} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S} & -x_{mi} \\ -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S} \end{vmatrix}. \quad (24)$$

После преобразований детерминанта $\Delta_{x(m)м}$, аналогичных (16), получаем его в виде, пригодном для применения зависимости (19) с целью оценки его свойств (табл. 2). В этой и последующей таблицах все табличные формы для упрощения и большей наглядности чертежа следует воспринимать как детерминанты.

В соответствии с предположениями, сделанными согласно методу полной индукции, все детерминанты этой таблицы (кроме Δ_5, равного нулю) являются положительными и имеют свойства, присущие детерминантам табл. 1, оговоренные выше.

В случае, когда матрица (8) имеет размерность $n = m + 1$, детерминант (13) приводится к виду

$$\Delta_{x(m+1)} = \begin{vmatrix} x_{11}^{S} & -x_{21} & -x_{31} & -x_{i1} & -x_{m1} & -x_{m+11} \\ -x_{12} & x_{22}^{S} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} & -x_{m+12} \\ -x_{13} & -x_{23} & x_{33}^{S} & -x_{i3} & -x_{m3} & -x_{m+13} \\ -x_{1i} & -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S} & -x_{mi} & -x_{m+1i} \\ -x_{1m} & -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S} & -x_{m+1m} \\ -x_{1m+1} & -x_{2m+1} & -x_{3m+1} & -x_{im+1} & -x_{mm+1} & x_{m+1m+1}^{S} \end{vmatrix}; \quad (25)$$

он также равен нулю и имеет минор m-го порядка

$$\Delta_{x(m+1)м} = \begin{vmatrix} x_{22}^{S} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} & -x_{m+12} \\ -x_{23} & x_{33}^{S} & -x_{i3} & -x_{m3} & -x_{m+13} \\ -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S} & -x_{mi} & -x_{m+1i} \\ -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S} & -x_{m+1m} \\ -x_{2m+1} & -x_{3m+1} & -x_{im+1} & -x_{mm+1} & x_{m+1m+1}^{S} \end{vmatrix}. \quad (26)$$

После преобразований детерминанта (26), аналогичных тем, которые проводились в предыдущих случаях, проведем вычислительный процесс, представленный в табл. 3.

Здесь, как и ранее, определитель (26) равен сумме определителей

$$\Delta_{x(m+1)м} = \sum_{i=1}^{6} \Delta_i, \quad (27)$$

в которой $\Delta_6 = 0$.

Все определители Δ_i, $i = \overline{1,5}$, табл. 3 имеют размерность $n = m$. Они имеют идентичную структуру, поскольку образуются умножением положительного элемента x_{1i}, $i = \overline{3, m+1}$ на определитель m – 1-го порядка, получаемый вычеркиванием из определителя $\Delta_{x(m+1)м}$ i-х строки и столбца с последующими приведенными преобразованиями. Такие определители (порядка m – 1) по условию метода полной индукции являются положительными. Поэтому детерминант (27) является положительным, ранг матрицы (8) при её размерности $n = m + 1$ соответствует (22), а при произвольном значении n её ранг

$$r = n - 1. \quad (28)$$

Пример. Для проверки адекватности преобразований (19) – (27) применим их для таблиц «затраты-выпуск» в Украине за 2012 г. Используем с этой целью таблицы, приведенные в [4], предварительно агрегировав их до четырех секторов (табл. 4).

Таблица 2 **– Вычислительная схема по анализу свойств детерминанта $\Delta_{x(m)м}$**

$$\Delta_{x(m)м}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0}+x_{12} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0}+x_{13} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0}+x_{1i} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array} \;\triangleright\; \overset{\Delta_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0}+x_{13} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0}+x_{1i} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array}}$$

$$\nabla$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0}+x_{13} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0}+x_{1i} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array} \;\triangleright\; \overset{\Delta_2}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0}+x_{1i} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array}}$$

$$\nabla$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0}+x_{1i} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array} \;\triangleright\; \overset{\Delta_3}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline 0 & 0 & x_{1i} & 0 \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array}}$$

$$\nabla$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0}+x_{1m} \\ \hline \end{array} \;\triangleright\; \overset{\Delta_4}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0} & -x_{mi} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{1m} \\ \hline \end{array}}$$

$$\nabla \quad \Delta_5$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_{22}^{S_0} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ \hline -x_{23} & x_{33}^{S_0} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ \hline -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S_0} & -x_{mi} \\ \hline -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S_0} \\ \hline \end{array}\,.$$

Таблица 3 **– Вычислительный алгоритм по определению свойств детерминанта $\Delta_{x(m+1)м}$**

$\Delta_{x(m+1)м}$

$x_{22}^{S_0}+x_{12}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangleright$ Δ_1

x_{12}	0	0	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangledown$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangleright$ Δ_2

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
0	x_{13}	0	0	0
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangledown$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangleright$ Δ_3

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
0	0	x_{1i}	0	0
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangledown$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangleright$ Δ_4

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{im}$	$-x_{m+1i}$
0	0	0	x_{1m}	0
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangledown$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

$\triangleright$ Δ_5

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$	$-x_{m+1m}$
0	0	0	0	x_{1m+1}

$\triangledown$ Δ_6

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}$

Таблица 4 **– Агрегированная таблица «затраты-выпуск» в Украине в 2012 г., млн грн, цены 2012 г.**

№	Сектор	Промежуточное потребление (L)				Кон-е потр-е (c)	Выпуск (x)
		1	2	3	4		
1	Сельское хозяйство и др.	80387	348	1282	71006	168160	321183
2	Добывающая промышленность, электроэнергия, строительство и др.	7454	35913	155101	286965	46931	532364
3	Транспорт и др.	11977	19775	25087	98986	72596	228401
4	Другие секторы	104030	62540	161979	1218241	1171409	271899

Добавленная стоимость	117335	109845	188915	1043001	d'

