ISSN 2522-4344 (Online), ISSN 1562-8965 (Print). The problems of general energy, 2018, 1(52): 12–23
doi: https://doi.org/10.15407/pge2018.01.012

УДК 622.324

М.Н. КУЛИК, академик НАН Украины, доктор техн. наук,
профессор, Институт общей энергетики НАН Украины,
ул. Антоновича, 172, г. Киев, 03150, Украина

НОВЫЕ МОДЕЛИ РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН В ТЕОРИИ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Детально исследованы свойства модели, которая массово применяется во многих современных публикациях по теории межотраслевого баланса и называется моделью равновесных цен. Доказано, что методика получения модели равновесных цен, приведенная в [2], является несостоятельной, а сама модель не соответствует балансу затрат в системе матричных форм «затраты-выпуск» (input-output) и потому не является моделью равновесных цен в системе моделей межотраслевого баланса. Получены четыре новые модели, которые представляют собой системы уравнений взаимосвязей между равновесными ценами и объемами выпуска в единицах выпуска. Две из них построены на основе баланса затрат в структуре таблиц «затраты-выпуск», две другие – на балансе выпусков. Все эти модели являются недоопределенными, и потому при расчетах равновесных цен и выпусков необходимо задать дополнительную информацию, не содержащуюся в таблицах «затраты-выпуск», как это делается в [2], [3] и множестве других публикаций по этой проблематике.

Ключевые слова: равновесные цены, выпуск, межотраслевой баланс, матрица, вектор, добавленная стоимость, конечное потребление.

В [1] показано, что модель равновесных цен, разработанная, описанная в [2] и используемая в других многочисленных источниках, не может быть применена как для теоретических исследований, так и для практических расчетов, поскольку она дает результаты, несовместимые со смысловым содержанием задачи. Причиной такого положения является то, что в процессе построения модели равновесных цен, представленной в [2], были применены некорректные, по нашему мнению, операции.

Исходными данными, использованными в [2] для построения модели равновесных цен, являются таблицы «затраты-выпуск» (1).

Здесь x_{ii} – элементы матрицы промежуточного потребления $\boldsymbol{L}$ в стоимостной форме; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{z}$ – векторы конечного потребления, выпуска, добавленной стоимости и суммарных затрат соответственно, тоже в стоимостной форме.

$\boldsymbol{L}$

Сектор	1	i	j	n
1	x_{11}	x_{1i}	x_{1j}	x_{1n}
i	x_{i1}	x_{ii}	x_{ij}	x_{in}
j	x_{j1}	x_{ji}	x_{jj}	x_{jn}
n	x_{n1}	x_{ni}	x_{nj}	x_{nn}

;

$\boldsymbol{c}$

Конечное потреблениее
c_1
c_i
c_j
c_n

;

$\boldsymbol{x}$

Выпуск
x_1
x_i
x_j
x_n

;

$\boldsymbol{d'}$

Добавленная стоимость	d_1	d_i	d_j	d_n

;

$\boldsymbol{z'} = \boldsymbol{x'}$

Затраты, всего	z_1	z_i	z_j	z_n

. (1)

В [2] для получения уравнения равновесных цен было использовано также уравнение баланса затрат

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j = z_j = x_j, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Далее с целью дальнейшего анализа процитируем вывод и окончательный вид модели равновесных цен, приведенные в [2] (С. 171–172).

«Столбец j межотраслевого баланса может быть представлен в следующем виде:

$$\overline{X}_{1i} + \overline{X}_{2i} + \cdots + \overline{X}_{ni} + \overline{V}_i = \overline{X}_i,$$

откуда, используя выражения

$\overline{X}_{ji} = a_{ji}\overline{X}_i$, $\overline{V}_i = \overline{v}_i \overline{X}_i$ получаем

$$1 \times a_{1i} + 1 \times a_{2i} + \cdots + 1 \times a_{ni} + \overline{v}_i = 1,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

Здесь $\overline{v}_i$ – величина добавленной стоимости, приходящаяся на единицу продукции отрасли и называемая долей добавленной стоимости. Если для базового периода цены всех продуктов $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \cdots, \overline{P}_n$ принять за единицу, то при замене $\overline{v}_i$ на v_i цены $P_1, P_2 \cdots, P_n$ будут определяться по формуле

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} P_j + v_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (4.14)$$

В матричном представлении систему (4.14) можно переписать как

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{v}, \qquad (4.15)$$

где

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{|c|}\hline P_1 \\ \hline P_2 \\ \hline \cdots \\ \hline P_n \\ \hline\end{array}, \quad \boldsymbol{A}' = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{n1} \\ \hline a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{nn} \\ \hline\end{array}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{array}{|c|}\hline v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline \cdot \\ \hline v_n \\ \hline\end{array}.$$

....

Уравнения (4.14) и (4.15) называют моделью равновесных цен» (конец цитаты).

