

ПЕРКОЛЯЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЦЕПНОЙ РЕАКЦИИ

При помощи строгих соотношений теории перколяции на решетках Бете описывается поведение коэффициента размножения нейтронов на ранних стадиях развития самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер. Рассмотрено поведение вероятности перколяции, в этой задаче - вероятности возникновения самоподдерживающейся цепной реакции и производных от этой величины. Указаны возможности определения границ критической области и найдены различные распределения для вероятностей перколяции при больших значениях числа поколений нейтронов. В зависимости от близости вероятности деления ядра нейтроном к критическому значению выделены различные режимы, в которых изменяются и вид распределения, и поток нейтронов, и геометрические траектории движения нейтронов.

Ключевые слова: перколяция, цепные реакции, деревья Кэйли, вероятность возникновения самоподдерживающейся цепной реакции.

Введение

Теория перколяции (протекания) представляет собой обширную математическую дисциплину [1 - 6], имеющую много важных физических приложений. Перколяцией описывают возникновение связанных структур, состоящих из отдельных элементов. Перколяцией называют момент появления такого состояния системы, при котором существует хотя бы один непрерывный путь через соседние проводящие узлы от одного до противоположного края системы. Теория перколяции математически связана с теорией вероятности в графах. Для физиков перколяция – это геометрический фазовый переход. Перколяционный переход является геометрической моделью фазовых переходов от одной фазы к другой [1, 2].

Перколяционные явления тесно связаны с фрактальностью, явлениями самоподобия и универсальности, с особенностями динамики поведения сложных систем. Фрактальными и мультифрактальными являются многие физические системы, в том числе и цепные реакции [10, 11]. Структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому, называется в [7] фрактальной. В критической области, где и происходит фазовый переход, наиболее явно проявляются фрактальные свойства. Именно в критической точке работает ядерный реактор (ЯР), и фрактальное, и перколяционное описание должны оказаться важными для характеристики поведения нейтронов в реакторе [8]. В настоящей работе использована простая модель дискретной теории перколяции, в которой случайное множество индуцируется однородным бернуллиевским случайным полем и бесконечный граф является однородным деревом с постоянным порядком ветвления. Эта модель является исторически первой перколяционной моделью, возникшей еще до рождения теории перколяции и обязанной своим появлением теории марковских ветвящихся случайных процессов с дискретным временем (а именно теории процесса Гальтона - Ватсона), неоднократно использовавшейся для описания нейтронных процессов в реакторе.

Соотношения теории перколяции [1, 4] справедливы и в общей теории фазовых переходов. При помощи фрактальных концепций изучались сильно развитая турбулентность, неоднородные звездные скопления [9], диффузионно-ограниченная агрегация, процессы разрушения вещества, строение крови и т. д. Некоторые общие аспекты затронутых в настоящей работе проблем рассмотрены в [10, 11]. Ниже с перколяционных позиций рассмотрены процессы цепной реакции в реакторе.

Критическое состояние реактора - это фазовый переход, и адекватное его описание должно использовать перколяцию. Важность соотношений теории перколяции для нейтронных процессов в реакторе видна уже из того, что они позволяют сразу, интерпретируя общие соотношения теории протекания, получить уравнение размножения нейтронов и выражение для критического размера реактора [10, 11]. Интерес могут представлять и многие другие соотношения перколяционной теории, применяемые к реакторам. Такого рода модели позволяют обнаруживать новые черты известных явлений, изученных другими способами. Перколяция представляет собой критический процесс, предполагающий существование порога, критической точки. У порога протекание происходит по фрактальному множеству, геометрия которого определяется критичностью. Геометрические характеристики фрактала независимы от микроскопических свойств среды. Ниже критической точки кинетиче-

ские процессы ограничены конечной областью фазового пространства, рассеянием, поглощением и другими нейтронными процессами. В критической точке определяющим становится фрактальное множество, формирующееся при понижении свободной энергии статистического ансамбля. Поведение системы при медленных вынуждающих воздействиях на нее стремится к самоорганизованной критичности - сингулярному неравновесному (квази)стационарному состоянию [12, 13]. Стационарные неравновесные состояния на фрактальных структурах носят хаотический, турбулентный характер. В [14, 15] для их исследования применяется модель Лоренца.

Отдельного исследования требует кинетика и процессы переноса в фрактальных структурах [9, 14 - 16]. Процессы переноса на пороге протекания обсуждаются в [9]. Уравнения в дробных производных учитывают эффекты памяти, нелокальности и перемежаемости. Точных самоподобий в природе мало, редки фракталы с постоянной размерностью, зато распространены фракталы с переменной размерностью - мультифракталы [4, 17]. Это относится и к нейтронным процессам в реакторах [11].

Использование теории перколяции на решетках Бете для описания динамики коэффициента размножения нейтронов

Цепочки деления в ЯР имеют геометрический вид деревьев Кэйли [1 - 4]. Дерево Кэйли, называемое также решеткой Бете, строится, начиная с центрального узла, из которого исходят z ветвей единичной длины, образующие первую оболочку дерева Кэйли. Конец каждой ветви также является узлом. Из каждого узла исходят $z-1$ новых ветвей, образуя $z(z-1)$ узлов второй оболочки. Процесс продолжается до бесконечности. Так получается бесконечное дерево Кэйли с z ветвями, исходящими из каждого узла. В системе нет петель, поскольку любые два узла соединены только одним путем. При этом следует учитывать случайный характер ветвления. Знание внутренних свойств кластеров позволяет исследовать их динамические свойства [10 - 11].

Траектории движений нейтронов в ЯР имеют характерную ветвистую структуру [10]. На рис. 1 схематически показаны траектории потомков одного нейтрона, введенного в размножающую среду, с деления ядер и поглощения нейтронов, которые приводят к изменению численности популяции нейтронов. Показано, как учет поглощения нейтронов, обрывающий ветви дерева Кэйли, дает возможность получить картину, соответствующую процессам в ЯР.