Затраты, всего	321183	228401	532364	2718199	z'

Согласно данным табл. 4 детерминант $\Delta_{x(4)}$ (14) имеет вид

$$\Delta_{x(y)} = \begin{vmatrix} 123461 & -7454 & -11977 & -104030 \\ -1282 & 188348 & -25087 & -161979 \\ -348 & -35913 & 98801 & -62540 \\ -71006 & -286965 & -98986 & 456957 \end{vmatrix}, \quad (29)$$

а детерминант (15)

$$\Delta_{x(y)м} = \begin{vmatrix} \begin{matrix}188348\\(187066+1282)\end{matrix} & -25087 & -161979 \\ -35913 & \begin{matrix}98801\\(98453+348)\end{matrix} & -62540 \\ -286965 & -98986 & \begin{matrix}456957\\(385951+71006)\end{matrix} \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Применение равенства (19) к детерминанту $\Delta_{x(y)м}$ приводит к процессу, представленному в табл. 5.

Здесь, как и ранее, с использованием (19) проводится поэтапное удаление второго слагаемого в диагональных элементах исходного и вновь получаемых детерминантов. В результате приходим к равенству

$$\Delta_{x(y)м} = \sum_{i=1}^{8} \Delta_i . \quad (31)$$

В табл. 6 приведены значения 8-ми детерминантов-слагаемых суммы (31) и детерминанта $\Delta_{x(y)м}$, вычисленного по формуле (31), а также (для проверки) классическим методом. Имеет место практически полное совпадение значений этого детерминанта, определенного различными методами, что подтверждает справедливость процедуры (19) – (27).

2. Система уравнений для определения выпуска по данным конечного спроса. Эта система уравнений базируется на балансе выпусков

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + c_i = x_i , \quad i = \overline{1,n}. \quad (32)$$

В.В. Леонтьев преобразовал систему (32) в матрично-векторную форму

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \quad (33)$$

где

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1,n}. \quad (34)$$

Таблица 5 **– Вычислительный процесс определения детерминанта $\Delta_{x(y)м}$**

188348 (187066+1282)	–25087	–161979
–35913	98801 (98453+348)	–62540
286965	–98986	456957 (385951+71006)

187066	–25087	–161979
– 35913	98801	–62540
–286965	–98986	456957

1282	0	0
–35913	98801	–62540
–286965	–98986	456957

187066	–25087	–161979
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	456957

187066	–25087	–161979
0	348	0
–286965	–98986	456957

1282	0	0
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	456957

1282	0	0
0	348	0
–286965	–98986	456957

Δ_1

187066	–25087	–161979
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	385951

Δ_2

187066	–25087	–161979
–35913	98453	–62540
0	0	71006

Δ_3

187066	–25087	–161979
0	348	0
–286965	–98986	385951

Δ_4

187066	–25087	–161979
0	348	0
0	0	71006

Δ_5

1282	0	0
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	385951

Δ_6

1282	0	0
–35913	98453	–62540
0	0	71006

Δ_7

1282	0	0
0	348	0
–286965	–98986	385951

Δ_8

1282	0	0
0	348	0
0	0	71006

Таблица 6 **– Значения детерминантов из табл. 5, (×10^{15})**

Детерминант	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	$\Delta_{x(y)м}$	Проверка
Значение	0	1,24375952	0,0089491701	0,00462241732	0,04077715009	0,00896214627	0,0001721866353	0,0000316783328	1,3072749	1,307275

Детерминант матрицы $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ из (33) целесообразно представить в виде

$$\Delta_v = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \Delta_{xv}, \qquad (35)$$

где

$$\Delta_{xv} = \begin{Vmatrix} x_1 - x_{11} & -x_{1i} & -x_{1j} & -x_{1n} \\ -x_{i1} & x_i - x_{ii} & -x_{ij} & -x_{in} \\ -x_{j1} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} & -x_{jn} \\ -x_{n1} & -x_{ni} & -x_{nj} & x_n - x_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (36)$$

Вычитая и добавляя в диагональные элементы (36) величины c_i, $i = \overline{1,n}$, после преобразований, аналогичных тем, которые были использованы при формировании (16), получаем детерминант, аналогичный по величине (36)

$$\Delta_{xv} = \begin{Vmatrix} x_{11}^{s_v} + c_1 & -x_{1i} & -x_{1j} & -x_{1n} \\ -x_{i1} & x_{ii}^{s_v} + c_i & -x_{ij} & -x_{in} \\ -x_{j1} & -x_{ji} & x_{jj}^{s_v} + c_j & -x_{jn} \\ -x_{n1} & -x_{ni} & -x_{nj} & x_{nn}^{s_v} + c_n \end{Vmatrix}, \qquad (37)$$

где

$$x_{ii}^{s_v} = x_i - x_{ii} - c_i, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (38)$$

Детерминанты (37) и (16) имеют одинаковую структуру, и поэтому при неотрицательности элементов вектора конечного спроса c_i, $i = \overline{1,n}$, детерминант (37) является ненулевым и положительным при произвольных значениях размерности n системы (33), элементов матрицы $\boldsymbol{A}$ и вектора конечного спроса $\boldsymbol{c}$.

