

В. В. Рязанов

*Институт ядерных исследований НАН Украины, просп. Науки, 47, Киев, 03680, Украина***МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ И ЦЕПНЫЕ РЕАКЦИИ**

Рассмотрена мультифрактальная модель эволюции нейтронов в реакторе. Для цепных реакций найдены размерность носителя мультифрактала, информационная и корреляционная размерности, энтропия фрактального множества, максимальное и минимальное значения размерности, функция мультифрактального спектра и другие характеристики мультифрактального нейтронного поведения. Использование геометрических характеристик мультифрактала позволяет описать стохастическую систему иерархически соподчиненных статистических ансамблей, характеризующуюся деревьями Кэйли. Устанавливается стационарное распределение по иерархическим уровням, сводящееся к степенному закону Цаллиса. Указаны некоторые возможности использования фрактальных закономерностей в теории ядерных реакторов.

Ключевые слова: мультифрактальность, обобщенные размерности, мультифрактальный спектр.

Введение

Точных самоподобий в природе мало, иными словами, редки фракталы с постоянной размерностью, зато распространены фракталы с переменной размерностью – мультифракталы [1, 2]. Дадим определение фрактальной размерности. Обозначим d размерность обычного евклидова пространства, в котором находится фрактальный объект, так называемое пространство вложения. Покроем фрактальный объект целиком d -мерными «шарами» радиуса l . Если для этого потребовалось не менее чем $N(l)$ шаров, и при достаточно малых l величина $N(l)$ меняется с l по степенному закону

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D},$$

то D называется хаусдорфовой или фрактальной размерностью этого объекта [1, 2]. Мультифрактал характеризуется своим спектром: изменением размерности от всех значений параметра неаддитивности q , меры неоднородности мультифрактала. Параметр неаддитивности q фигурирует в неаддитивной термодинамике и в статистических распределениях, например, распределениях Реньи и Цаллиса [3], показывая степень отклонения от аддитивности, - при $q=1$ термодинамика становится аддитивной, а распределение Цаллиса переходит в гиббсовское. Для природных фракталов существует минимальный масштаб, при котором основное свойство фрактала – самоподобие – пропадает. Для нейтронов в реакторе это величины порядка свободного пробега нейтронов λ . Свойство самоподобия нарушается также при достаточно больших масштабах. Для реакторов это длины корреляции, характерный пространственный масштаб кластера, соответствующий критическому размеру реактора вблизи критической точки. Как проводить фрактальное описание на конечных масштабах, рассмотрено, например, в [4].

Мультифракталом называют неоднородный фрактальный объект. Фрактальные множества, представляющие реальные физические образования и процессы, обладают, как правило, не одной размерностью, а спектром размерностей. Кроме геометрических характеристик, присущих монофракталам с одной размерностью, такие множества имеют и статистические свойства. Не исключение и цепочки деления нейтронов в реакторе.

Мультифрактальное описание оказывается эффективным в применении к самым разнообразным физическим, химическим, биологическим задачам. Можно предположить, что исследование такого рода особенностей поведения коллектива нейтронов в ядерном реакторе позволит детальнее понять некоторые вопросы, важные для безопасной эксплуатации реакторов: уточнить, например, зависимость положения критической точки от размера системы, критические размеры реактора, скорость распространения возмущений в реакторе и пр. В [5] автор, иллюстрируя описываемое им явление перколяции, протекания, сравнивает распространение слухов в перколяционной модели с цепной реакцией и пишет, что слухи подобны взрыву атомной бомбы. Сходство фрактальной геометрии деревьев Кэйли и процессов размножения нейтронов в реакторах можно также обосновать тем, что оба этих процесса связаны со случайными ветвящимися процессами, процессами Гальтона - Ватсона [6, 7].

Траектории нейтронов в реакторе представляют собой реально существующие фрактальные структуры (деревья Кэйли). Поэтому нейтронные процессы в реакторе следует исследовать помимо

© В. В. Рязанов, 2015

других методов и методами обширной науки о фракталах. Существует множество других самоподобных фрактальных структур: поле скоростей в турбулентном потоке жидкости, разряд молнии в воздухе, форма облаков, кровеносно-сосудистая система человека, контуры дерева и др.

Отметим, что сейчас мультифрактальный анализ с успехом применяется при описании структурного распределения неоднородных звездных скоплений в астрофизике, при исследовании агрегационных свойств клеточных элементов крови в биологии, для характеристики основных этапов эволюции ансамбля дислокаций и усталостного разрушения материалов в физике металлов. Мультифрактальные концепции широко используются в теории развитой гидродинамической турбулентности, при изучении несоразмерных структур и квазикристаллов в физике твердого тела, в теории спиновых стекол и неупорядоченных систем, в квантовой механике и физике элементарных частиц [2].