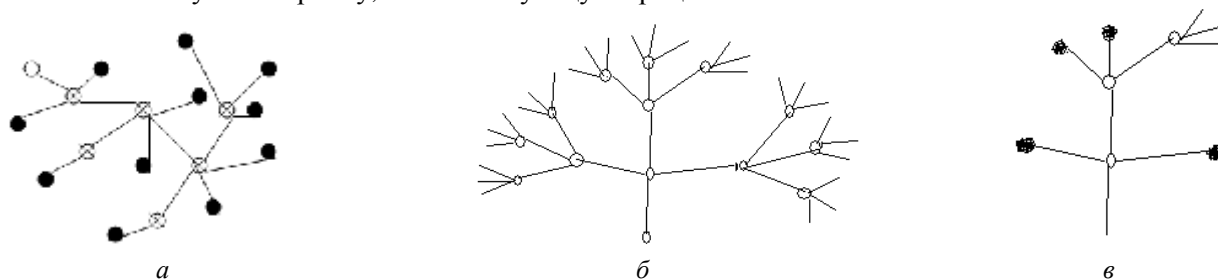


Рис. 1. Траектории нейтрона и его потомков в размножающей среде (а): i - точка начала движения первоначального нейтрона; \ddot{A} - точки деления ядер нейтронами; \bullet - точки поглощения нейтронов. Из дерева Кэйли вида б, вводя висячие концы (темные точки), точки поглощения нейтронов, можно получить дерево вида в, сходное с а.

Ветвящиеся случайные процессы [18], описывающие нейтронные процессы в реакторе [19], также изображаются деревьями. Мы рассматриваем аспект задачи, определяющийся величиной и характером поведения кластеров - связанных друг с другом узлов. В теории перколяции рассматриваются узлы и связи между ними. В качестве узлов мы понимаем делящееся ядро (или введенный в систему нейтрон - корень дерева [20]), под связью - траектории нейтронов. Точки поглощения нейтронов образуют так называемые висячие концы [20].

Висячие концы преобладают при большой подкритичности, когда эффективный коэффициент размножения $k_{эф}$ много меньше единицы, кластеры в системе небольшого размера, время их жизни невелико. Как в [19], обозначим интенсивность гибели нейтрона $l_c \Delta t + 0(\Delta t)$ (поглощение средой или уход из системы) за время $\Delta t \otimes 0$, а интенсивность деления ядра нейтроном $\lambda_f \Delta t + 0(\Delta t)$ ($\lambda_f = v \Sigma_f$, v - скорость нейтронов, Σ_f - макроскопическое сечение деления). Тогда вероятность деления ядра нейтроном равна

$$c = \lambda_f (\lambda_f + \lambda_c)^{-1}. \quad (1)$$

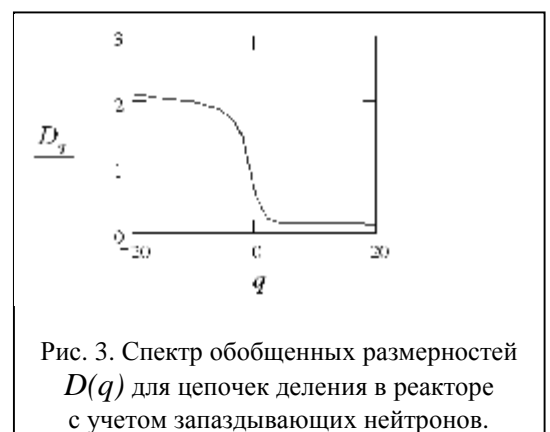
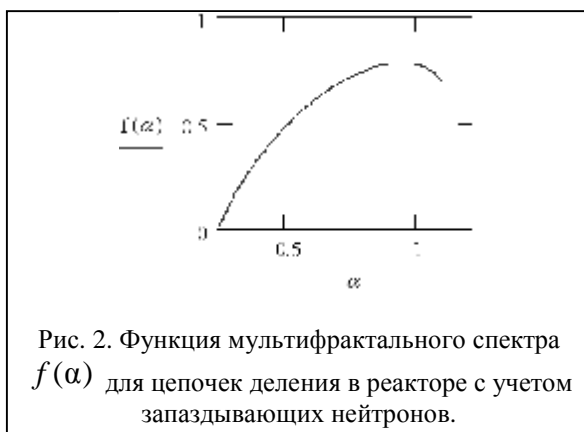
Эффективный коэффициент размножения нейтронов $k_{эф} = c\bar{n}$, где \bar{n} - математическое ожидание числа вторичных нейтронов в одном акте деления. При увеличении c увеличиваются величины кластеров. При $c = 1$ все ядра топлива в ЯР разделяются, и $k_{эф, макс} = \bar{n}$. При $1-c \ll 1$ в системе имеется бесконечный кластер. При некотором критическом значении c_c происходит переход от одного режима к другому - впервые возникает бесконечный кластер. В перколяционной модели строго математически получено [1 - 4, 7], что в этом случае $k_{эф} = 1$, $c_c = 1/\bar{n}$. Образование бесконечного кластера представляет собой фазовый переход, начало самоподдерживающейся цепной реакции, критическую точку системы. В теории фазовых переходов важную роль играет понятие параметра порядка, физической величины, занимающей ключевое место в процессах, приводящих к превращению. В теории перколяционных кластеров параметр порядка это мощность бесконечного кластера - вероятность узлу решетки принадлежать бесконечному кластеру. Критическое поведение этой величины при $c \approx c_c$, $c > c_c$ определяется зависимостью

$$P_{\infty} \sim (c - c_c)^b, \quad (2)$$

где b - один из критических показателей, скейлинговых индексов [1, 4]. Величина b определяет критическое поведение мощности бесконечного кластера P_{∞} . В теории перколяции вероятность (2) называют еще вероятностью перколяции. Она служит основной характеристикой перколяционной системы. Для нейтронов в реакторе эта величина трактуется как вероятность возникновения самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер. Определяются и такие величины, как среднее число узлов конечного кластера, длина корреляции χ , характерный пространственный масштаб кластера при $c < c_c$, а при $c > c_c$ - характерный размер пустот в нем [10, 11].