3. Система уравнений для определения выпуска по данным добавленной стоимости. Эта система сформирована на основе баланса затрат (2), которая в матрично-векторной форме имеет вид

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \qquad (39)$$

где элементы матрицы $\boldsymbol{Q}$

$$q_{ij} = \frac{x_{ji}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1,n}. \qquad (40)$$

Определитель матрицы $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$, как и выше, представим произведением

$$\Delta_d = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \Delta_{xd}, \qquad (41)$$

где

$$\Delta_{xd} = \begin{Vmatrix} x_1 - x_{11} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & x_i - x_{ii} & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_n - x_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (42)$$

Далее, как и при формировании (37), преобразуем (42), используя, однако, вместо вектора $\boldsymbol{c}$, элементы вектора $\boldsymbol{d}$, в результате чего получим форму

$$\Delta_{xd} = \begin{Vmatrix} x_{11}^{s_d} + d_1 & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & x_{ii}^{s_d} + d_i & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_{jj}^{s_d} + d_j & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_{nn}^{s_d} + d_n \end{Vmatrix}, \qquad (43)$$

в которой

$$x_{ii}^{s_d} = x_i - x_{ii} - d_i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (44)$$

Детерминант (43) так же, как и детерминант (37) имеет структуру детерминанта (16), к нему применимо поэтому разложение табл. 1. Это дает основание для утверждения, что он ненулевой и положительный при произвольных значениях размерности n матрицы $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$, элементов x_{ij} и d_i, $i, j = \overline{1,n}$, удовлетворяющих, естественно, условию (2).

4. Анализ и комментарии. Все три задачи, рассмотренные выше, решены с использованием одного и того же метода, который целесообразно назвать методом экстраполяции к нулевому детерминанту. Показано, что система уравнений (4), рекомендуемая в [1, 2] и многими другими авторами для установления взаимосвязи равновесных цен и объемов выпуска в единицах выпуска, является однородной с особенной матрицей (8). Доказано, что эта матрица имеет, как минимум, n положительных миноров с размерностью $r = n - 1$, где n – размерность матрицы (8). Эта важная особенность обусловливает то, что из континуального множества решений системы (7) невозможно выделить хотя бы один вектор, который соответствовал бы смысловому содержанию таблиц «затраты-выпуск». Из теории однородных систем [в частности, 5] известно, что в случае, когда ранг матрицы системы вида (7) на единицу меньше её размерности, отношения k-го и l-го элементов любого вектора её решений определены жестко и однозначно. Применительно к системе (7), как показано в [4], эти отношения имеют вид

$$\frac{P_k}{P_l} = \frac{x_k}{x_l}, \quad (45)$$

где P_k, x_k, P_l, x_l – равновесные цены и выпуски в единицах выпуска секторов k и l соответственно. Очевидно совершенно, что отношение равновесных цен двух произвольных секторов не может равняться отношению объемов их выпуска в «физическом» исчислении. Это означает, что система уравнений (7) дает неверные либо вырожденные решения. Поэтому системы (4) и (7) нельзя использовать не только для определения равновесных цен и выпусков в единицах выпуска, но и для решения других задач межотраслевого баланса.

Матрица $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ системы уравнений (33) для определения выпуска по данным конечного спроса имеет ранг $r = n$, где n – её размерность, а детерминант является всегда положительным при любой размерности матрицы и неотрицательности элементов конечного спроса, причем последнее условие, как можно видеть даже из табл. 1 – 5, не всегда является необходимым.

Система уравнений (39) для определения выпуска по данным добавленной стоимости имеет матрицу $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$, её ранг $r = n$, а детерминант положителен при всех значениях x_i, x_{ij}, d_j, удовлетворяющих условию баланса затрат (2). Следует отметить, что свойство положительности детерминанта матрицы $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ доказано Р. Беллманом в [6]. При этом было использовано доказательство, основывающееся на определителях Грама. Оно компактнее метода экстраполяции к нулевому детерминанту, однако последний применим сразу ко всем рассмотренным здесь задачам и, что немаловажно, дает возможность определить не только знак, но и значения изучаемых детерминантов.

Следует особо подчеркнуть уникальное свойство систем уравнений (33) и (39), в которых матрицы $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ имеют определители, значения которых зависят от значений правых частей этих систем, а именно, от значений элементов векторов конечного спроса c_i и добавленной стоимости d_j, $i, j = \overline{1,n}$, соответственно. В этом легко убедиться сравнивая определитель $\Delta_{\boldsymbol{x}(m+1)\boldsymbol{м}}$ из табл. 3 с определителями (37) и (43). Первопричиной такого свойства является то, что системы (33) и (39) построены на основании балансов затрат (2) и выпуска (32). Балансы (2) и (32) не учтены в доказательстве положительности детерминанта матрицы $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$, приведенном Р. Беллманом в [6], которое поэтому является, по меньшей мере, нестрогим.

1. *Кубонива М. и др.* Математическая экономика на персональном компьютере. Финансы и статистика. Москва. 1991. С. 179–188.
2. *Картер А.* Структурные изменения в экономике США. Статистика. Москва. 1974. С. 150–191.
3. *Леонтьев В. и др.* Исследование структуры американской экономики. Москва: Государственное статистическое издательство, 1958. С. 27–63.
4. *Кулик М.Н.* Пересмотр возможностей моделей равновесных цен и выпусков в теории межотраслевого баланса. Проблеми загальної енергетики. 2016. № 47. С. 5–22. https://doi.org/10.15407/pge2016.04.005.
5. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. Москва: Наука, 1973. С. 46–47.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. Москва: Наука,1976. С. 319–320.

Надійшла до редколегії: 05.06.2017

ISSN 2522-4344 (Online), ISSN 1562-8965 (Print).
The problems of general energy. 2017, 2(49): 14-39
doi: https://doi.org/10.15407/pge2017.02.014

UDC 622.324

M.M. KULYK, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Institute of General Energy of the NASU,
Antonovicha str., 172, Kiev, 03150, Ukraine

FUNDAMENTAL PROPERTIES OF THE MAIN MATRIX FORMS IN THE SYSTEMS OF EQUATIONS OF INTERSECTORAL BALANCE

We have investigated the fundamental properties of the matrices of three systems of algebraic equations describing the key problems of intersectoral balance: determination of output by the data of final demand, determination of output by the data of added value, and establishing the interrelation between equilibrium prices and output. All these problems have been solved with using the same method proposed here and called the method of extrapolation to zero determinant. We have shown that the system of equations recommended by numerous authors for establishing the interrelation between equilibrium prices and output volumes in output units is homogeneous. We have proved that, in this matrix, there exist at least n positive minors with a dimension $r = n - 1$, where n is the dimension of matrix. This important feature envisions the fact that, in the continual set of solutions of the corresponding system, it is impossible to find even if a single vector that would correspond to the meaning content of tables "input-output". Therefore, this system cannot be used not only for determining equilibrium prices and output in output units, but also for the solution of other problems of intersectoral balance.