К приведенному в цитате алгоритму получения модели (4.15) и к самой этой модели имеется несколько серьёзных претензий. Величину $\overline{v}_i$ авторы называют долей добавленной стоимости, приходящейся на единицу продукции отрасли. Поскольку добавленная стоимость $\overline{V}_i$ исчисляется в денежных единицах, а выпускаемая отраслью продукция – в физических единицах (тонны, метры, кВт·часы и т. д.), то величина $\overline{v}_i$ должна иметь размерность (например, доллар США/тонну угля). Однако в приведенной цитате все величины $\overline{v}_i$ являются безразмерными. А поскольку все элементы матрицы $\boldsymbol{A}'$ также не имеют размерности, то и все элементы вектора цен $\boldsymbol{P}$, получаемые применением модели (4.15), тоже будут безразмерными, что противоречит определению цены. Следовательно, модель (4.15) не является моделью цен вообще и равновесных цен — в частности.

В процессе получения модели (4.15) авторы заменяют вектор $\overline{\boldsymbol{v}}$ иным вектором $\boldsymbol{v}$, утверждая, что он обеспечит получение равновесных цен $P_i, i = \overline{1,n}$, однако не показывают, каким образом его вычислить и почему он обеспечит получение именно равновесных цен. Кроме того, на С. 172, через абзац после приведенной цитаты утверждается, что вектор $\boldsymbol{v}$ является вектором долей добавленной стоимости. Однако в тексте цитаты вектором долей добавленной стоимости объявлен вектор $\overline{\boldsymbol{v}}$, т. е. $\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}$. Тогда модель (4.15) согласно приведенной цитате даст решение $\boldsymbol{P} = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ является единичным безразмерным вектором размерности n.

Все это в совокупности доказывает, что система уравнений (4.15) не является моделью равновесных цен в системе моделей межотраслевого баланса, она получена в результате совокупности ошибок и необоснованных допущений.

В данной статье описаны новые модели равновесных цен, полученные путем адекватных математических преобразований таблиц «затраты-выпуск».

Для разработки первой из них воспользуемся таблицей $\boldsymbol{L}$ и векторами $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{x}$ из структуры таблиц (1) «затраты-выпуск», а также балансом затрат (2). Кроме того, введем новое очевидное уравнение

$$x_i = P_i M_i, \ i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

где M_i – выпуск продукции i-го сектора, исчисляемый в единицах выпуска, P_i – цена продукции i-го сектора.

Далее, разделяя все столбцы таблиц (1) на M_j и воспользовавшись уравнением баланса затрат (2), получим схему для построения модели равновесных цен (4):

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & 1 & i & j & n \\
\hline
1 & \frac{x_{11}}{M_1} & \frac{x_{1i}}{M_i} & \frac{x_{1j}}{M_j} & \frac{x_{1n}}{M_n} \\
\hline
i & \frac{x_{i1}}{M_1} & \frac{x_{ii}}{M_i} & \frac{x_{ij}}{M_j} & \frac{x_{in}}{M_n} \\
\hline
j & \frac{x_{j1}}{M_1} & \frac{x_{ji}}{M_i} & \frac{x_{jj}}{M_j} & \frac{x_{jn}}{M_n} \\
\hline
n & \frac{x_{n1}}{M_1} & \frac{x_{ni}}{M_i} & \frac{x_{nj}}{M_j} & \frac{x_{nn}}{M_n} \\
\hline
\end{array}
\quad (4)
$$

$$+$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\frac{d_1}{M_1} & \frac{d_i}{M_i} & \frac{d_j}{M_j} & \frac{d_n}{M_n} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\|$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\frac{x_1}{M_1} & \frac{x_i}{M_i} & \frac{x_j}{M_j} & \frac{x_n}{M_n} \\
\hline
\end{array}.
$$

Проведя суммирование по столбцам, как показано на схеме (4), получаем систему уравнений (5)

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_{11}}{M_1}+\frac{x_{i1}}{M_1}+\frac{x_{j1}}{M_1}+\frac{x_{n1}}{M_1}+\frac{d_1}{M_1}=\frac{x_1}{M_1},\\
&\frac{x_{1i}}{M_i}+\frac{x_{ii}}{M_i}+\frac{x_{ji}}{M_i}+\frac{x_{ni}}{M_i}+\frac{d_i}{M_i}=\frac{xi}{M_i},\\
&\frac{x_{1j}}{M_j}+\frac{x_{ij}}{M_j}+\frac{x_{jj}}{M_j}+\frac{x_{nj}}{M_j}+\frac{d_j}{M_j}=\frac{x_j}{M_j},\\
&\frac{x_{1n}}{M_n}+\frac{x_{in}}{M_n}+\frac{x_{jn}}{M_n}+\frac{x_{nn}}{M_n}+\frac{d_n}{M_n}=\frac{x_n}{M_n}.
\end{aligned}
\quad (5)
$$

Система уравнений (5) с применением зависимости (3) преобразуется в систему (6), которая в развернутом виде является моделью равновесных цен:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_{11}}{x_1}P_1+\frac{x_{i1}}{x_1}P_1+\frac{x_{j1}}{x_1}P_1+\frac{x_{n1}}{x_1}P_1+\frac{d_1}{M_1}=P_1,\\
&\frac{x_{1i}}{x_i}P_i+\frac{x_{ii}}{x_i}P_i+\frac{x_{ji}}{x_i}P_i+\frac{x_{ni}}{x_i}P_i+\frac{d_i}{M_i}=P_i,\\
&\frac{x_{1j}}{x_j}P_j+\frac{x_{ij}}{x_j}P_j+\frac{x_{jj}}{x_j}P_j+\frac{x_{nj}}{x_j}P_j+\frac{d_j}{M_j}=P_j,\\
&\frac{x_{1n}}{x_n}P_n+\frac{x_{in}}{x_n}P_n+\frac{x_{jn}}{x_n}P_n+\frac{x_{nn}}{x_n}P_n+\frac{d_n}{M_n}=P_n.
\end{aligned}
\quad (6)
$$