Формулы теории перколяции для числа узлов и длины корреляции в теории ядерных реакторов (хотя там они получены другим путем) соответствуют уравнению размножения нейтронов: $N = (1 - k_{эф})^{-1}$, и уравнению критического размера $R_{эф} = \rho M (k_{эф} - 1)^{-1/2}$, где $R_{эф}$ - эффективный размер, геометрический параметр, M - длина миграции нейтронов. В этом случае показатели $g = 1$, $n = 1/2$ [10]. Классическая теория позволяет получить для дерева Кэйли значения индексов, равные $g = 1$, $b = 1$, $n = 1/2$, $d = 2$, $h = 0$, $\alpha = 1$ [1]. Нейтроны не взаимодействуют, и справедлива теория самосогласованного поля с классическими значениями индексов.

Мультифрактальные свойства нейтронных процессов в реакторах исследуются при учете особенностей процесса деления. Если построить зависимость мультифрактального спектра $f(\alpha)$ [17], где α - показатель степени вероятности относительной заселенности ячеек фрактального множества [17, 11], используя подход работ [4, 13], с мерой мультипликативной популяции, то получим зависимость вида рис. 2 [11]. Определяется и спектр обобщенных размерностей $D(q)$ [17], рис. 3 [11], где q - показатель степени обобщенной статистической суммы [11, 15, 17].



С вероятностью c (1) связана важная величина порога протекания, критической точки - для реакторов. Совокупность элементов, по которым происходит протекание, называется перколяционным кластером. Будучи по своей природе связным случайным графом, в зависимости от конкретной реализации он может иметь различную форму. Порогом протекания называется количество элементов перколяционного кластера, отнесенное к общему количеству элементов рассматриваемой среды. Ввиду случайного характера переключений состояний элементов среды, в конечной системе четко

определенного порога (размера критического кластера) не существует, а имеется так называемая критическая область значений, в которую с некоторой вероятностью попадают значения порога перколяции, полученные в результате различных случайных реализаций. С увеличением размеров системы область сужается в точку (в энергетических реакторах этому могут препятствовать обратные связи и управление).

Процессы на решетках Бете рассматриваются, как правило, для случаев бесконечной решетки. В настоящей работе рассмотрен случай конечной решетки, что соответствует конечному числу нейтронов в реакторе. Такая ситуация важна, например, при пуске реактора, в критических сборках. Полученные результаты могут оказаться полезными и для быстрых реакторов, и для переходных процессов. Знание коэффициента размножения важно для безопасности реактора. Кроме вероятности перколяции и порога перколяции существует большое количество других характеристик перколяционного процесса [1].

В [21] получено рекуррентное соотношение для вероятности перколяции из корневой вершины, вероятности того, что связная компонента конфигурации, содержащая корневую вершину (некоторую начальную точку появления первого нейтрона в системе, породившего цепную реакцию), достигает противоположных краев системы. Условно математически размер системы и связной компоненты устремляется к бесконечности, хотя реальные системы конечны. В [21] величина $P(n, c)$ обозначает вероятность перколяции из корневой вершины на расстояние n . Величина n в нашей задаче интерпретируется, как число поколений нейтронов в цепной реакции. Число $c_{c\infty} = \inf\{c: P(c) > 0\}$ называется в [21] порогом перколяции. В [4] эта величина называется критической вероятностью, при которой впервые возникает кластер, простирающийся по всей решетке. Здесь $P(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, c)$, как в выражении (2). Будем считать, что и для конечных значений n существует порог перколяции

$$c_{cn} = \inf\{c_n: P(n, c) > 0\}. \tag{3}$$

Так как эффективный коэффициент размножения равен $k_{эф} = c\bar{n}$, то для n -го поколения нейтронов $k_{эфnc} = c_{cn}\bar{n}$, $c_{cn} < c_{c\infty}$, $k_{эфnc} < 1$. При увеличении числа поколений n , в процессе роста цепной реакции $k_{эф}$ растет от 0 до 1. Из рис. 6 видно, что после первого поколения нейтронов, когда вероятность $P(1, c)$ близка к c , коэффициент размножения близок к нулю, вероятность возникновения цепной реакции велика. Но в это время разделилось всего несколько ядер топлива. Потенции, вероятности у них тогда максимальны, но реальной мощности пока не хватает. По мере развития реакции, увеличения числа делящихся ядер и нейтронов в системе, порог перколяции и коэффициент размножения увеличиваются, вплоть до значения $c_0 = c_{c\infty}$, которое практически не достигается (точнее, достигается при $n \rightarrow \infty$, на бесконечно больших временах), но снизу к нему очень близко подходят значения c_{cn} при больших n . Такова картина эволюции, развития во времени самоподдерживающейся цепной реакции.

Рекуррентное соотношение, полученное в [21] для вероятности перколяции, имеет вид

$$P(n+1, c) = c[1 - (1 - P(n, c))^s], \quad P(0, c) = c, \tag{4}$$

где $s = \bar{n}$. Полученные из выражения (4) выражения для производных по c от $P(n, c)$ имеют вид

$$f(n, c) = dP(n, c)/dc; \quad f(n+1, c) = 1 - (1 - P(n, c))^{s-1} [1 - P(n, c) - csf(n, c)], \quad f(0, c) = 1, \tag{5}$$

$$r(n+1, c) = s(1 - P(n, c))^{s-2} [2(1 - P(n, c))(dP(n, c)/dc) - c(s-1)(dP(n, c)/dc)^2 + c(1 - P(n, c))r(n, c)],$$

$$r(n, c) = d^2P(n, c)/dc^2; \quad r(0, c) = 0. \tag{6}$$

Из выражения (4) при $\bar{n} = 2,4$ (для ^{235}U) получается картина поведения вероятности перколяции для решетки Бете, показанная на рис. 4. Вероятность $P(n, c)$ изображена при $n = 750$. Вертикальная линия показывает значение $c_{c\infty} = \bar{n}^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$.