Мультифрактальность процессов деления и переноса нейтронов в реакторе

Чтобы определить распределение относительной плотности числа нейтронов, как в [1, 2], разобьем всю область реактора размером L на кубические ячейки со стороной размером $\varepsilon_0 = L/(L/\varepsilon_0) = l_0 \ll L$ (L/ε_0 – число ячеек) и объемом ε_0^d , где l_0 порядка длины свободного пробега нейтронов λ . Популяция нейтронов в предположении, что исходным является один нейтрон, состоит из N нейтронов, распределенных по объему реактора. В пределе бесконечной размножающей среды $N \rightarrow \infty$. Следуя процедуре, применяемой в [1, 2] к неоднородному канторовскому множеству, неоднородному треугольнику Серпинского и к другим фрактальным объектам, предположим, что на n -м шаге, для n -го поколения нейтронов число ячеек изменяется, как $(L/\varepsilon_0)^n$, а размер ячейки становится равным $\varepsilon_n = L/(L/\varepsilon_0)^n$. Такой экспоненциальный рост числа ячеек связан с тем, что в деревьях Кэйли, соответствующим процессам деления, число узлов и возможностей событий увеличивается экспоненциально. Обозначим ячейки индексом $I = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Распределение популяции нейтронов по объему реактора характеризуется набором чисел n_i , показывающим, сколько нейтронов находится в i -й ячейке. Величина

$$p_i = n_i/N = p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} n_i(\varepsilon)/N \quad (1)$$

представляет собой вероятность того, что наугад выбранный нейтрон находится в i -й ячейке. В реальной ситуации мы всегда имеем конечное (хотя и большое) число нейтронов N . Размер ячейки равен $\varepsilon_0 = L/(L/\varepsilon_0) = l_0$ только на нулевом шаге, перед началом процесса деления, соответствующего процедуре построения фрактального множества – дерева Кэйли. Размер ячейки в n -м поколении нейтронов, как указано выше, равен $\varepsilon_n = L/(L/\varepsilon_0)^n$ и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ (хотя в реальных реакторах значения n конечны, но могут быть очень большими).

Рассмотрим сначала простую модель без выделения мгновенных и запаздывающих нейтронов. Используем приближение из теории ветвящихся процессов [6, 7], в котором при одном делении ядра образуется или 0 нейтронов с вероятностью π_0 или 2 нейтрона с вероятностью π_2 , $\pi_0 + \pi_2 = 1$. С вероятностью $p = \lambda_f(\lambda_f + \lambda_c)^{-1}$ один нейтрон столкнется с ядром топлива и разделит его ($\lambda_f = v\Sigma_f$, v – скорость нейтронов, Σ_f – макроскопическое сечение деления, λ_f – интенсивность деления, аналогично определяется интенсивность поглощения λ_c). Величина p вычисляется при известных значениях сечений σ_f, σ_c . Справедливы соотношения $k_{эф} = p\bar{\nu}$, где $k_{эф}$ – эффективный коэффициент размножения нейтронов, $\bar{\nu}$ – среднее число нейтронов, образующихся при одном делении ядра топлива. Заметим, что величины $p = \lambda_f(\lambda_f + \lambda_c)^{-1}$ и $p_i(\varepsilon)$ не совпадают. Так, после первого деления вероятности того, что в ячейке с размером $\varepsilon_2 = L/(L/\varepsilon_0)^2$ находятся 0, 1 и 2 нейтрона, равны: $p_0(\varepsilon) = p\pi_0$, $p_1(\varepsilon) = 1 - p$, $p_2(\varepsilon) = p\pi_2$. Затем эти вероятности становятся более сложными. Сумма вероятностей всех возможных событий после одного деления

$$\Phi = p(\pi_0 + \pi_2) + 1 - p; \quad \Phi = 1; \quad (\pi_0 + \pi_2 = 1). \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) выполняется условие нормировки вероятностей $\sum_{i=1}^N p_i(\varepsilon) = 1$, $\Phi = 1$.

Обобщенная статистическая сумма характеризуется показателем степени q , $-\infty < q < \infty$ [2]

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N p_i^q(\varepsilon). \quad (3)$$

Спектр обобщенных фрактальных размерностей определен в [2] соотношением

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (4)$$

где

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (5)$$

При $D_q = D = const$ получаем обычный регулярный монофрактал.

Для характеристики процесса деления используем алгоритм, описанный в [2], когда процесс биномиальный и обобщенная статистическая сумма, построенная в соответствии с определением (3), для нашего мультифрактала имеет вид

$$Z(q, \varepsilon) = (p_0^q + p_1^q + p_2^q)^n = \Phi_q^n, \quad \Phi_q = p^q(\pi_0^q + \pi_2^q) + (1-p)^q. \quad (6)$$

Два потенциально образовавшихся нейтрона могут привести к дальнейшим событиям с суммой вероятностей Φ^2 . Во втором поколении вероятности равны Φ^3 , в третьем - Φ^4 , в n -м - Φ^n .

Из формул (3), (5) и (6) получаем, что при $\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (7)$$

Из соотношений (4) - (7) при $Z(q, \varepsilon) = \Phi_q^n, \Phi_{q=1} = 1$ и $\varepsilon_n = L/(L/\varepsilon_0)^n$ получаем при больших n :

$$\tau(q) = (q-1)D_q = \frac{\ln \Phi_q}{(\ln L/n) - \ln(L/\varepsilon_0)} \approx -\frac{\ln \Phi_q}{\ln(L/\varepsilon_0)}. \quad (8)$$

Положив в выражение (8) $q = 0$, находим размерность

$$D_0 = -\frac{\ln 3}{\ln(l_0/L)}. \quad (9)$$

Это так называемая размерность носителя мультифрактала [2].