В матричной форме система (6) представима в виде

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\nu}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица, $\boldsymbol{S}$ – диагональная матрица с элементами

$$S_{jj}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}}{x_j}, \quad j=\overline{1,n}, \quad (8)$$

$\boldsymbol{P}$ – искомый вектор цен, $\boldsymbol{\nu}$ – вектор с элементами

$$\nu_j=\frac{d_j}{M_j}, \quad j=\overline{1,n}, \quad (9)$$

каждый из которых является долей добавленной стоимости j-й отрасли d_j на единицу выпускаемой ею продукции M_j.

Используя уравнение баланса выпуска

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+c_i=x_i, \quad i=\overline{1,n} \quad (10)$$

и разделив каждую из строк таблиц (1) на M_i, $i=\overline{1,n}$, получим схему для формирования второй модели равновесных цен, а именно:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \frac{x_{11}}{M_1} & \frac{x_{1i}}{M_1} & \frac{x_{1j}}{M_1} & \frac{x_{1n}}{M_1} \\ \hline \frac{x_{i1}}{M_i} & \frac{x_{ii}}{M_i} & \frac{x_{ij}}{M_i} & \frac{x_{in}}{M_i} \\ \hline \frac{x_{j1}}{M_j} & \frac{x_{ji}}{M_j} & \frac{x_{jj}}{M_j} & \frac{x_{jn}}{M_j} \\ \hline \frac{x_{n1}}{M_n} & \frac{x_{ni}}{M_n} & \frac{x_{nj}}{M_n} & \frac{x_{nn}}{M_n} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \frac{c_1}{M_1} \\ \hline \frac{c_i}{M_i} \\ \hline \frac{c_j}{M_j} \\ \hline \frac{c_n}{M_n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \frac{x_1}{M_1} \\ \hline \frac{x_i}{M_i} \\ \hline \frac{x_j}{M_j} \\ \hline \frac{x_n}{M_n} \\ \hline \end{array} \cdot \quad (11)$$

Следуя этой схеме и используя уравнение (3), получаем в развернутом виде систему уравнений второй модели равновесных цен

$$\begin{aligned} &\frac{x_{11}}{x_1}P_1 + \frac{x_{1i}}{x_1}P_1 + \frac{x_{1j}}{x_1}P_1 + \frac{x_{1n}}{x_1}P_1 + \frac{c_1}{M_1} = P_1, \\ &\frac{x_{i1}}{x_i}P_i + \frac{x_{ii}}{x_i}P_i + \frac{x_{ij}}{x_i}P_i + \frac{x_{in}}{x_i}P_i + \frac{c_i}{M_i} = P_i, \\ &\frac{x_{j1}}{x_j}P_j + \frac{x_{ji}}{x_j}P_j + \frac{x_{jj}}{x_j}P_j + \frac{x_{jn}}{x_j}P_j + \frac{c_j}{M_j} = P_j, \\ &\frac{x_{n1}}{x_n}P_n + \frac{x_{ni}}{x_n}P_n + \frac{x_{nj}}{x_n}P_n + \frac{x_{nn}}{x_n}P_n + \frac{c_n}{M_n} = P_n, \end{aligned} \quad (12)$$

которая преобразуется в матричную форму этой модели

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma}, \quad (13)$$

в которой $\boldsymbol{R}$ – диагональная матрица с элементами

$$r_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{x_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad (14)$$

а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ имеет элементы

$$\gamma_i = \frac{c_i}{M_i}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (15)$$

Величины γ_i (15) по аналогии с величинами ν_j (10) являются долей конечного потребления продукции i-й отрасли на единицу выпускаемой ею продукции.

Используя преобразования, аналогичные тем, которые применялись нами при получении зависимостей (7) и (13) (но производя деление соответствующих строк и столбцов системы таблиц (1) на P_i, $i = \overline{1,n}$), получаем третье векторно-матричное уравнение, связывающее равновесные цены и выпуски в единицах выпуска:

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (16)$$

где вектор $\boldsymbol{\alpha}$ имеет элементы

$$\alpha_j = \frac{d_j}{P_j}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (17)$$

Аналогично сформируем четвертое уравнение равновесных цен и выпусков

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\beta}, \quad (18)$$

в котором элементы вектора $\boldsymbol{\beta}$ имеют вид

$$\beta_i = \frac{c_i}{P_i}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (19)$$

Анализ и комментарии. Выше путем анализа размерности и схемы вывода уравнений (4.14), (4.15) показано, что эти уравнения являются несостоятельными. Далее подтвердим это утверждение, используя механизмы математического анализа. Как видно из приведенной цитаты, построение системы уравнений (4.14), (4.15) базируется на балансе затрат. Следовательно, преобразуя уравнения (4.14), (4.15) в обратном порядке, мы должны получить уравнения (2). Попробуем это сделать.