We have proved that the matrix of the system of equations for finding output by the data of final demand has a rank $r = n$, and its determinant is always positive for any dimension of this matrix and non-negativeness of the elements of final demand, and the last condition not always is necessary.

We have established that the system of equations for finding output by the data of added value has a matrix whose rank is $r = n$, and its determinant is positive for all values of variables satisfying the condition of input balance.

K e y w o r d s: matrix, determinant, rank, vector, output, input, balance, price.

The theory of intersectoral balance («input-output») during its almost 100-year development became widespread and was used for various applications practically in all countries of the world as well as in different international economical, financial, business, scientific, and other structures and formations. As the information basis used in the development of the corresponding numerous mathematical models, which are applied in the solution of a wide complex of the problems of intersectoral balance, it is customary to use statistical tables («input-output»), whose present-day configuration can be written as follows:

$$
\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \text{Sector} & 1 & i & j & n \\ \hline 1 & x_{11} & x_{1i} & x_{1j} & x_{1n} \\ \hline i & x_{i1} & x_{ii} & x_{ij} & x_{in} \\ \hline j & x_{j1} & x_{ji} & x_{jj} & x_{jn} \\ \hline n & x_{n1} & x_{ni} & x_{nj} & x_{nn} \\ \hline \end{array}}^{L}; \quad \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \text{Final consumption} \\ \hline c_1 \\ \hline c_i \\ \hline c_j \\ \hline c_n \\ \hline \end{array}}^{c}; \quad \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline \text{Output} \\ \hline x_1 \\ \hline x_i \\ \hline x_j \\ \hline x_n \\ \hline \end{array}}^{x};
$$

$$
\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \text{Added value} & d_1 & d_i & d_j & d_n \\ \hline \end{array}}^{d'};
\qquad (1)
$$

$$
\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \text{Total input} & z_1 & z_i & z_j & z_n \\ \hline \end{array}}^{z' = x'}.
$$

Here, $i, j = \overline{1,n}$ are the numbers of sectors, x_{ij} are the elements of the matrix of intermediate consumption $\boldsymbol{L}$; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{d}$, and $\boldsymbol{z}$ are the vectors of final consumption, output, added value, and total input, respectively.

V.V. Leontief and his followers on the basis of tables «input-output» developed three main systems of equations for two key problems of intersectoral balance, namely: determination of output by the data of final demand or data of added value and establishing the interdependence between equilibrium prices and output volumes in output units [1 – 3]. In the theoretical and applied investigations in the field of intersectoral balance, these models play the key part.

In the present work, we investigate and establish the main properties and interrelations of matrices, appearing in the mentioned systems of equations.

1. System of equations for the interrelation of equilibrium prices and output volumes. This model is based on the input balance

$$z_j = x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

With the use of (1), (2), transformations similar to those described in [1, 2], and also the relation

$$x_j = M_j P_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

where P_j, M_j are the equilibrium prices and output in output units, respectively, of the j-th sector, the following vector-matrix equation of equilibrium prices was obtained in [1, 2]:

$$\boldsymbol{QP} + \boldsymbol{d_н} = \boldsymbol{P}, \qquad (4)$$

where the matrix

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{\frac{x_{11}}{x_1}} & i & j & \phantom{\frac{x_{n1}}{x_n}} \end{array} \\
\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \left|\begin{array}{cccc}
\dfrac{x_{11}}{x_1} & \dfrac{x_{i1}}{x_i} & \dfrac{x_{j1}}{x_j} & \dfrac{x_{n1}}{x_n} \\
\dfrac{x_{1i}}{x_1} & \dfrac{x_{ii}}{x_i} & \dfrac{x_{ji}}{x_j} & \dfrac{x_{ni}}{x_n} \\
\dfrac{x_{1j}}{x_1} & \dfrac{x_{ij}}{x_i} & \dfrac{x_{jj}}{x_j} & \dfrac{x_{nj}}{x_n} \\
\dfrac{x_{1n}}{x_1} & \dfrac{x_{in}}{x_i} & \dfrac{x_{jn}}{x_j} & \dfrac{x_{nn}}{x_n}
\end{array}\right|
\end{array}, \qquad (5)
$$

and $\boldsymbol{d_н}$ is the vector with elements

$$d_{нj} = \frac{d_j}{M_j}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Since the unknown quantity M_j figures in expression (6), Eq. (4) with using (6) is transformed to

$$\boldsymbol{KP} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

where the matrix

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{G}, \tag{8}$$

and $\boldsymbol{G}$ is the diagonal matrix with elements

$$q_{jj} = \frac{d_j}{x_j}, \quad j = \overline{1,n}\,. \tag{9}$$

System (7) is homogeneous and has nonzero solutions because, as shown in [4], the determinant of matrix (8) is equal to zero. The character of these solutions depends cardinally on the rank of matrix (8). As shown in [4], the rank of this matrix is $r = n - 1$, where n is the number of sectors in the system under consideration. This conclusion was drawn on the basis of estimation of the $(n - 1)$-order minors of matrix (8). In [4], this estimate was defined as a lower estimate. In what follows, we present the complete proof that the rank of matrix (8) is equal to $n - 1$.