При $q = 1$

$$D_1 = -\frac{S}{\ln(l_0/L)}, \quad -S = \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i = p\pi_0 \ln(p\pi_0) + p\pi_2 \ln(p\pi_2) + (1-p) \ln(1-p), \quad (10)$$

где S – энтропия разбиения меры на множестве L , энтропия фрактального множества.

При $q = 2$

$$D_2 = \frac{\ln[p^2(\pi_0^2 + \pi_2^2) + (1-p)^2]}{\ln(l_0/L)}. \quad (11)$$

Определив парный корреляционный интеграл $I(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \theta(l - |r_n - r_m|)$, где суммирование проводится по всем парам точек фрактального множества с радиус-векторами r_n и r_m , $\theta(x) = 1$, если $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$, если $x < 0$, получим, что $I(l) \approx \sum_{i=1}^N p_i^2 \approx (l/L)^{D_2}$.

Если ввести плотность вероятности $\rho(r) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(r - r_i)$, $\int_L \rho(r) d^d r = 1$, то парная корреляционная функция, представляющая собой плотность вероятности двум произвольным точкам множества находиться на расстоянии r друг относительно друга, равна $C(r) = \int_L \rho(r') \rho(r'+r) d^d r'$. Для корреляционной функции $C(r)$ характерно степенное поведение с расстоянием r , т.е. $C(r) \approx 1/r^\beta$, $\beta = d - D_2$, где d – эвклидова размерность пространства, равная 3 в нашем случае. Фурье-компонента $C(k)$ в зависимости от волнового вектора k тоже меняется по степенному закону $C(k) = 1/k^{D_2}$.

Максимальное значение размерности равно

$$D_{\max} = D_{-\infty} = \frac{\ln(p\pi_0)}{\ln(l_0/L)}, \quad (12)$$

ее величина D_q достигает при $q \rightarrow -\infty$. Минимальное значение размерности

$$D_{\min} = D_{\infty} = \frac{\ln(1-p)}{\ln(l_0/L)} \quad (13)$$

достигается при $q \rightarrow \infty$. В формулах (12) и (13) мы предположили, что в соответствии с тем, что $k_{\text{эф}} = p\bar{v}$, при $k_{\text{эф}} \approx 1$, $\bar{v} = 2,4$, $p \approx 1/\bar{v} \approx 0,4$, и положили $\pi_2 = 0,8$, $\pi_0 = 0,2$.

Вместе с обобщенными размерностями D_q для характеристики мультифрактального множества используется функция мультифрактального спектра (или спектра сингулярностей мультифрактала) $f(\alpha)$ [1, 2]. Набор вероятностей p_i (1), показывающих относительную заселенность ячеек ε , которыми покрывается множество, для самоподобных множеств носит степенной характер от размера ячейки ε :

$$p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (14)$$

где α_i - показатель степени. Значения α заполняют интервал $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$,

$$p_{\min} \approx \varepsilon^{\alpha_{\max}}, \quad p_{\max} \approx \varepsilon^{\alpha_{\min}}; \quad \frac{d\tau}{dq}|_{q \rightarrow +\infty} = D_{\infty} = \alpha_{\min}; \quad \frac{d\tau}{dq}|_{q \rightarrow -\infty} = D_{-\infty} = \alpha_{\max}. \quad (15)$$

Зная D_q , можно найти зависимость $\alpha(q)$ из уравнения

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq}[(q-1)D_q]. \quad (16)$$

Для Φ_q (2) выражение (16) примет вид

$$\alpha(q) = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \frac{1}{\Phi_q} \frac{d\Phi_q}{dq}; \quad \frac{d\Phi_q}{dq} = (\ln p)p^q(\pi_0^q + \pi_2^q) + p^q(\pi_0^q \ln \pi_0 + \pi_2^q \ln \pi_2) + (1-p)^q \ln(1-p).$$

Из выражения

$$\tau(q) = q\alpha(q) - f(\alpha(q)); \quad f(\alpha(q)) = \frac{q}{\ln(l_0/L)\Phi_q} \frac{d\Phi_q}{dq} - \frac{1}{\ln(l_0/L)} \ln \Phi_q \quad (17)$$

определяется (в параметрическом виде) зависимость $f(\alpha(q))$, т.е. из формулы (16) находим $q(\alpha)$ и подставляем в выражение (17). Переменные $\{q, \tau(q)\}$ связаны с переменными $\{\alpha, f(\alpha)\}$ преобразованием

Лежандра $\alpha = \frac{d\tau}{dq}; \quad f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau$. Обратное преобразование Лежандра

$$q = \frac{df}{d\alpha}; \quad \tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f; \quad \frac{d^2 f}{d\alpha^2} = \left(\frac{d^2 \tau}{dq^2}\right)^{-1}.$$

В точке $\alpha_0 = \alpha(0)$ функция $f(\alpha)$ (всюду выпуклая) имеет максимум. Для Φ_q (2)

$$\alpha_0 = \alpha(q=0) = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \frac{1}{3} [2(\ln p) + \ln \pi_0 + \ln \pi_2 + \ln(1-p)].$$