Матрица A' в уравнении (4.15) согласно тексту цитаты имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{i1}}{x_1} & \frac{x_{j1}}{x_1} & \frac{x_{n1}}{x_1} \\ \frac{x_{1i}}{x_i} & \frac{x_{ii}}{x_i} & \frac{x_{ji}}{x_i} & \frac{x_{ni}}{x_i} \\ \frac{x_{1j}}{x_j} & \frac{x_{ij}}{x_j} & \frac{x_{jj}}{x_j} & \frac{x_{nj}}{x_j} \\ \frac{x_{1n}}{x_n} & \frac{x_{in}}{x_n} & \frac{x_{jn}}{x_n} & \frac{x_{nn}}{x_n} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (4.15), получаем систему (21)

$$\begin{aligned} &(1-\frac{x_{11}}{x_1})P_1 - \frac{x_{i1}}{x_1}P_i - \frac{x_{j1}}{x_1}P_j - \frac{x_{n1}}{x_1}P_n = \frac{d_1}{M_1}, \\ &-\frac{x_{1i}}{x_i}P_1 + (1-\frac{x_{ii}}{x_i})P_i - \frac{x_{ji}}{x_i}P_j - \frac{x_{ni}}{x_i}P_n = \frac{d_i}{M_i}, \\ &-\frac{x_{1j}}{x_j}P_1 - \frac{x_{ij}}{x_j}P_i + (1-\frac{x_{jj}}{x_j})P_j - \frac{x_{nj}}{x_j}P_n = \frac{d_j}{M_j}, \\ &-\frac{x_{1n}}{x_n}P_1 - \frac{x_{in}}{x_n}P_i - \frac{x_{jn}}{x_n}P_j + (1-\frac{x_{nn}}{x_n})P_n = \frac{d_n}{M_n}. \quad (21) \end{aligned}$$

Умножая каждую из строк $i = \overline{1,n}$ системы (21) на M_i и используя уравнение (3), получим систему уравнений (22)

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{i1}\frac{P_i}{P_1} + x_{j1}\frac{P_j}{P_1} + x_{n1}\frac{P_n}{P_1} + d_1 = x_1, \\ &x_{1i}\frac{P_1}{P_i} + x_{ii} + x_{ji}\frac{P_j}{P_i} + x_{ni}\frac{P_n}{P_i} + d_i = x_i, \\ &x_{1j}\frac{P_1}{P_j} + x_{ij}\frac{P_i}{P_j} + x_{jj} + x_{nj}\frac{P_n}{P_j} + d_j = x_j, \\ &x_{1n}\frac{P_1}{P_n} + x_{in}\frac{P_i}{P_n} + x_{jn}\frac{P_j}{P_n} + x_{nn} + d_n = x_n, \end{aligned} \quad (22)$$

которая представима в виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\frac{P_i}{P_j} + d_j = x_j, \quad j = \overline{1,n}. \quad (23)$$

Система уравнений (23) будет адекватной системе баланса затрат (2) в единственном случае, а именно, когда цены всех секторов будут одинаковыми

$$P_i = P_j, \quad i, j = \overline{1,n}. \quad (24)$$

Ясно, что случай (24) является вырожденным. Равенство (24) никоим образом не согласуется со смысловым содержанием задачи. Никогда не бывает, чтобы цены во всех секторах экономики и сфере услуг были одинаковыми. В общем же случае система уравнений (23) отличается от системы баланса затрат (2). Поэтому система уравнений (4.14), (4.15) не является моделью равновесных цен в системе моделей межотраслевого баланса.

Далее таким же способом проведем проверку системы уравнений (7). Эта система имеет диагональную матрицу, *j*-я строка системы представляет собой уравнение первого порядка

$$(1 - S_{jj})P_j = \frac{d_j}{M_j}. \quad (25)$$

Умножая обе части (25) на M_j, после простых преобразований получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j = x_j. \quad (26)$$

Полагая $j = \overline{1,n}$, получаем систему уравнений, которая полностью совпадает с системой уравнений (2), описывающей баланс затрат в системе таблиц «затраты-выпуск». Это дает основание утверждать, что система уравнений (7) является моделью равновесных цен в структуре моделей межотраслевого баланса.

По аналогичной схеме (с некоторыми несущественными изменениями) доказывается, что модели (13), (16) и (18) также являются моделями равновесных цен.

Матрицы моделей (7), (13), (16), (18) имеют диагональную форму, связь между показа-

 ISSN 1562-8965. The Problems of General Energy, 2018, issue1(52)

телями различных секторов осуществляется в них через диагональные элементы, которые рассчитываются с использованием данных промежуточного потребления, затрат и выпусков всех секторов.

Следует особо отметить, что ни одна из полученных моделей не в состоянии определить значения равновесных цен P_i и выпусков M_i, используя лишь данные таблиц «затраты-выпуск». Как видно из структуры моделей (7), (13), (16), (18), они содержат *n* уравнений и 2*n* неизвестных, это недоопределенные системы. Однако они ценны тем, что устанавливают взаимосвязь между равновесными ценами и выпуском в единицах выпуска. Их используют для анализа при исследовании различных ситуаций и задач типа: «Что будет, если…». В этом случае исследователь доопределяет систему, частично либо полностью задавая изменения в правых частях или матрицах названных моделей, как это сделано, в частности, в [2], [3] и многочисленных других публикациях.