The determinant $\boldsymbol{\Delta_s}$ of matrix (8) with using (1), (6), and (9) can be written as

$$\boldsymbol{\Delta_s} = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}\boldsymbol{\Delta_x}, \tag{10}$$

where

$$\boldsymbol{\Delta_x} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{Vmatrix} x_1 - x_{11} - d_1 & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & x_i - x_{ii} - d_i & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} - d_j & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_n - x_{nn} - d_n \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

With regard for (2), (5), and (6), we may write

$$\overset{s}{x}_{ii} = x_i - x_{ii} - d_i = \sum_{j=1\, i \neq j}^{n} x_{ji}\,, \quad i = \overline{1,n}\,, \tag{12}$$

and, as a result, determinant (11) will take the form

$$\boldsymbol{\Delta_x} = \begin{array}{c} 1 \\ i \\ j \\ n \end{array} \begin{Vmatrix} \overset{s}{x}_{11} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & \overset{s}{x}_{ii} & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & \overset{s}{x}_{jj} & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & \overset{s}{x}_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

It is reasonable to find the rank of matrix (8) by means of the analysis of its minors of dimension $n - 1$, obtained by cancellation of the i-th row and column in determinant (13).

We first perform this analysis for a system of dimension $n = 4$ with subsequent generalization for arbitrary n. Determinant (13) for the case $n = 4$ has the form

$$\boldsymbol{\Delta_{x(4)}} = \begin{Vmatrix} \overset{s}{x}_{11} & -x_{21} & -x_{31} & -x_{41} \\ -x_{12} & \overset{s}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{13} & -x_{23} & \overset{s}{x}_{33} & -x_{43} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & \overset{s}{x}_{44} \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

After cancellation of the first row and column in (14), we arrive at the third-order minor

$$\boldsymbol{\Delta_{x(4)m}} = \begin{Vmatrix} \overset{s}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{23} & \overset{s}{x}_{33} & -x_{43} \\ -x_{24} & -x_{34} & \overset{s}{x}_{44} \end{Vmatrix}. \tag{15}$$

With the use of (2), we may represent determinant (15) as follows:

$$\boldsymbol{\Delta_{x(4)m}} = \begin{Vmatrix} \overset{s_0}{x}_{22} + x_{12} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{23} & \overset{s_0}{x}_{33} + x_{13} & -x_{43} \\ -x_{24} & -x_{34} & \overset{s_0}{x}_{44} + x_{14} \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

where

$$x_{ii}^{s_0} = x_{ii}^{s} - x_{1i}, \quad i = \overline{2,4}, \tag{17}$$

and here, as shown in [4], we obtain the property

$$\Delta_{x(4)m_0} = \begin{Vmatrix} x_{22}^{s_0} & -x_{32} & -x_{42} \\ -x_{23} & x_{33}^{s_0} & -x_{43} \\ -x_{24} & -x_{34} & x_{44}^{s_0} \end{Vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Determinant (16) can be calculated with the use of relation given in [5]:

$$\begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdot & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Applying successively equality (19) to all rows of determinant (16), we arrive at the calculating procedure for finding its value in the general case, presented in Table 1.

In the first step of this procedure, we remove element x_{12} from the first row of determinant $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$, in the second, element x_{13} is removed from the second row, and, in the third, element x_{13} from the third row.

As a result, we obtain the equality

$$\mathbf{\Delta}_{x(4)m} = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{\Delta}_i . \tag{20}$$

In this equality, the determinant $\mathbf{\Delta_1} = 0$ because it has the structure of determinant (18); further, the determinant $\mathbf{\Delta_2}$ is positive since $x^{S_0}{}_{22} \cdot x^{S_0}{}_{33} > x_{23} \cdot x_{32}$; by similar causes, the determinants $\mathbf{\Delta_3}$ and $\mathbf{\Delta_5}$ are also positive; the determinants $\mathbf{\Delta_4}$, $\mathbf{\Delta_6}$, $\mathbf{\Delta_7}$, and $\mathbf{\Delta_8}$ are equal to the products of their diagonal elements and are positive by virtue of the positiveness of elements x_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$ in structure (1).

Hence, the determinant $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$ is positive for arbitrary values of the elements of structure (1), and the rank of matrix (8) at its dimension $n = 4$ is equal to $r = n - 1 = 3$.

It is important to note the following specific features of determinant $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$. All matrices presented in the second and third tiers of Table 1 also have positive determinants, which can be seen from its structure. For the positiveness of $\mathbf{\Delta}_{x(4)m}$, it is necessary and sufficient that even if one of its elements x_{1i}, $i = \overline{2, 4}$ should be positive.

Further, we prove that matrices (8) possess this property $r = n - 1$ for arbitrary values of their dimensions. For this purpose, we use the method of complete induction, namely, assuming that the rank of matrix (8) at $n \le m$ is equal to

$$r = m - 1, \tag{21}$$

we prove that, if the dimension of matrix (8) is $n = m + 1$, its rank will be equal to

$$r = m. \tag{22}$$

In the case where the matrix $\boldsymbol{K}$ has a dimension $n = m$, determinant (13) can be transformed to the form

$$\mathbf{\Delta}_{x(m)} = \begin{Vmatrix} x_{11}^{S} & -x_{21} & -x_{31} & -x_{i1} & -x_{m1} \\ -x_{12} & x_{22}^{S} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ -x_{13} & -x_{23} & x_{33}^{S} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ -x_{1i} & -x_{2i} & -x_{3i} & x_{ii}^{S} & -x_{mi} \\ -x_{1m} & -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & x_{mm}^{S} \end{Vmatrix}, \tag{23}$$

Table 1 **– Calculating procedure for finding the value of determinant $\Delta_{x(4)m}$**

$x_{22}^{S_0}+x_{12}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

x_{12}	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
0	x_{13}	0
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

x_{12}	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

x_{12}	0	0
0	x_{13}	0
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}+x_{14}$

Δ_1

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}$

Δ_2

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{43}$
0	0	x_{14}

Δ_3

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
0	x_{13}	0
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}$

Δ_4

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{42}$
0	x_{13}	0
0	0	x_{14}

Δ_5

x_{14}	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{43}$
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}$