Фрактальная размерность носителя меры равна $f(\alpha_0) = D_0$. Функция $f(\alpha)$ вблизи своего максимума может быть аппроксимирована параболой. Так как

$$\tau'(0) = \alpha_0, \quad f''(\alpha) = 1/\tau''(0), \quad \tau''(0) = 2(D_0 - \alpha_0) - D''_{q=0}, \quad \text{то}$$

$$f(\alpha) \approx D_0 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2[2(\alpha_0 - D_0) + D''_{q=0}]}.$$

Для Φ_q из выражения (2)

$$D_q = \frac{1}{\ln(l_0/L)\Phi_q} \ln \Phi_q; \quad \frac{dD_q}{dq} = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \left(-\frac{\ln \Phi_q}{(q-1)^2} + \frac{1}{(q-1)\Phi_q} \frac{d\Phi_q}{dq} \right);$$

$$\frac{d^2 D_q}{dq^2} = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \left\{ \frac{2 \ln \Phi_q}{(q-1)^3} - \frac{2}{(q-1)^2 \Phi_q} \frac{d\Phi_q}{dq} + \frac{1}{(q-1)} \left[\frac{1}{\Phi_q} \frac{d^2 \Phi_q}{dq^2} - \left(\frac{1}{\Phi_q} \frac{d\Phi_q}{dq} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\frac{d^2 \Phi_q}{dq^2} = (\ln p)^2 p^q (\pi_0^q + \pi_2^q) + 2(\ln p) p^q (\pi_0^q \ln \pi_0 + \pi_2^q \ln \pi_2) + p^q [\pi_0^q (\ln \pi_0)^2 + \pi_2^q (\ln \pi_2)^2] + (1-p)^q (\ln(1-p))^2;$$

$$\frac{d^2 D_q}{dq^2} \Big|_{q=0} = D''_{q=0} = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \left\{ -2 \ln 3 - \frac{2}{3} [2 \ln p + \ln \pi_0 + \ln \pi_2 + \ln(1-p)] + \left[\frac{1}{3} (2 \ln p + \ln \pi_0 + \ln \pi_2 + \ln(1-p))^2 - \frac{1}{3} [2(\ln p)^2 + 2 \ln p (\ln \pi_0 + \ln \pi_2) + (\ln \pi_0)^2 + (\ln \pi_2)^2 + (\ln(1-p))^2] \right] \right\}.$$

При $q=1$, $\alpha(1) = D_1 = f(\alpha(1))$. При $q=2$, $f(\alpha(2)) = 2\alpha(2) - D_2$.

Из выражения (14) $\alpha_i \approx \frac{\ln p_i}{\ln(l_0/L)}$. Распределение значений α для мультифрактала определяется

соотношением $n(\alpha) \approx \left(\frac{l_0}{L}\right)^{-f(\alpha)} = e^{-f(\alpha)\ln(l_0/L)}$.

При аппроксимации вблизи своего максимума α_0 функции $f(\alpha)$ параболой

$$f(\alpha) = D_0 - \eta(\alpha - \alpha_0)^2; \quad \eta = f''(\alpha_0)/2, \quad n(\alpha) \sim \exp\{-\eta \ln(L/l_0)(\alpha - \alpha_0)^2\}.$$

Так как $\alpha = -\ln p / \ln(L/l)$, то функция распределения вероятностей p_i равна

$$P(p) \sim \exp\{-\eta \ln(L/l_0) \left(\frac{\ln p}{\ln(L/l_0)} + \alpha_0\right)^2\}. \tag{18}$$

Это лог-нормальное распределение. Вероятности p_i характеризуют расположение нейтронов, их плотность и мощность реактора (роль координаты играет индекс i). Соотношение (18) показывает, что плотность нейтронов в критической области распределена лог-нормально по объему реактора. Распределение плотности потока тепловых нейтронов по радиусу активной зоны цилиндрического реактора описывается функцией Бесселя первого рода нулевого порядка. В пределах относительно тонкого приграничного слоя кривая распределения несколько приподнимается. В определенных приближениях такое поведение функции можно аппроксимировать правым крылом лог-нормального распределения. Отметим, что приближение (18) весьма грубое, оно не учитывает геометрию реактора. Поэтому более корректно рассматривать выражение (18) как аппроксимацию параболой спектральной функции $f(\alpha)$. Можно дать еще одну интерпретацию соотношения (18). Величина α (16)

пропорциональна величине $\sum_{i=1}^N p_i^q \ln p_i$, которая при $q=1$ совпадает с энтропией (10). И выражение (18) при $q \rightarrow 1$ оказывается связанным с распределением энтропии.