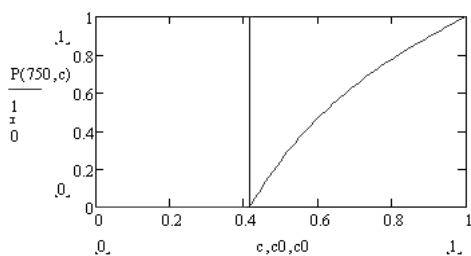


Рис. 4. Вероятность перколяции для решетки Бете, рассчитанная для $n = 750$.

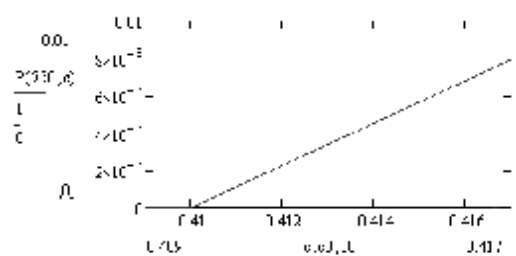


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но диапазон изменения c не $(0 - 1)$, а $(0,409 - 0,417)$.

Так как система конечна, число поколений $n = 750$, то критическая вероятность не равна $c_{\infty} = \bar{\pi}^{-1} \approx 0,417$. Это видно из рис. 5, где показан более крупный масштаб рис. 4, диапазон изменения величины c от 0,409 до 0,417. Из рис. 5 видно, что $c_{c750} \approx 0,41 < \bar{\pi}^{-1}$. На интервале от $c = 0,41$ до 0,417 существует ненулевая, порядка $10^{-3} - 8 \cdot 10^{-3}$, вероятность перколяции или - для реакторов - возникновения самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер урана. Таким образом, для конечных систем порог перколяции c_{cn} меньше c_{∞} , а коэффициент размножения $k_{эфмс}$ меньше единицы.

Нас интересует движение критической точки при увеличении числа поколений нейтронов n . В [2, 3] проведены оценки величины критической области, в которой могут находиться значения порога протекания, самой критической точки. Но там эти оценки сделаны не для дерева Кэйли. В [2] подчеркивается, что величина c_c становится достоверной только в случае бесконечно больших систем. Для конечных систем это величина случайная, попадающая с некоторой вероятностью в определенный интервал. Расчеты по формуле (4) показывают, что при малом числе поколений нейтронов n вероятность возникновения самоподдерживающейся цепной реакции не равна нулю при значениях c , намного меньших, чем c_{∞} . На рис. 6 показано поведение $P(n, c)$ при $n = 1, 20, 100$.

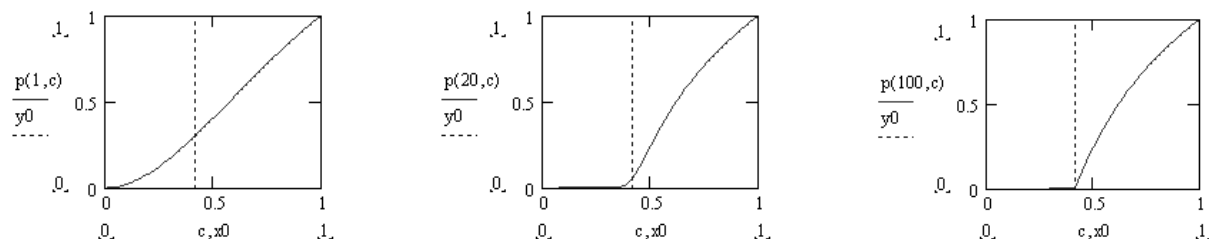


Рис. 6. Поведение вероятности $P(n, c)$ при $n = 1, 20, 100$.

Можно сделать вывод, что на начальных стадиях возникновения цепной реакции интервал, в котором может находиться величина c_c , размер критической области, значителен. На рис. 7 показаны зависимости $P(n, c_0)$, $c_0 = c_{\infty}$, от n в различных интервалах изменения n : от 0 до 1000, от 5000 до 6000, от 13000 до 14000.

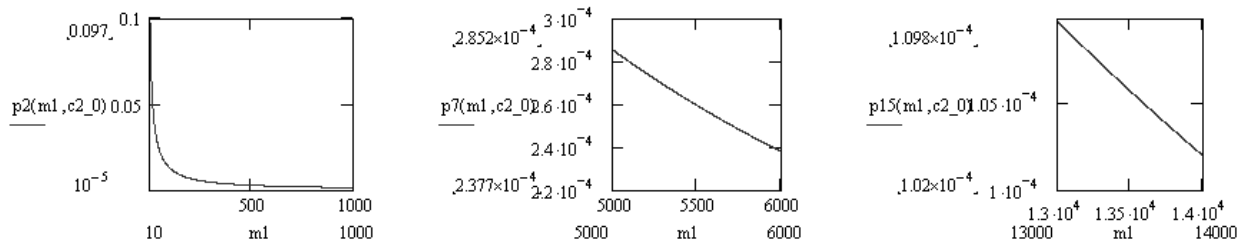


Рис. 7. Зависимости $P(n, c_0)$, $c_0 = c_{\infty}$, от $n = m_1$ в различных интервалах изменения n .

Все эти кривые рис.7 аппроксимируются зависимостью

$$1,43/n. \tag{7}$$

Для значений c , отличных от c_{∞} , соотношение (7) не выполняется. В некоторых работах (например [3]) величина критической области описывается как $c \approx c_c + B/L + \dots$, где L – размер системы. В [22] отмечено, что размер перколяционной решетки пропорционален $\ln N$. Так как $N = (c\bar{\pi})^n$, то это соответствует выражению (7). В надкритической области величина $P(n,c)$ зависит только от c и практически не зависит от n .