Δ_6

x_{12}	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{43}$
0	0	x_{14}

Δ_7

x_{12}	0	0
0	x_{13}	0
$-x_{24}$	$-x_{34}$	$x_{44}^{S_0}$

Δ_8

x_{12}	0	0
0	x_{13}	0
0	0	x_{14}

it is equal to zero, and the corresponding $(m–1)$-order minor, obtained by analogy with the previous case, has the form

$$\Delta_{x(m)м} = \begin{Vmatrix} \overset{S}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} \\ -x_{23} & \overset{S}{x}_{33} & -x_{i3} & -x_{m3} \\ -x_{2i} & -x_{3i} & \overset{S}{x}_{ii} & -x_{mi} \\ -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & \overset{S}{x}_{mm} \end{Vmatrix}. \quad (24)$$

After transformation of the determinant $\Delta_{x(m)м}$, similar to (16), we reduce it to the form suitable for applying relation (19) in order to estimate its properties (Table 2). In this and subsequent tables, all tabular forms for the simplification and better visualization of the drawing should be perceived as determinants.

According to the assumptions made by the method of complete induction, all determinants of this table (except Δ_5, which is equal to zero) are positive and possess properties inherent in the determinants of Table 1, discussed above.

In the case where the dimension of matrix (8) is $n = m + 1$, determinant (13) can be reduced to the form

$$\Delta_{x(m+1)} = \begin{Vmatrix} \overset{S}{x}_{11} & -x_{21} & -x_{31} & -x_{i1} & -x_{m1} & -x_{m+11} \\ -x_{12} & \overset{S}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} & -x_{m+12} \\ -x_{13} & -x_{23} & \overset{S}{x}_{33} & -x_{i3} & -x_{m3} & -x_{m+13} \\ -x_{1i} & -x_{2i} & -x_{3i} & \overset{S}{x}_{ii} & -x_{mi} & -x_{m+1i} \\ -x_{1m} & -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & \overset{S}{x}_{mm} & -x_{m+1m} \\ -x_{1m+1} & -x_{2m+1} & -x_{3m+1} & -x_{im+1} & -x_{mm+1} & \overset{S}{x}_{m+1m+1} \end{Vmatrix}, \quad (25)$$

it also is equal to zero and has a minor of the m-th order:

$$\Delta_{x(m+1)м} = \begin{Vmatrix} \overset{S}{x}_{22} & -x_{32} & -x_{i2} & -x_{m2} & -x_{m+12} \\ -x_{23} & \overset{S}{x}_{33} & -x_{i3} & -x_{m3} & -x_{m+13} \\ -x_{2i} & -x_{3i} & \overset{S}{x}_{ii} & -x_{mi} & -x_{m+1i} \\ -x_{2m} & -x_{3m} & -x_{im} & \overset{S}{x}_{mm} & -x_{m+1m} \\ -x_{2m+1} & -x_{3m+1} & -x_{im+1} & -x_{mm+1} & \overset{S}{x}_{m+1m+1} \end{Vmatrix}. \quad (26)$$

After transformations of determinant (26), similar to those performed in the previous cases, we carry out the calculating process presented in Table 3.

Here, as before, determinant (26) is equal to a sum of determinants

$$\Delta_{x(m+1)м} = \sum_{i=1}^{6} \Delta_i , \qquad (27)$$

in which $\Delta_6 = 0$.

The dimension of all determinants Δ_i, $i = \overline{1, 5}$, in Table 3 is equal to $n = m$. They have identical structure because are formed by the multiplication of positive element x_{1i}, $i = \overline{3, m + 1}$ by the determinant of $(m–1)$-th order, obtained by the cancellation of i-th row and column from the determinant $\Delta_{x(m+1)м}$ with subsequent transformations similar to those described above. Such determinants (of order $m–1$) are positive by the condition of the method of complete induction. Therefore, determinant (27) is positive, the rank of matrix (8) for its dimension $n = m + 1$ corresponds to (22), and, at an arbitrary value of n, its rank is

$$r = n – 1. \qquad (28)$$

Example. To verify the adequacy of transformations (19) – (27), we apply them for the tables «input-output» in Ukraine for 2012. For this purpose, we use tables given in [4], preliminarily aggregating them to four sectors (Table 4).

According to data from Table 4, the determinant $\Delta_{x(4)}$ (14) has the form

$$\Delta_{x(y)} = \begin{Vmatrix} 123461 & -7454 & -11977 & -104030 \\ -1282 & 188348 & -25087 & -161979 \\ -348 & -35913 & 98801 & -62540 \\ -71006 & -286965 & -98986 & 456957 \end{Vmatrix}, \quad (29)$$

and determinant (15) is

Table 2 **– Calculating scheme of the analysis of properties of the determinant $\Delta_{x(m)м}$**

$\Delta_{x(m)м}$

$x_{22}^{S_0}+x_{12}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▷

Δ_1

x_{12}	0	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▽

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▷

Δ_2

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
0	x_{13}	0	0
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▽

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▷

Δ_3

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
0	0	x_{1i}	0
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▽

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$

▷

Δ_4

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$
0	0	0	x_{1m}

▽

Δ_5

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$

.