Представленные новые модели дают совпадающие результаты. Использование каждой из них обусловливается наличием исходных данных либо другими условиями.

1. Кулик М. Н. Пересмотр возможностей моделей равновесных цен и выпусков в теории межотраслевого баланса. *Проблемы общей энергетики*. 2016. № 47. С. 5—22. https://doi.org/10.15407/pge2016.04.005.

2. Кубонива М. и др. Математическая экономика на персональном компьютере. М.: Финансы и статистика, 1991. С. 179—188.

3. Картер А. *Структурные изменения в экономике США*. М: Статистика, 1974. С. 150—191.

Надійшла до редколегії 02.03.2018

ISSN 2522-4344 (Online), ISSN 1562-8965 (Print). The problems of general energy, 2018, 1(52): 12–23
doi: https://doi.org/10.15407/pge2018.01.012

UDC 622.324

M.M. KULYK, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Institute of General Energy of the National Academy of Sciences of Ukraine, 172, Antonovicha str., Kiev, 03150, Ukraine

NEW MODELS OF EQUILIBRIUM PRICES IN THE THEORY OF INTERSECTORAL BALANCE

We have performed a detailed investigation of the properties of the model that is used in numerous present-day publications on the theory of intersectoral balance and is called the model of equilibrium prices. We have proved that the procedure of obtaining the model of equilibrium prices presented in [2] is groundless, and the model itself does not correspond to input balance in the system of matrix forms «input-output» and, hence, is not a model of equilibrium prices in the system of models of intersectoral balance.
We have obtained four new models that represent systems of equations of the interrelations between equilibrium prices and output volumes in output units. Two of them are constructed on the basis of input balance in the structure of tables «input-output», and two other on output balance. All these models are underdetermined, and, therefore, in calculations of equilibrium prices and outputs, it is necessary to assign additional information, which is absent in the tables «input-output», as is made in [2], [3], and numerous other publications on this range of problems.

Keywords: equilibrium prices, output, intersectoral balance, matrix, vector, added value, final consumption.

As shown in [1], the model of equilibrium prices developed and described in [2] and used in other numerous works cannot be applied for both theoretical investigations and practical calculations because it leads to results incompatible with the meaning content of problem under consideration. This situation can be explained by the fact that, in the course of constructing the model of equilibrium prices presented in [2], incorrect, to our opinion, operations were applied.

As the initial data used in [2] for constructing the model of equilibrium prices, the following tables «input-output» (1).

Where x_{ii} are the elements of the matrix of intermediate consumption $\boldsymbol{L}$ in cost-estimation form; $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{d}$, and $\boldsymbol{z}$ are the vectors of final consumption, output, added value and total input, respectively, also in cost-estimation form.

$\boldsymbol{L}$

Sector	1	i	j	n
1	x_{11}	x_{1i}	x_{1j}	x_{1n}
i	x_{i1}	x_{ii}	x_{ij}	x_{in}
j	x_{j1}	x_{ji}	x_{ij}	x_{jn}
n	x_{n1}	x_{ni}	x_{nj}	x_{nn}

;

$\boldsymbol{c}$

Final consumption
c_1
c_i
c_j
c_n

;

$\boldsymbol{x}$

Output
x_1
x_i
x_j
x_n

;

$\boldsymbol{d}'$

Added value	d_1	d_i	d_j	d_n

; (1)

$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{x}'$

Total input	z_1	z_i	z_j	z_n

.

For obtaining the model of equilibrium prices, the system of equations of input balance was also used in [2].

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j = z_j = x_j, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Further, for subsequent analysis, we quote the derivation and final form of the model of equilibrium prices presented in [2, P. 171–172]:

«The column j of intersectoral balance can be represented as follows:

$$\overline{X}_{1i} + \overline{X}_{2i} + \cdots + \overline{X}_{ni} + \overline{V}_i = \overline{X}_i,$$

whence, with regard for expressions

$\overline{X}_{ji} = a_{ji}\overline{X}_i$, $\overline{V}_i = \overline{v}_i\overline{X}_i$, we obtain

$$1 \times a_{1i} + 1 \times a_{2i} + \cdots + 1 \times a_{ni} + \overline{v}_i = 1,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

Here, $\overline{v}_i$ is the added value per unit of production of the sector under consideration, which is called the share of added value. If the prices of all products $\overline{P}_1, \overline{P}_2 \cdots, \overline{P}_n$ for the reference period are taken as a unit, then, in the replacement of $\overline{v}_i$ by v_i, the prices $P_1, P_2 \cdots, P_n$ will be determined by the formula

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} P_j + v_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (4.14)$$

In matrix representation, we may rewrite system (4.14) as follows:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{P} + \boldsymbol{v}, \qquad (4.15)$$

where

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdots \\ P_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}.$$

....

Equations (4.14) and (4.15) are called the model of equilibrium prices» (end of the quote).