Из выражения (7) можно оценить время, за которое значения $c_0 = c_{\infty}$ достигают какого-то заданного уровня. Например, значение 10^{-6} достигается за $n = 1,43 \cdot 10^6$ поколений нейтронов. Для реакторов на тепловых нейтронах, где среднее время жизни поколения нейтронов с учетом запаздывающих нейтронов равно 10^{-1} сек, это время составляет $1,43 \cdot 10^5$ с = 2383,33 мин = 39,72 ч = 1,655 сут. Для реакторов на быстрых нейтронах, где среднее время жизни поколения нейтронов равно $10^{-4} - 10^{-8}$ с, это время уменьшается на 3 - 7 порядков. Эти результаты могут применяться к стадии пуска реактора или к его переходным процессам, когда за счет манипуляций с поглощающими стержнями изменяется величина вероятности c .

Скорость изменения функции $P(n, c)$ в зависимости от n можно описывать производной по n , точнее, ее дискретным аналогом, величиной $P(n + 1, c_0) - P(n, c_0)$. Расчеты показывают, что эта величина, взятая с отрицательным знаком, для $c = c_0 = c_{\infty}$ хорошо описывается зависимостью $1,43/n^2$. Вторая производная, функция $P(n + 1, c_0) - 2P(n, c_0) + P(n - 1, c_0)$ описывается зависимостью $2,83/n^3$. И так далее, зависимость k -й производной по n для $c = c_0 = c_{\infty}$ пропорциональна $n^{-(k+1)}$. Соотношения (4) - (6) позволяют для любых моментов времени рассчитать значения вероятностей возникновения цепной реакции и коэффициента размножения, наиболее важных характеристик нейтронных процессов в реакторе.

Поведение функций (5) и (6) имеет вид, показанный на рис.8, 9. Видно, что вид этих функций также связан с положением порога перколяции $c_0 = c_{\infty}$ (критической точки), показанного вертикальной штриховой линией.

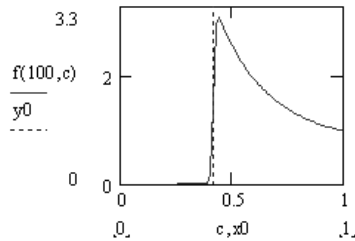


Рис. 8 Поведение производной по c от $P(n, c)$ при $n = 100$.

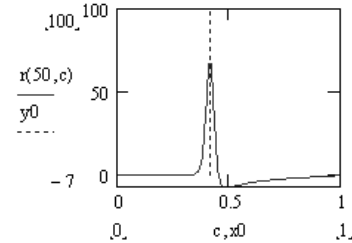


Рис. 9. Поведение второй производной от $P(n, c)$ по c при $n = 50$.

Поведение критической области можно оценить из поведения функции $r(n, c)$ (6). На рис. 10 показано поведение функции $r(n, c)$ при $n = 10, 100, 200, 400, 900$. Из рис. 9 и 10 видно, что пик этой функции близок к c_0 . Если предположить, что сближающиеся с увеличением n границы пикообразной функции $r(n, c)$ пропорциональны границам критической области, то, определив точки пересечения правой границы при разных значениях n с нулевым значением, аппроксимируем эту зависимость выражением (такой же степенной вид, с различными показателями степени, имеют зависимости вида (7), но не при $c_0 = c_{\infty}$, а при значениях c , сравнительно близких к c_{∞})

$$b/n^a, \quad b = 0,462, \quad a = 0,014. \tag{8}$$

Тогда значение $n = n_c$, при котором эта граница принимает значение c_0 , равно 1519.

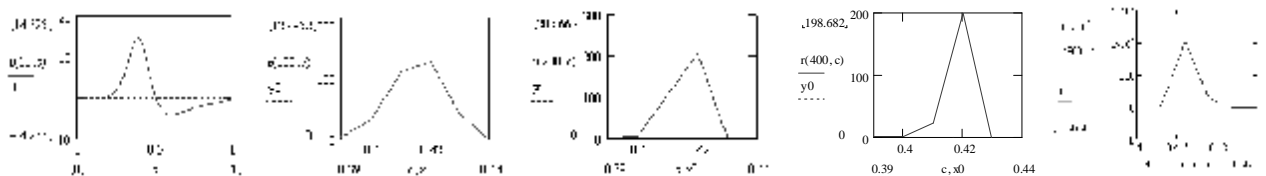


Рис. 10. Поведение функции $r(n, c)$ при $n = 10, 100, 200, 400, 900$.

Поведение вероятности возникновения самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер на больших временах

В [15] соотношение вида (4), полученное в [21], для функции P_n , близкой к функции P_n из формулы (4) (в [14] отмечено, что P_n – вероятность образования иерархической структуры из n поколений), записывается в форме

$$P_{n-1} = P_n + N_n^{-1} w(P_n), \tag{9}$$

где w – степень иерархической связи объектов, отвечающих узлам дерева на заданном уровне. Дерево Кэйли служит геометрическим образом ультраметрического пространства, которое образуют иерархически соподчиненные объекты [15]. Степень иерархической связи w (соответствующая родству в генеалогии) объектов, отвечающих узлам дерева на заданном уровне, определяется числом шагов n до общего предка, которое задает расстояние в ультраметрическом пространстве. Сравнивая выражения (4) и (9), находим

$$w(P_n) = N_n [1 - P_n + ((P_n/c) - 1)^{1/s}], \quad s = \bar{n}. \tag{10}$$

Величина N_n , число узлов на уровне n , соответствующее числу нейтронов n -го поколения, для регулярного дерева (рис. 11, а) равна

$$N_n = (c\bar{n})^n = (k_{ef})^n = e^{t \ln(k_{ef})/l_0}, \quad t = l_0 n, \quad (11)$$

где $c\bar{n} = k_{ef} (1)$, l_0 - среднее время жизни нейтронов. Первое слагаемое разложения в ряд показателя экспоненты в (11) дает известный результат для среднего числа нейтронов [19, 25]: $\exp\{t(k_{ef} - 1)/l_0\}$. Интересно, что почти при таком условии приближенное решение (16) сводится к точному (15) [15].