Table 3 **– Calculating algorithm of finding the properties of determinant $\Delta_{x(m+1)м}$**

$\Delta_{x(m+1)м}$

$x_{22}^{S_0}+x_{12}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

▷ Δ_1

x_{12}	0	0	0	0
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

∇

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}+x_{13}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

▷ Δ_2

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
0	x_{13}	0	0	0
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

∇

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}+x_{1i}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

▷ Δ_3

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
0	0	x_{1i}	0	0
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

∇

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}+x_{1m}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

▷ Δ_4

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{im}$	$-x_{m+1i}$
0	0	0	x_{1m}	0
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

∇

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}+x_{1m+1}$

▷ Δ_5

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$	$-x_{m+1m}$
0	0	0	0	x_{1m+1}

∇ Δ_6

$x_{22}^{S_0}$	$-x_{32}$	$-x_{i2}$	$-x_{m2}$	$-x_{m+12}$
$-x_{23}$	$x_{33}^{S_0}$	$-x_{i3}$	$-x_{m3}$	$-x_{m+13}$
$-x_{2i}$	$-x_{3i}$	$x_{ii}^{S_0}$	$-x_{mi}$	$-x_{m+1i}$
$-x_{2m}$	$-x_{3m}$	$-x_{im}$	$x_{mm}^{S_0}$	$-x_{m+1m}$
$-x_{2m+1}$	$-x_{3m+1}$	$-x_{im+1}$	$-x_{mm+1}$	$x_{m+1m+1}^{S_0}$

Table 4 **– Aggregated table «input-output» in Ukraine for 2012, millions of hryvnas, prices of 2012**

		L					c		x
No.	Sector	Intermediate consumption					Final consumption		Output
		1	2	3	4				
1	Agriculture etc.	80387	348	1282	71006		168160		321183
2	Extractive industry, power engineering, building etc.	7454	35913	155101	286965	;	46931	;	532364
3	Transport etc.	11977	19775	25087	98986		72596		228401
4	Other sectors	104030	62540	161979	1218241		1171409		271899

Added value	117335	109845	188915	1043001	d'
Total input	321183	228401	532364	2718199	z'

$$\Delta_{x(y)\mathcal{M}} = \left\| \begin{array}{ccc} \begin{array}{c}188348\\(187066+1282)\end{array} & -25087 & -161979 \\ -35913 & \begin{array}{c}98801\\(98453+348)\end{array} & -62540 \\ -286965 & -98986 & \begin{array}{c}456957\\(385951+71006)\end{array} \end{array} \right\| . \quad (30)$$

Application of equality (19) to the determinant $\Delta_{x(y)\mathcal{M}}$ leads to the process illustrated in Table 5.

Here, as earlier, we perform with the use of (19) step-by-step cancellation of the second term in diagonal elements of the initial and newly formed determinants. As a result, we arrive at the equality

$$\Delta_{x(y)\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^{8} \Delta_i \, . \quad (31)$$

In Table 6, we present the values of 8 determinants-terms of sum (31) and the determinant $\Delta_{x(y)\mathcal{M}}$, calculated according to formula (31) as well as (for verification) by the classical method. We observe here a practically complete coincidence between the values of this determinant, calculated by different methods, which confirms the validity of procedure (19) – (27).

2. System of equations for determining output by the data of final demand. This system of equations is based on the output balance

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + c_i = x_i \, , \quad i = \overline{1,n}. \quad (32)$$

V.V. Leontief transformed system (32) to matrix-vector form

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \quad (33)$$

where

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1,n}. \quad (34)$$

It is reasonable to represent the determinant of matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ from (33) in the following way:

$$\Delta_v = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \Delta_{xv} \, , \quad (35)$$

where

$$\Delta_{xv} = \left\| \begin{array}{cccc} x_1 - x_{11} & -x_{1i} & -x_{1j} & -x_{1n} \\ -x_{i1} & x_i - x_{ii} & -x_{ij} & -x_{in} \\ -x_{j1} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} & -x_{jn} \\ -x_{n1} & -x_{ni} & -x_{nj} & x_n - x_{nn} \end{array} \right\| . \quad (36)$$

Table 5 **– Calculating process of finding the determinant $\Delta_{x(y)м}$**

188348 (187066+1282)	–25087	–161979
–35913	98801 (98453+348)	–62540
286965	–98986	456957 (385951+71006)

187066	–25087	–161979
– 35913	98801	–62540
–286965	–98986	456957

1282	0	0
–35913	98801	–62540
–286965	–98986	456957

187066	–25087	–161979
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	456957

187066	–25087	–161979
0	348	0
–286965	–98986	456957

1282	0	0
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	456957

1282	0	0
0	348	0
–286965	–98986	456957

Δ_1

187066	–25087	–161979
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	385951

Δ_2

187066	–25087	–161979
–35913	98453	–62540
0	0	71006

Δ_3

187066	–25087	–161979
0	348	0
–286965	–98986	385951

Δ_4

187066	–25087	–161979
0	348	0
0	0	71006

Δ_5

1282	0	0
–35913	98453	–62540
–286965	–98986	385951

Δ_6

1282	0	0
–35913	98453	–62540
0	0	71006

Δ_7

1282	0	0
0	348	0
–286965	–98986	385951

Δ_8

1282	0	0
0	348	0
0	0	71006

Table 6 **– Values of determinants from Table 5, ($\times 10^{15}$)**

Determinant	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7	Δ_8	$\Delta_{x(y).м}$	Verification
Value	0	1,24375952	0,0089491701	0,00462241732	0,04077715009	0,00896214627	0,0001721866353	0,0000316783328	1,3072749	1,307275

Subtracting and adding the quantities c_i, $i = \overline{1,n}$, to the diagonal elements of (36), after transformations similar to those used in constructing (16), we obtain a determinant analogous by its value to (36):

$$\Delta_{xv} = \begin{vmatrix} x_{11}^{s_v} + c_1 & -x_{1i} & -x_{1j} & -x_{1n} \\ -x_{i1} & x_{ii}^{s_v} + c_i & -x_{ij} & -x_{in} \\ -x_{j1} & -x_{ji} & x_{jj}^{s_v} + c_j & -x_{jn} \\ -x_{n1} & -x_{ni} & -x_{nj} & x_{nn}^{s_v} + c_n \end{vmatrix}, \quad (37)$$

where

$$x_{ii}^{s_v} = x_i - x_{ii} - c_i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (38)$$

The structures of determinants (37) and (16) are identical, and, therefore, if the elements of the vector of final demand c_i, $i = \overline{1,n}$ are nonnegative, then determinant (37) is nonzero and positive for arbitrary values of the dimension n of system (33), elements of the matrix A, and vector of final demand c.