От модельной функции Φ_q из выражения (2) перейдем к более реальной ситуации, когда справедливы соотношения $k_{эф} = p\bar{V}$, вероятности возникновения $I = 0, 1, \dots, 7$ вторичных нейтронов при делении ^{235}U тепловыми нейтронами равны: $\pi_0 = 0,0333$, $\pi_1 = 0,1745$, $\pi_2 = 0,3349$, $\pi_3 = 0,3028$, $\pi_4 = 0,1231$, $\pi_5 = 0,0281$, $\pi_6 = 0,0032$, $\pi_7 = 0,0001$ [7]. Так как при делении возникают два осколка (ядра-предшественники), каждый из которых спустя некоторое время T (примерно в 10^3 раз больше, чем время жизни нейтрона) может испустить запаздывающий нейтрон, то введем вероятности $r_0(T)$, $r_1(T)$, $r_2(T)$ того, что в результате одного деления возникает $I = 0, 1, 2$ запаздывающих нейтронов, $\sum_{i=0}^2 r_i = 1$.

Величина T – период полураспада ядер-предшественников. Выделяют 6 групп запаздывающих нейтронов в зависимости от времени запаздывания. В настоящей работе не рассматривается кинетика и не учитывается зависимость $r_i(T)$ от периода T . Величина Φ_q из выражения (2) заменяется более сложной функцией вида

$$\Phi_q = (1-\beta)^q [p^q \sum_{i=0}^7 \pi_i^q + (1-p)^q] + (\beta)^q [p^q \sum_{i=0}^2 r_i^q(T) + (1-p)^q], \quad (19)$$

где для ^{235}U $\beta = 0,0064$. Вместо формул (8) - (10) получаем: $D_0 = -\frac{\ln \Phi_{q=0}}{\ln(l/L)} \approx 0,557$; $\Phi_{q=0} = 13$, $\frac{l_0}{L} \approx 10^{-2}$.

$$-S = (1-\beta) [p \sum_{i=0}^7 \pi_i \ln(p\pi_i) + \ln(1-\beta)] + (\beta) [p \sum_{i=0}^2 r_i(T) \ln(pr_i) + \ln(\beta)] + (1-p) \ln(1-p), \quad D_1 = 0,294,$$

$$D_2 = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \ln \{ (1-\beta)^2 [p^2 \sum_{i=0}^7 \pi_i^2 + (1-p)^2] + (\beta)^2 [p^2 \sum_{i=0}^2 r_i^2(T) + (1-p)^2] \}, \quad D_2 = 0,211.$$

Значения $D_{\max} = D_{-\infty} = \alpha_{\max}$ и $D_{\min} = D_{\infty} = \alpha_{\min}$ (30) зависят от минимальных и максимальных значений произведений $(1-\beta)p\pi_i$, $i = 0, \dots, 7$, βpr_i , $i = 0, 1, 2$, $(1-\beta)(1-p)$, $\beta(1-p)$, где величины r_i , $i = 0, 1, 2$, не определены. Если задать $r_0 = r_2 = 0,1$, $r_1 = 0,8$, то минимально значение $(1-\beta)p\pi_7$, и $D_{-\infty} = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \ln[(1-\beta)p\pi_7] \approx 2,1$. Максимальной в этом случае будет комбинация $(1-\beta)(1-p)$, и $D_{\infty} = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \ln[(1-\beta)(1-p)] \approx 0,125$.

Из соотношений (3) - (8) и (19) построим спектр обобщенных размерностей (рис. 1).

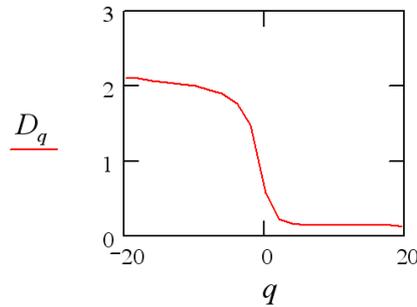


Рис. 1. Спектр обобщенных размерностей для цепочек деления в ЯР с учетом запаздывающих нейтронов.

Так же, как и выше, из формулы (19) определяются величины $\frac{d\Phi_q}{dq}|_{q=0}$, $\frac{d^2\Phi_q}{dq^2}|_{q=0}$ и

$$\alpha_0 = \alpha(q=0) = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \frac{1}{13} [9\ln(1-\beta) + 8(\ln p) + \sum_{i=0}^7 \ln \pi_i + \ln(1-p) + 4\ln(\beta) + 3(\ln p) + \sum_{i=0}^2 \ln r_i + \ln(1-p)].$$

В выражении для η из формулы (18) стоит величина

$$D''_{q=0} = \frac{1}{\ln(l_0/L)} \left\{ -2\ln 13 - \frac{2}{13} \frac{d\Phi_q}{dq} \Big|_{q=0} + \left(\frac{1}{13} \frac{d\Phi_q}{dq} \Big|_{q=0} \right)^2 - \frac{1}{13} \frac{d^2\Phi_q}{dq^2} \Big|_{q=0} \right\},$$

$$\frac{d\Phi_q}{dq} \Big|_{q=0} = 9\ln(1-\beta) + [8(\ln p) + \sum_{i=0}^7 \ln \pi_i + \ln(1-p)] + 4\ln(\beta) + [3(\ln p) + \sum_{i=0}^2 \ln r_i + \ln(1-p)],$$

$$\frac{d^2\Phi_q}{dq^2} \Big|_{q=0} = 9[\ln(1-\beta)]^2 + 2\ln(1-\beta)[8(\ln p) + \sum_{i=0}^7 \ln \pi_i + \ln(1-p)] + 4(\ln(\beta))^2 + 11(\ln p)^2 +$$

$$+ 2\ln p \left(\sum_{i=0}^7 \ln \pi_i + \sum_{i=0}^2 \ln r_i \right) + \sum_{i=0}^7 (\ln \pi_i)^2 + 2(\ln(1-p))^2 + 2\ln\beta [3\ln p + \sum_{i=0}^2 \ln r_i + \ln(1-p)] + \sum_{i=0}^2 (\ln r_i)^2$$

В лог-нормальном распределении вида (18) в качестве вероятностей p фигурируют комбинации величин $(1-\beta)p\pi_i$, $i = 0, \dots, 7$, βpr_i , $i = 0, 1, 2$, $(1-\beta)(1-p)$, $\beta(1-p)$.