The algorithm of constructing model (4.15), given in the quote, and model itself have several substantial shortcomings. The quantity $\overline{v}_i$ is called in [2] the share of added value per unit of production of the sector. Since the added value $\overline{V}_i$ is calculated in monetary units, and production turned out by the sector in physical units (tons, meters, kW-h, etc.), we see that the quantity $\overline{v}_i$ must have a dimension (e.g., USD per coal ton). However, all quantities $\overline{v}_i$ in the quote are dimensionless. Since all elements of the matrix $\boldsymbol{A}'$ also have no dimension, all elements of the price vector $\boldsymbol{P}$, obtained from model (4.15), will also be dimensionless, but this contradicts the definition of a price. Hence, model (4.15) is not a model of prices in general and not a model of equilibrium prices in particular.

In the course of the derivation of model (4.15), the authors replace vector $\overline{\boldsymbol{v}}$ by another vector $\boldsymbol{v}$, asserting that it will provide obtaining equilibrium prices $P_i, i = \overline{1,n}$, but do not show how one can calculate it, and why this operation will provide obtaining just equilibrium prices. In addition, on *P*. 172 below the presented quote, it is said that vector $\boldsymbol{v}$ is the vector of shares of added value. However, in the text of quote, vector $\overline{\boldsymbol{v}}$ is announced to be the vector of shares of added value, i.e., $\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}$. Then model (4.15) according to the presented quote gives the solution $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{1}$, where $\boldsymbol{1}$ is the unit dimensionless vector of length n.

All these considerations prove that the system of equations (4.15) is not a model of equilibrium prices in the system of models of intersectoral balance because it was constructed as a result of the assemblage of errors and unreasonable assumptions.

In the present work, we describe new models of equilibrium prices, obtained by means of adequate mathematical transformations of tables «input-output».

For development of the first of them, we use the table $\boldsymbol{L}$ and vectors $\boldsymbol{d}$ and $\boldsymbol{x}$ from the structure of Tables (1) «input-output» as well as input balance (2). Furthermore, we introduce a new obvious equation

$$x_i = P_i M_i, \; i = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

where M_i is the production output of ith sector calculated in output units, and P_i is the price of the production of ith sector.

Further, dividing all columns of Tables (1) by M_j and using the system of equations of input balance (2), we obtain the following scheme for constructing a model of equilibrium prices:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & 1 & i & j & n \\
\hline
1 & \frac{x_{11}}{M_1} & \frac{x_{1i}}{M_i} & \frac{x_{1j}}{M_j} & \frac{x_{1n}}{M_n} \\
\hline
i & \frac{x_{i1}}{M_1} & \frac{x_{ii}}{M_i} & \frac{x_{ij}}{M_j} & \frac{x_{in}}{M_n} \\
\hline
j & \frac{x_{j1}}{M_1} & \frac{x_{ji}}{M_i} & \frac{x_{jj}}{M_j} & \frac{x_{jn}}{M_n} \\
\hline
n & \frac{x_{n1}}{M_1} & \frac{x_{ni}}{M_i} & \frac{x_{nj}}{M_j} & \frac{x_{nn}}{M_n} \\
\hline
\end{array} \\
+ \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\frac{d_1}{M_1} & \frac{d_i}{M_i} & \frac{d_j}{M_j} & \frac{d_n}{M_n} \\
\hline
\end{array} \\
\parallel \\
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\frac{x_1}{M_1} & \frac{x_i}{M_i} & \frac{x_j}{M_j} & \frac{x_n}{M_n} \\
\hline
\end{array} .
\end{array}
\tag{4}
$$

Performing summation over columns as shown in scheme (4), we arrive at a system of equations

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_{11}}{M_1}+\frac{x_{i1}}{M_1}+\frac{x_{j1}}{M_1}+\frac{x_{n1}}{M_1}+\frac{d_1}{M_1}=\frac{x_1}{M_1},\\
&\frac{x_{1i}}{M_i}+\frac{x_{ii}}{M_i}+\frac{x_{ji}}{M_i}+\frac{x_{ni}}{M_i}+\frac{d_i}{M_i}=\frac{xi}{M_i},\\
&\frac{x_{1j}}{M_j}+\frac{x_{ij}}{M_j}+\frac{x_{jj}}{M_j}+\frac{x_{nj}}{M_j}+\frac{d_j}{M_j}=\frac{x_j}{M_j},\\
&\frac{x_{1n}}{M_n}+\frac{x_{in}}{M_n}+\frac{x_{jn}}{M_n}+\frac{x_{nn}}{M_n}+\frac{d_n}{M_n}=\frac{x_n}{M_n}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

System (5) with applying (3) can be reduced to the form

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_{11}}{x_1}P_1+\frac{x_{i1}}{x_1}P_1+\frac{x_{j1}}{x_1}P_1+\frac{x_{n1}}{x_1}P_1+\frac{d_1}{M_1}=P_1,\\
&\frac{x_{1i}}{x_i}P_i+\frac{x_{ii}}{x_i}P_i+\frac{x_{ji}}{x_i}P_i+\frac{x_{ni}}{x_i}P_i+\frac{d_i}{M_i}=P_i,\\
&\frac{x_{1j}}{x_j}P_j+\frac{x_{ij}}{x_j}P_j+\frac{x_{jj}}{x_j}P_j+\frac{x_{nj}}{x_j}P_j+\frac{d_j}{M_j}=P_j,\\
&\frac{x_{1n}}{x_n}P_n+\frac{x_{in}}{x_n}P_n+\frac{x_{jn}}{x_n}P_n+\frac{x_{nn}}{x_n}P_n+\frac{d_n}{M_n}=P_n.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

This system in detailed form represents a model of equilibrium prices.