В [15] для случая $n \gg 1$, когда $P_{n-1} \sim P_n$, из свойства самоподобия уравнения (9), условия однородности функции w , $w(qP) = q^\lambda w(P)$ и предположения о том, что величина $P_n \sim q^n$ задается параметром подобия $q < 1$, из формул (9) и (11) получено выражение

$$w(P) = WP^\lambda, \quad P \rightarrow 0, \quad (12)$$

где $W = w(1) = ((1/c) - 1)^{1/\lambda}$ - положительная постоянная, не зависящая от P , из (10), $\lambda = 1 - D$, $D \leq 1$ - фрактальная размерность самоподобного объекта типа изрезанной береговой линии [4, 16], $D = \ln(c\bar{n})/\ln q^{-1}$. Полагая в равенствах (9) и (11), что при произвольных значениях P_n удовлетворяется скейлинговое соотношение $P_n = x_n q^n = x_n (cs)^{-n/D}$, приходим к рекуррентному равенству для функции x_n :

$$x_{n-1} = \Phi(x_n), \quad \Phi(x) = q(x + Wx^{1-D}). \quad (13)$$

Отображение $\Phi(x)$ имеет две стационарные точки, отвечающие условию $x = \Phi(x)$: стабильную $x_s = 0$ и критическую

$$x_c = (W/(q^{-1} - 1))^{1/D}, \quad q = (cs)^{-1/D}. \quad (14)$$

Поведение системы представляется однородными функциями

$$P_n = x_c (cs)^{-n/D}; \quad w_n = W^{1/D} (q^{-1} - 1)^{-\Delta (cs)^{-\Delta n}}, \quad (15)$$

где $\Delta = (1 - D)/D$ - декремент, определяющий масштаб иерархической связи в ультраметрическом пространстве.

В [15] используется континуальный предел $n \rightarrow \infty$, конечная разность $P_n - P_{n-1}$ заменяется производной dP_n/dn , уравнение вида (9) записывается в непрерывном виде. Для малых значений P , в асимптотике (12) для N_n (11) получено явное решение этого уравнения вида

$$P = W^{1/(1-D)} [(1-u) + ue^{\zeta - \zeta_0}]^{1/D}, \quad u = DW^{1/(1-D)}/\ln(cs), \quad \zeta = (n_0 - n)\ln(cs), \quad \zeta_0 = n_0 \ln(cs), \quad n \leq n_0, \\ W = [(1-u) + ue^{\zeta - \zeta_0}]^\Delta, \quad \zeta \leq \zeta_0, \quad w(\zeta_0) = 1, \quad (16)$$

где ζ - расстояние в ультраметрическом пространстве, $n_0 \gg 1$ - полное число иерархических уровней. При заданной конфигурации иерархического дерева важную роль играет фрактальная размерность D , величина которой определяет силу иерархической связи $w(\zeta)$. Из соотношений (14) - (15) и выражения $D = \ln(c\bar{n})/\ln q^{-1}$ получаем, что $D = \ln(c\bar{n})/\ln(1 + W(c\bar{n})^n/P_n^D)$; $W(c\bar{n})^{-n}/P_n^D = W^{1/(1-D)}(c\bar{n})^{-n}/[1 + u(e^{-n \ln k_{ef}} - 1)]$. При $k_{ef} \gg 1$, $D \gg 0$, и $P_n \gg W^{-1}$. Но $k_{ef} \approx 1$ в подкритическом и надкритическом случаях.

В нестационарных системах параметр подобия q меняется со временем, изменяется и $D(q)$. Для таких сложных систем, как система размножающихся нейтронов в реакторе, иерархическая связь носит мультифрактальный характер [11]. Существенную роль играет спектр значений q , по которому сила связи $w_q(\zeta)$ распределена с плотностью $\rho(q)$. Полное значение силы связи определяется равенством $w(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_q(\zeta)\rho(q)dq$. В качестве ядра $w_q(\zeta)$ используется выражение вида (16) с переменным значением фрактальной размерности $D(q)$. Поведение этой функции для реактора, полученное в [11], показано на рис. 3. Приведенные соотношения определяют только асимптотическое поведение иерархической системы в пределе $1 \ll \zeta \leq \zeta_0$. Полученная асимптотика представляет качественный характер поведения иерархической системы. Чтобы получить точные решения, надо исходить из конечно-разностных уравнений вида (4) и (9), используя, как выше, численные методы. Распределение по иерархическим уровням исследовано в [15], показано, что стационарное распределение вероятности принимает форму Цаллиса. Отметим, что при использовании распределения, содержащего время жизни [23], можно получить более общие распределения, в частности, суперстатистики и их обобщения. Вероятность образования самоподобной сети монотонно возрастает с уменьшением n , принимая максимальное значение на верхнем уровне $n = 0$ (первоначальный нейтрон), отвечающем всей системе.

ме. Эволюция иерархических структур рассматривается в [15] как процесс диффузии на случайно ветвящихся деревьях, структура которых определяется параметром разнородности, являющимся мерой их сложности. Сложность системы по аналогии с энтропией характеризует беспорядок иерархической связи. Но если энтропия характеризует беспорядок в распределении атомов, то при определении сложности их роль переходит к подансамблям, на которые подразделяется полный статистический ансамбль.