Если построить зависимость мультифрактального спектра $f(\alpha)$ из формулы (16), используя подход работ [1, 19], с мерой мультипликативной популяции, то получим зависимость, как на рис. 2

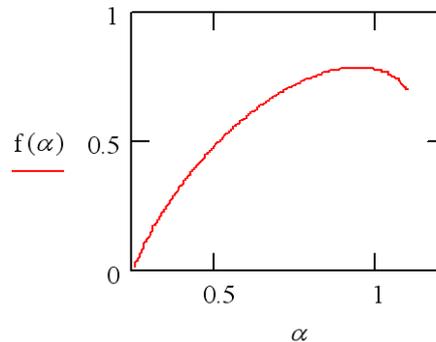


Рис. 2. Функция мультифрактального спектра для цепочек деления в ЯР с учетом запаздывающих нейтронов. Сходный вид имеет функция $f(\alpha)$ для неоднородного треугольника Серпинского [2].

Заключение

Исследование мультифрактальности, возможностей ее количественного описания, представляет собой новый метод анализа экспериментальных данных, применимый к широкому кругу задач. В [8 - 10] описан мультифрактальный анализ сложных сигналов, применимый, например, к нестационарной мощности реактора. При помощи мультифрактального флуктуационного анализа исследовались временные ряды в экономике, медицине, метеорологии. Не менее успешно можно использовать его в различных задачах теории ядерных реакторов.

Затронутые в настоящей работе вопросы имеют много других разнообразных аспектов. Так, использование геометрических характеристик мультифрактала позволяет описать стохастическую систему, состоящую из иерархически соподчиненных статистических ансамблей и характеризующуюся деревьями Кэйли [9 - 11], как эволюция нейтронов в реакторе. В [9, 10] показано, что эволюция иерархических структур сводится к процессу аномальной диффузии в ультраметрическом пространстве, в результате чего устанавливается стационарное распределение по иерархическим уровням, сводящееся к степенному закону Цаллиса, свойственному неаддитивным системам [3, 12]. Распределение Цаллиса является частным случаем суперстатистик [13], связанным с распределением, содержащим время жизни [14], применявшемуся к исследованию процессов в ядерном реакторе [15, 16].

Эволюция нейтронов в реакторе проходит по фрактальным траекториям вида деревьев Кэйли. Это подтверждается успешным описанием нейтронных процессов в реакторе случайными ветвящимися процессами [6, 7]. Многие результаты, полученные для фрактальных структур, могут найти применение в теории ядерных реакторов. В частности, из рис. 2 следует, что неоднородный треугольник Серпинского может служить эффективной моделью описания цепных реакций в реакторе. Аномальная диффузия, а также такие характеристики, как время первого достижения уровня и др., на треугольнике Серпинского и ветвящихся структурах рассматриваются, например, в [22]. Можно привести аналогию со статистической физикой, в которой эффективной моделью служит модель Изинга. Такие характеристики реактора, как критический размер, мощность, скорость распространения возмущений и пр. связаны с фрактальной геометрией. Поэтому учет фрактальных закономерностей при описании поведения нейтронов в реакторе представляется полезным и необходимым. При этом мно-

гие известные явления рассматриваются с другой точки зрения, позволяя обнаружить какие-то новые черты хорошо знакомых уже вещей. Многие результаты теории фракталов могут найти применение в теории реакторов.

Количество практических применений фрактальных закономерностей в теории ядерных реакторов может быть очень велико. Для иллюстрации укажем на результат, полученный в [5] для размера критической области, в которой могут находиться значения порога протекания, критической точки $k_{эф}$. Ширина этой области $\delta = (l/L)^{1/\nu}$, где ν - индекс радиуса корреляции, соответствующего критическому размеру реактора $R_c = \pi M(k_{эф}-1)^{-\nu/2}$, $\nu=1/2$, где $M = (L_T + \tau_T)^{1/2}$ - длина миграции нейтрона [21], L_T - длина диффузии нейтронов при температуре T , τ_T - возраст тепловых нейтронов [21], l - величина порядка размера решетки, порядка длины свободного пробега нейтрона в реакторе, $L \leq R_c$, $L \approx R_c$. Для реактора величина δ переписывается в виде $\delta = (\pi M / L\sqrt{\bar{\nu}})^2$, где $\bar{\nu}$ - математическое ожидание числа вторичных нейтронов в одном акте деления. В самой критической точке величины L и R_c стремятся к бесконечности, величина δ стремится к нулю, критическая область обращается в точку. В [5] указаны также зависимости величины δ от общего числа узлов N , числа нейтронов. Полуширина распределения значений критической точки равна $\Delta_N = 2(2 \ln 2)\delta(N)$, $\delta(N) = C / N^{1/\nu d}$, $(1/\nu d) = 2/3$, C - численный коэффициент. Но для систем с не очень большим числом нейтронов, например критическая сборка, реактор в период запуска и пр., величина N может быть сравнительно небольшой, и критическая точка может с определенной вероятностью принимать различные значения в конечном интервале. Происходят флуктуации критической точки. В [5] определена вероятность того, что порог перколяции, которому соответствует критическая точка реактора, отличается от среднего значения $k_{эф}=1$ на величину, лежащую в интервале δ . При больших N полученная функция распределения порогов протекания превращается в резкий пик. Все значения порогов протекания, кроме одного, имеют нулевую вероятность, порог протекания превращается из величины случайной в величину достоверную. Полученные в [5] соотношения позволяют уточнить поведение режимов приближения к критической точке при пуске реактора, важных для безопасности АЭС.