In matrix form, system (6) can be rewritten as follows:

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\nu}, \tag{7}$$

where $\boldsymbol{E}$ is the unit matrix, $\boldsymbol{S}$ is a diagonal matrix with elements

$$S_{jj}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ij}}{x_j},\quad j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$\boldsymbol{P}$ is the required price vector, and $\boldsymbol{\nu}$ is a vector with elements

$$\nu_j=\frac{d_j}{M_j},\quad j=\overline{1,n}, \tag{9}$$

each of which is the share of added value of the jth sector d_j per unit of its production M_j.

Using the equation of input balance

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+c_i=x_i,\quad i=\overline{1,n} \tag{10}$$

and dividing each row of Tables (1) by M_i, $i=\overline{1,n}$, we find the scheme for formulating the second model of equilibrium prices, namely,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \frac{x_{11}}{M_1} & \frac{x_{1i}}{M_1} & \frac{x_{1j}}{M_1} & \frac{x_{1n}}{M_1} \\ \hline \frac{x_{i1}}{M_i} & \frac{x_{ii}}{M_i} & \frac{x_{ij}}{M_i} & \frac{x_{in}}{M_i} \\ \hline \frac{x_{j1}}{M_j} & \frac{x_{ji}}{M_j} & \frac{x_{jj}}{M_j} & \frac{x_{jn}}{M_j} \\ \hline \frac{x_{n1}}{M_n} & \frac{x_{ni}}{M_n} & \frac{x_{nj}}{M_n} & \frac{x_{nn}}{M_n} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|}\hline \frac{c_1}{M_1} \\ \hline \frac{c_i}{M_i} \\ \hline \frac{c_j}{M_j} \\ \hline \frac{c_n}{M_n} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline \frac{x_1}{M_1} \\ \hline \frac{x_i}{M_i} \\ \hline \frac{x_j}{M_j} \\ \hline \frac{x_n}{M_n} \\ \hline \end{array} . \quad (11)$$

Following this scheme and using Eq. (3), we obtain the detailed form of equations of the second model of equilibrium prices:

$$\begin{aligned} &\frac{x_{11}}{x_1}P_1 + \frac{x_{1i}}{x_1}P_1 + \frac{x_{1j}}{x_1}P_1 + \frac{x_{1n}}{x_1}P_1 + \frac{c_1}{M_1} = P_1, \\ &\frac{x_{i1}}{x_i}P_i + \frac{x_{ii}}{x_i}P_i + \frac{x_{ij}}{x_i}P_i + \frac{x_{in}}{x_i}P_i + \frac{c_i}{M_i} = P_i, \\ &\frac{x_{j1}}{x_j}P_j + \frac{x_{ji}}{x_j}P_j + \frac{x_{jj}}{x_j}P_j + \frac{x_{jn}}{x_j}P_j + \frac{c_j}{M_j} = P_j, \\ &\frac{x_{n1}}{x_n}P_n + \frac{x_{ni}}{x_n}P_n + \frac{x_{nj}}{x_n}P_n + \frac{x_{nn}}{x_n}P_n + \frac{c_n}{M_n} = P_n, \end{aligned} \quad (12)$$

which can be transformed into the matrix form of this model

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\gamma}, \quad (13)$$

where $\boldsymbol{R}$ is a diagonal matrix with elements

$$r_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}{x_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad (14)$$

and the vector $\boldsymbol{\gamma}$ has elements

$$\gamma_i = \frac{c_i}{M_i}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (15)$$

The quantities γ_i (15) by analogy with ν_j (10) are the share of final consumption of the production of ith sector per unit of this production.

Using transformations similar to those applied in obtaining relations (7) and (13) (but carrying out division of the corresponding rows and columns of Tables (1) by P_i, $i = \overline{1,n}$), we arrive at the third vector-matrix equation connecting equilibrium prices and output volumes in output units:

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (16)$$

where the vector $\boldsymbol{\alpha}$ has elements

$$\alpha_j = \frac{d_j}{P_j}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (17)$$

By analogy, we formulate the fourth equation of equilibrium prices and output volumes:

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R})\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\beta}, \quad (18)$$

where elements of the vector $\boldsymbol{\beta}$ have the form

$$\beta_i = \frac{c_i}{P_i}, \quad i = \overline{1,n}. \quad (19)$$

Analysis and Comments. Our analysis of dimensions and the scheme of the derivation of equations (4.14) and (4.15) has shown that these equations are groundless. In what follows, we confirm this assertion by using the technique of mathematical analysis. As follows from the quote given above, construction of the system of equations (4.14) and (4.15) is based on the input balance. Hence, transforming equations (4.14) and (4.15) in reverse order, we must obtain system (2). We now try to perform this.