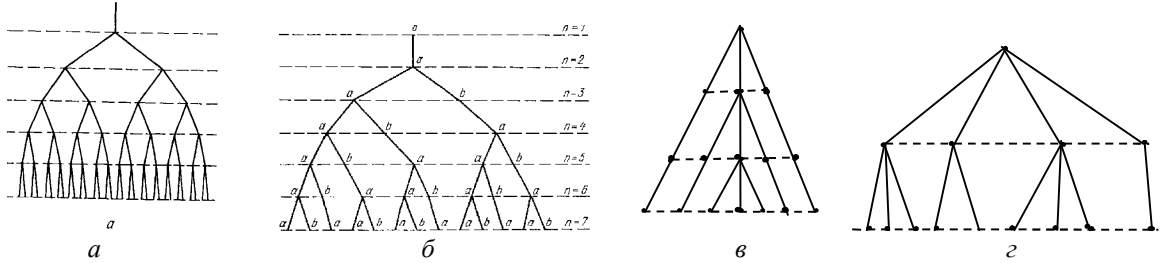


Рис. 11. Простейшее регулярное дерево Кейли с ветвистостью $s = 2$ (а); нерегулярное дерево Фибоначчи с переменной ветвистостью (б); вырожденное дерево с $s = 3$ (в); нерегулярное дерево для $n = 2, a = 2$ (г).

Соотношение (16) записано для числа узлов N_n на уровне n , соответствующего числу нейтронов n -го поколения вида (11), $N_n = (cs)^n$, где $s = \bar{n}$ - показатель ветвистости дерева. Выражение (11) записано в [15] для случая регулярного дерева, показанного на рис. 11, а) и, так как $n \sim t$, соответствует временному поведению для числа нейтронов экспоненциального вида e^{at} , справедливого вне критической области [19, 25]. В [24] показано, что в критической области зависимость степенная, t^a , что совпадает со степенной аппроксимацией вида

$$N_n = (1 + n)^a, \tag{17}$$

используемой в [15] для случая самоподобного нерегулярного дерева, рис.11г). Это соответствует полученной выше численно зависимости (8). Численно получено также, что показатель степени a зависит от вероятности c (1). Поведение, присущее простым статистическим системам, наблюдается при показателях ветвистости иерархического дерева, превышающих золотое сечение $a_+ = (5^{1/2}+1)/2 \approx 1,61803$, а спадание сложности с ростом дисперсии иерархической связи, характерное для сложных систем, проявляется только при слабой ветвистости, ограниченной интервалом $1 < a < 1,618$. Для вырожденного дерева (см. рис. 11, в) из [14] можно получить зависимость вида

$$N_n = [(s - 1)c + c^n(1 - sc)] / (1 - c). \tag{18}$$

Движение по дереву Фибоначчи (см. рис. 11, б) [15] не может вызвать цепную реакцию. Делящееся ядро при этом должно быть таким, чтобы среднее число вторичных нейтронов, образующихся при его делении, было равно золотому сечению $a_+ = \bar{n} = (5^{1/2} + 1)/2 \approx 1,61803$, а этого значения недостаточно для возникновения и поддержания цепной реакции.

Для вырожденного дерева (см. рис. 11, в) с числом узлов (18), для поведения в критической точке, получаем вместо экспоненциальной зависимости в (16) логарифмическую зависимость вида

$$P = W^{1/(1-D)} [1 + DW^{1/(1-D)}(1-c) \ln(1+(s-1)c^{1-n}/(1-cs)) / (s-1)c \ln c]^{1/D}, \quad n \leq n_0, \tag{19}$$

$$W = [1 + DW^{1/(1-D)}(1-c) \ln(1+(s-1)c^{1-n}/(1-cs)) / (s-1)c \ln c]^\Delta.$$

Из соотношений (14) - (15) и выражения $D = \ln(N_n)/\ln q^{-1}$ получаем, что $D = \ln(N_n)/\ln(1 + W/N_n P_n^D)$; $D \gg \frac{W^{-D/(1-D)} \ln N_n}{WN_n} / (1 - \frac{\ln N_n}{WN_n} \frac{W(1-c)}{(s-1)c \ln c} \ln(1 + \frac{(s-1)c^{1-n}}{(1-cs)}))$. В критической точке $c \otimes c_0 = 1/\bar{n} = 1/s$. Раскрывая неопределенности, получим, что в этом случае $P_n \otimes 0$ при $cs \otimes 1$.

В промежуточном случае нерегулярного дерева (см. рис. 11, г)) со степенным ростом (17) числа узлов интенсивность и сила иерархической связи также ведут себя степенным образом в зависимости от расстояния ζ в ультраметрическом пространстве:

$$P = W^{1/(1-D)} [1 + u(1 - \zeta/\zeta_0)^{-(a-1)}]^{1/D}, \quad u = DW^{1/(1-D)} n_0^{-(a-1)} / (a-1), \quad \zeta = (n_0 - n) \ln(cs), \quad \zeta_0 = n_0 \ln(cs), \quad n \leq n_0, \tag{20}$$

$$W = [1 + u(1 - \zeta/\zeta_0)^{-(a-1)}]^\Delta, \quad \zeta \leq \zeta_0.$$

Соотношения (7) и (8) также связаны с временным поведением числа нейтронов в критической точке (выражение (7), где показатель степени $\alpha = 1$) и в критической области (выражение (8), где $\alpha \neq 1$; расчеты показывают, что значения α изменяются в разных местах критической области, как в [24]). Поведение вероятностей возникновения цепной реакции определяется вероятностями c (1), степенью критичности, близостью к критической точке. В зависимости от этой близости выделяется три основных режима поведения. Отметим, что известен явный вид выражения $w(P_n)$ (10), и уравнение для P в континуальном пределе можно решить точно. Но интегралы сложные, и явно выразить функцию P сложно.

Заключение

Перколяционные и фрактальные свойства нейтронных процессов в ядерном реакторе отражают сложный характер процессов, происходящих при делении ядер и движении нейтронов. Эти процессы требуют соответствующего описания. Использование точных соотношений теории перколяции, полученных для решеток Бете, позволяет оценить и точно рассчитать временное поведение таких важных для практики эксплуатации реакторных установок величин, как коэффициент размножения и вероятность возникновения цепной реакции. Важным обстоятельством служит то, что, наряду с другими параметрами, существенной на стадии пуска реактора оказывается величина числа поколений нейтронов n и пропорциональное ей время работы реактора. Оценки показывают, что значения единичного коэффициента размножения могут достигаться только в практически нереализуемом случае бесконечного числа поколений нейтронов, соответствующем бесконечно большим временам и бесконечно большим системам. Но для реальных времен эксплуатации можно оценить времена, необходимые для достижения очень малых интервалов от единичного значения коэффициента размножения.