Еще один результат из [5] относится к доле узлов, принадлежащих скелету бесконечного кластера, точкам, имеющим, по крайней мере, два пути, выходящих из них в разные стороны. Для значений критических индексов, справедливых для реактора, доля узлов, принадлежащих скелету бесконечного кластера, в критической точке по порядку величины совпадает с долей узлов бесконечного кластера. Это соответствует ситуации, когда доля мертвых концов кластера, точек поглощения нейтронов, в критической точке по порядку величины совпадает с полным числом узлов, принадлежащих бесконечному кластеру, хотя для многих других фрактальных систем, например ферромагнетиков, основная «масса» бесконечного кластера сосредоточена в мертвых концах.

Кинетика и процессы переноса в фрактальных реакторных структурах рассмотрены в [10, 11, 17, 18]. Возникает проблема сравнения результатов, получаемых из уравнений в дробных производных, применяющихся для описания нестационарных процессов на фрактальных структурах [17, 18], с результатами, полученными из стандартно используемых уравнений в евклидовом пространстве. В [20] отмечено, что во многих подобных ситуациях различие результатов оказывается несущественным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feder E.* Fractals. - New York: Plenum Press, 1988. - 260 p.
2. *Божокин С. В., Паришин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. - 128 с.
3. *Tsallis, Constantino.* Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world (Online-Ausg. ed.). - New York: Springer, 2009. - 456 p.
4. *Климонтович Ю.Л.* Введение в физику открытых систем. - М.: Янус-К, 2002. - 284 с.
5. *Эфрос А. Л.* Физика и геометрия беспорядка. - М.: Наука, 1982. - 176 с.
6. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. - М.: Наука, 1971. - 436 с.
7. *Дорогов В. И., Чистяков В. П.* Вероятностные модели превращения частиц. - М.: Наука, 1988. - 111 с.
8. *Павлов А. Н., Анищенко В. С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // УФН. - 2007. - Т. 177, № 8. - С. 859-876.

9. *Шуда И. А.* Влияние иерархического строения и самоподобия на самоорганизацию сложных систем: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Сумы, 2011.
10. *Олемской А. И.* Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория. – М.: Красанд, 2009. – 379 с.
11. *Олемской А. И., Флат А. Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. – 1993. – Т. 163, № 12. – С. 1 – 50.
12. *Tsallis C.* Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics // J. Stat. Phys. – 1988. – Vol. 52, №1. – P. 479–487.
13. *Beck C., Cohen E. G. D.* Superstatistics // Physica A. – 2003. – Vol. 322A. – P. 267 – 275.
14. *Ryazanov V. V., Shpyrko S. G.* First-passage time: a conception leading to superstatistics // Condensed Matter Physics. – 2006. – Vol. 9, No. 1(45). – P. 71–80.
15. *Рязанов В. В.* Распределение энергии нейтронов в ядерном реакторе с учетом конечности их времени жизни // Атомная энергия. – 2005. – Т. 99, № 5. – С. 348–353.
16. *Рязанов В. В.* Распределение времени достижения уровня числом нейтронов и период реактора // Атомная энергия. – 2011. – Т. 110, №6. – С. 307–317.
17. *Зеленый Л. М., Милованов А. В.* Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–852.
18. *Учайкин В. В.* Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН. – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 847–876.
19. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / Пер. с англ. - Ижевск: РХД, 2001. - 528 с.
20. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. - San Francisco: Freeman, 1982. – 530 p.
21. *Бартоломей Г.Г., Бать Г.А., Байбаков В.Д., Алтухов М.С.* Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов / Под ред. Г. А. Батя. - М.: Энергоиздат, 1982. – 511 с.
22. *Ben-Avraham D., Havlin S.* Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. - Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 316 p.