According to the text of quote presented above, the matrix A' in Eq. (4.15) has the form

$$A' = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{11}}{x_1} & \dfrac{x_{i1}}{x_1} & \dfrac{x_{j1}}{x_1} & \dfrac{x_{n1}}{x_1} \\ \dfrac{x_{1i}}{x_i} & \dfrac{x_{ii}}{x_i} & \dfrac{x_{ji}}{x_i} & \dfrac{x_{ni}}{x_i} \\ \dfrac{x_{1j}}{x_j} & \dfrac{x_{ij}}{x_j} & \dfrac{x_{jj}}{x_j} & \dfrac{x_{nj}}{x_j} \\ \dfrac{x_{1n}}{x_n} & \dfrac{x_{in}}{x_n} & \dfrac{x_{jn}}{x_n} & \dfrac{x_{nn}}{x_n} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Substituting (20) in (4.15), we arrive at a system

$$(1-\frac{x_{11}}{x_1})P_1 - \frac{x_{i1}}{x_1}P_i - \frac{x_{j1}}{x_1}P_j - \frac{x_{n1}}{x_1}P_n = \frac{d_1}{M_1},$$

$$-\frac{x_{1i}}{x_i}P_1 + (1-\frac{x_{ii}}{x_i})P_i - \frac{x_{ji}}{x_i}P_j - \frac{x_{ni}}{x_i}P_n = \frac{d_i}{M_i},$$

$$-\frac{x_{1j}}{x_j}P_1 - \frac{x_{ij}}{x_j}P_i + (1-\frac{x_{jj}}{x_j})P_j - \frac{x_{nj}}{x_j}P_n = \frac{d_j}{M_j},$$

$$-\frac{x_{1n}}{x_n}P_1 - \frac{x_{in}}{x_n}P_i - \frac{x_{jn}}{x_n}P_j + (1-\frac{x_{nn}}{x_n})P_n = \frac{d_n}{M_n}. \quad (21)$$

Multiplying each of the rows $i=\overline{1,n}$ of system (21) by M_i and using equation (3), we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{i1}\frac{P_i}{P_1} + x_{j1}\frac{P_j}{P_1} + x_{n1}\frac{P_n}{P_1} + d_1 = x_1, \\ &x_{1i}\frac{P_1}{P_i} + x_{ii} + x_{ji}\frac{P_j}{P_i} + x_{ni}\frac{P_n}{P_i} + d_i = x_i, \\ &x_{1j}\frac{P_1}{P_j} + x_{ij}\frac{P_i}{P_j} + x_{jj} + x_{nj}\frac{P_n}{P_j} + d_j = x_j, \\ &x_{1n}\frac{P_1}{P_n} + x_{in}\frac{P_i}{P_n} + x_{jn}\frac{P_j}{P_n} + x_{nn} + d_n = x_n, \end{aligned} \quad (22)$$

which can be represented in the form

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\frac{P_i}{P_j} + d_j = x_j, \quad j=\overline{1,n}. \quad (23)$$

The system of equations (23) will be equivalent to the system of input balance (2) in the unique case, namely, when the prices of all sectors are identical:

$$P_i = P_j, \quad i,j=\overline{1,n}. \quad (24)$$

It is clear that case (24) is degenerate. Equality (24) in no way agrees with the meaning content of our problem. The equality of prices in all sectors of economy and service industries is absolutely impossible. Hence, we see that, in the general case, the system of equations (23) differs from the system of input balance (2), and system (4.14), (4.15) is not a model of equilibrium prices in the system of models of intersectoral balance.

Further, in the same way, we check the system of equations (7). This system has a diagonal matrix, and its jth row represents a first-order equation

$$(1-S_{jj})P_j = \frac{d_j}{M_j}. \quad (25)$$

Multiplying both parts of (25) by M_j, we obtain after simple transformations

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + d_j = x_j. \quad (26)$$

Taking $j=\overline{1,n}$, we arrive at a system of equations that coincides completely with system (2), describing input balance in the system of tables «input-output». This fact enables us to assert that the system of equations (7) is a model of equilibrium prices in the structure of models of intersectoral balance.

Using a similar scheme (with some slight changes), one can prove that models (13), (16), and (18) also represent models of equilibrium prices.

The matrices of models (7), (13), (16), and (18) have a diagonal form, and the connection between parameters of different sectors is realized in them via diagonal elements, which are calculated with the use of data of intermediate consumption as well as the inputs and outputs of all sectors.

It should be emphasized that not a single from the obtained models can determine the values of equilibrium prices P_i and outputs M_i with using only data of the tables «input-output». As is seen from the structure of models (7), (13), (16), and (18), they contain n equations and 2n unknowns, and, hence, these systems are underdetermined. However, they are important because establish interrelations between equilibrium prices and output in output units. They are applied for analysis in the investigation of different situations and problems of the type «What will be if…». In this case, the researcher redefines his system, assigning partially or completely changes on the right-hand sides or in the matrices of these models, as is made, in particular, in [2], [3], and numerous different publications.

The presented new models give coinciding results. The use of each from them is envisioned by the presence of initial data or other conditions.

1. Kulyk, M.M. (2016). Revision of the possibilities of the models of equilibrium prices and outputs in the theory of intersectoral balance. *Problemy Zahal'noi Enerhetyky – The Problems of General Energy*. 4(47). 27—39 [in Russian, English]. https://doi.org/10.15407/pge2016.04.005.
2. Kuboniva, M. et al. (1991). *Mathematical Economics on a Personal Computer*. Moscow: Finansy i Statistika [in Russian].
3. Carter, A. (1974). *Structural Changes in the American Economy*. Moscow: Statistika [in Russian]

Received to the Editorial Board 02.03.2018