3. System of equations for determining output by the data of added value. This system is based on the input balance (2), which can be rewritten in matrix-vector form as follows:

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q})\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}, \quad (39)$$

where the elements of matrix $\boldsymbol{Q}$ are

$$q_{ij} = \frac{x_{ji}}{x_j}, \quad i, j = \overline{1,n}. \quad (40)$$

As earlier, we represent the determinant of matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ by the product

$$\Delta_d = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \Delta_{xd}, \quad (41)$$

where

$$\Delta_{xd} = \begin{vmatrix} x_1 - x_{11} & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & x_i - x_{ii} & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_j - x_{jj} & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_n - x_{nn} \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Further, as in the derivation of (37), we transform relation (42), using, however, instead of the vector $\boldsymbol{c}$, elements of the vector $\boldsymbol{d}$. As a result, we obtain

$$\Delta_{xd} = \begin{vmatrix} x_{11}^{s_d} + d_1 & -x_{i1} & -x_{j1} & -x_{n1} \\ -x_{1i} & x_{ii}^{s_d} + d_i & -x_{ji} & -x_{ni} \\ -x_{1j} & -x_{ij} & x_{jj}^{s_d} + d_j & -x_{nj} \\ -x_{1n} & -x_{in} & -x_{jn} & x_{nn}^{s_d} + d_n \end{vmatrix}, \quad (43)$$

where

$$x_{ii}^{s_d} = x_i - x_{ii} - d_i, \quad i = \overline{1,n}. \quad (44)$$

Determinant (43), by analogy with determinant (37), has the structure of determinant (16). Therefore, the decomposition of Table 1 can be applied to (43). This fact gives us all reasons to assert that determinant (43) is nonzero and positive for arbitrary values of the dimension n of matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ and elements x_{ij} and d_i, $i, j = \overline{1,n}$, satisfying, naturally, condition (2).

4. Analysis and comments. All three problems considered above were solved with using the same method, which can be called the method of extrapolation to zero determinant. We showed that the system of equations (4), recommended in [1, 2] and by numerous other authors for establishing the interrelation between equilibrium prices and output volumes in output units, is homogeneous and has a spesific matrix (8). We proved that this matrix has, as a minimum, n positive minors with a dimension $r = n - 1$, where n is the dimension of matrix (8). This important feature envisions the fact that, from the continual set of the solutions of system (7), it is impossible to isolate even if a single vector that would correspond to the meaning content of tables «input-output». It is known from the theory of homogeneous systems (see, e.g., [5]) that, in the case where the rank of matrix of the system similar to (7) is less by one than its dimension, the ratios between k-th and l-th elements of any vector of its solutions is determined rigidly and unambiguously. As shown in [4], these ratios as applied to system (7) have the form

$$\frac{P_k}{P_l} = \frac{x_k}{x_l}, \tag{45}$$

where P_k, x_k, P_l and x_l are the equilibrium prices and outputs in output units of the sectors k and l, respectively. Obviously, the ratio of equilibrium prices of two arbitrary sectors cannot be equal to the ratio of their output volumes in «physical» units. This means that the system of equations (7) gives erroneous or degenerate solutions. Therefore, it is impossible to use systems (4) and (7) not only for finding equilibrium prices and outputs in output units, but also for the solution of other problems of intersectoral balance.

The matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ of system (33) for finding output by the data of final demand has a rank $r = n$, where n is its dimension, and its determinant is always positive for any dimension of the matrix and the non-negativeness of elements of the final demand. Note that the last condition, as can be seen even from Tables 1 – 5, is necessary not always.

The system of equations (39) for finding output by the data of added value has the matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$, its rank is $r = n$, and its determinant is positive for all values of x_i, x_{ij}, d_i, satisfying the condition of input balance (2). Note that the property of positiveness of the determinant of matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ was proved by R. Bellman in [6] with the use of Gram determinants. This proof is more compact than the method of extrapolation to zero determinant, but the latter can be applied to all problems considered here and, which is quite important, enables one to obtain not only the sign, but also the values of determinants under study.

We should especially emphasize the unique property of systems (33) and (39), where the matrices $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ have determinants whose values depend on the right-hand sides of these systems, namely, on the values of elements of the vectors of final demand c_i and added value d_i, i, $j = \overline{1,n}$, respectively. It is easy to make certain of this by comparing the determinant $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{m}+1)\boldsymbol{m}}$ from Table 3 with determinants (37) and (43). The initial cause of such property lies in the fact that systems (33) and (39) are based on the input (2) and output (32) balances. Balances (2) and (32) are not taken into account in proof of positivity of matrix $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{Q}$ determinant, given by R. Bellman in [6], which is therefore at least non-rigorous.

1. Kuboniva, M. et al. (1991). *Mathematical economics on a personal computer*. Moskow: Finansy i Statistika [in Russian].

2. Carter, A. (1974). *Structural change in the American economy.* Moscow: Statistika [in Russian].
3. Leontief, W. et al. (1958). *Studies in the structure of the American economy.* Moskow: Gosudarstvennoe statisticheskoe izdatelstvo [in Russian].
4. Kulyk, M.M. (2016). Revision of the possibilities of the models of equilibrium prices and outputs in the theory of intersectoral balance. *Problemy Zahal'noi Enerhetyky - The Problems of General Energy, 4 (47),* 5–22 [in Russian, in English]. https://doi.org/10.15407/pge2016.04.005.
5. Korn, G.A., & Korn, T.M. (1961). *Mathematical handbook for scientists and engineers.* New York: McGraw-Hill.
6. Bellman, R. (1960). *Introduction to matrix analysis.* New York: McGraw-Hill.

Resived to the Editorial Board:05.06.2017