В. В. Рязанов

Институт ядерних досліджень НАН України, просп. Науки, 47, Київ, 03680, Україна

МУЛЬТИФРАКТАЛЬНІСТЬ І ЛАНЦЮГОВІ РЕАКЦІЇ

Розглянуто мультифрактальну модель еволюції нейтронів у реакторі. Для ланцюгових реакцій знаходяться розмірність носія мультифрактала, інформаційна та кореляційна розмірності, ентропія фрактальної множини, максимальне та мінімальне значення розмірності, функція мультифрактального спектра та інші характеристики мультифрактальної нейтронної поведінки. Використання геометричних характеристик мультифрактала дозволяє описати стохастичну систему ієрархічно супідрядних статистичних ансамблів, що характеризується деревами Кейлі. Установлюється стаціонарний розподіл по ієрархічних рівнях, який зводиться до степеневому закону Цалліса. Указано деякі можливості використання фрактальних закономірностей у теорії ядерних реакторів.

Ключові слова: мультифрактальність, узагальнені розмірності, мультифрактальний спектр.

V. V. Ryazanov

*Institute for Nuclear Research National Academy of Sciences of Ukraine,
Prospect Nauky, 47, Kyiv, 03680, Ukraine*

MULTIFRACTALITY AND CHAIN REACTIONS

Multifractal model for the evolution of neutrons in the reactor considered. For chain reactions are multifractal dimension of the multifractal support, information and correlation dimensions, entropy of fractal set, maximum and minimum dimensions, function of multifractal spectrum and other characteristics of the multifractal behavior of the neutrons are obtained. Using the geometric characteristics of the multifractal can describe the stochastic system hierarchically subordinate statistical ensembles characterized Cayley trees. A stationary distribution of the hierarchical levels, which reduces to a power Tsallis law. Shows some possibilities of using fractal patterns in the theory of nuclear reactors.

Keywords: multifractality, generalized dimension, multifractal spectrum.

REFERENCES

1. *Feder E.* Fractals. - New York: Plenum Press, 1988. – 260 p
2. *Bozhokin S.V., Parshin D.A.* Fractals and multifractals. - Izhevsk: NITs "Regular and Chaotic Dynamics", 2001. – 128 p. (Rus)

3. *Tsallis, Constantino*. Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world (Online-Ausg. ed.). - New York: Springer, 2009. - 456 p.
4. *Klimontovich Y.L.* Introduction to the physics of open systems. – Moskwa: Janus-K, 2002. - 284 p. (Rus)
5. *Efros A.L.* Physics and Geometry of disorder. – Moskwa: Nauka, 1982. - 176 p. (Rus)
6. *Sevastiyarov B.A.* Branching processes. - Moskwa: Nauka, 1971. - 436 p. (Rus)
7. *Dorogov V.I., Chistyakov V.P.* Probabilistic models of particles transformations. - Moscow: Nauka, 1988. – 111 p. (Rus)
8. *Pavlov A.N., Anishchenko V.S.* Multifractal analysis of complex signals // Uspehi fizicheskikh nauk, 2007. - Vol 177, № 8. - P. 859 - 876. (Rus)
9. *Shuda I.A.* Influence of the hierarchical structure and self-similarity to self-organization of complex systems: Dis. Doctor. phys.-math. sciences. – Sumy, 2011. (Rus)
10. *Olemskoy A.I.* Synergetics of complex systems. Phenomenology and statistical theory. - Moskwa: Krasand, 2009. - 379 c. (Rus)
11. *Olemskoi A.I., Flath A.Y.* Using fractal concepts in condensed-matter physics // Uspehi fizicheskikh nauk. - 1993. - Vol. 163, № 12. - P. 1 - 50. (Rus)
12. *Tsallis C.* Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics // J. Stat. Phys. - 1988. - Vol. 52, No. 1. - P. 479 - 487.
13. *Beck C., Cohen E.G.D.* Superstatistics // Physica A. - 2003. - Vol. 322A. - P. 267 -275.
14. *Ryazanov V.V., Shpyrko S.G.* First-passage time: a conception leading to superstatistics // Condensed Matter Physics. - 2006. - Vol. 9, No. 1 (45). - P. 71 - 80.
15. *Ryazanov V.* Neutron Energy Distribution in a Nuclear Reactor Taking Account of the Finiteness of the Neutron Lifetime // Atomic energy. - 2005. – Vol. 99, № 5. - P. 782 - 786.
16. *Ryazanov V.* Neutron number first-passage time distribution and the reactor time constant // Atomic energy. - 2011. - Vol 110, № 6. - P. 376-388.
17. *Zelenyi L.M., Milovanov A.B.* Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics // Uspehi fizicheskikh nauk. - 2004. - Vol. 174, № 8. - P. 809 - 852. (Rus)
18. *Uchaikin V.V.* Similar anomalous diffusion and stable laws // Uspehi fizicheskikh nauk. - 2003. - Vol. 173, № 8. – P. 847 -876. (Rus)
19. *Schroeder M.* Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise. - Izhevsk: RHD, 2001. – 528 p. (Rus)
20. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Natura. - San Francisco: Freeman, 1982. - 530 p.
21. *Bartholomew G.G., Bat G.A., Baybakov V.D., Altukhov M.S.* Fundamentals of the theory and methods of calculation of nuclear power reactors. – Moskwa: Energoizdat, 1982. – 511 p. (Rus)
22. *Ben-Avraham D., Havlin S.* Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. - Cambridge: Cambridge University Press, 2000. - 316 p.

Надійшла 24.03.2014
Received 24.03.2014