В [24] обнаружены три режима критического поведения ЯР, зависящие от знака управляющих воздействий и обратных связей, найдены границы этих режимов, показано, что в районе критической точки временное поведение степенное. Время пропорционально числу поколений, и такое поведение свойственно выражению (17), самоподобным нерегулярным деревьям [15]. В самой критической точке общее число нейтронов пропорционально времени, как в выражении (18), что соответствует вырожденному дереву. Таким образом, траектории нейтронов изменяются в зависимости от вероятности деления ядра нейтроном c и коэффициента размножения. В подкритической области движение идет по регулярным деревьям, в критической области - по самоподобным нерегулярным деревьям, в критической точке - по вырожденному дереву. Выше критической точки, но в критической области - снова по самоподобным нерегулярным деревьям. В надкритической области - по регулярным деревьям.

Обнаружено соответствие между динамикой для числа нейтронов, полученной из теории ветвящихся процессов [19, 24], числом нейтронов n -го поколения, числом узлов на n -м уровне иерархии [15], скоростью изменения вероятности возникновения цепной реакции, видом интенсивности и силы иерархической связи, степенью критичности реактора, и траекториями нейтронов в реакторе. Найдено значение фрактальной размерности D , величина которой определяет силу иерархической связи.

Полученные результаты существенны для безопасности реакторных систем с относительно небольшим числом нейтронов, как для стадий пуска реактора, для критических сборок. Полезными они должны оказаться и для более детального описания переходных процессов в реакторе, в первую очередь, в быстрых реакторах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. - М.: URSS, 2002. - 112 с.
2. *Эфрос А.Л.* Физика и геометрия беспорядка. (Библиотечка "Квант", вып. 19). - М.: Наука, 1982. 176 с.
3. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to percolation theory. - Taylor & Francis Inc., 1994. - 179 p.
4. *Федер Е.* Фракталы / Пер. с англ. - М.: Мир, 1991. - 260 с.
5. *Кестен Х.* Теория перколяции для математиков. - М.: Мир, 1986. - 392 с.
6. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. - М.: Наука, 1979. - 416 с.
7. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance, and Dimension. - San Francisco: Freeman, 1977. - 752 p.
Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. - San Francisco: Freeman, 1982. - 530 p.

8. *Рязанов В. В., Турбин А. Ф.* Древоподобные структуры, задачи перколяции и фрактальные явления в размножающей среде. Тез. Докл. семинара-совещания «Фрактальные объекты в математике, физике и биологии», 25 - 27 апр. 1991 г., г. Славянск. – К.: О-во «Знание» Украины, 1991. - С. 17.
9. *Зеленый Л. М., Милованов А. В.* Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *Успехи физических наук.* – 2004. - Т. 174, № 8. - С. 809–852.
10. *Рязанов В.В.* Фрактальные структуры и перколяция в ядерном реакторе // *Проблемы безопасности атомных электростанций и Чернобиля.* - 2014. - Вып. 23. - С. 13 - 21.
11. *Рязанов В.В.* Мультифрактальность нейтронных процессов в ядерном реакторе // *Проблемы безопасности атомных электростанций и Чернобиля.* – 2015. - Вып. 24. - С. 9 - 17.
12. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* – 1988. - Vol. 38, № 1. - P. 364–374.
13. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / Пер. с англ. - Ижевск: РХД, 2001. - 528 с.
14. *Шуда И. А.* Влияние иерархического строения и самоподобия на самоорганизацию сложных систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. - Сумы, 2011.
15. *Олемской А. И.* Синергетика сложных систем. Феноменология и статистическая теория. – М.: Красанд, 2009. - 379 с.
16. *Олемской А. И., Флат А. Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // *Успехи физических наук.* – 1993. - Т. 163, № 12. - С. 1 - 50.
17. *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. - 128 с.
18. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. - М.: Наука, 1971. - 436 с.
19. *Дорогов В.И., Чистяков В.П.* Вероятностные модели превращения частиц. - М.: Наука, 1988. - 110 с.
20. *Харари Ф., Палмер Э.* Перечисление графов / Пер. с англ. - М.: Мир, 1977. - 324 с.
21. *Антонова Е.С., Вирченко Ю.П.* Непрерывность вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на однородных древесных графах // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика.* – 2010. - Т. 23(94), № 21. - С. 11 - 21.
22. *Cohen R., Havlin S.* Complex networks: Structure, Robustness and Function. - Cambridge: Cambridge University Press, 2010. - 330 p.
23. *Ryazanov V.V.* Lifetime of statistical systems. - Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. – 252 p.
24. *Бойко Р.В., Рязанов В.В.* Стохастическая модель энергетического ядерного реактора // *Атомная энергия,* 2002. - Т. 93, вып. 2. - С. 87 - 96.
25. *Цвайфель П.* Физика реакторов. - М.: Атомиздат, 1977. - 342 с.

В. В. Рязанов

Институт ядерних досліджень НАН України, просп. Науки, 47, Київ, 03680, Україна

ПЕРКОЛЯЦІЙНИЙ ОПИС ПОВЕДІНКИ ЛАНЦЮГОВОЇ РЕАКЦІЇ

За допомогою строгих співвідношень теорії перколяції на решітках Бете описується поведінка коефіцієнта розмноження нейтронів на ранніх стадіях розвитку ланцюгової реакції поділу ядер, що самопідтримується. Розглянуто поведінку ймовірності перколяції, в цьому задачі - ймовірності виникнення самопідтримуваної ланцюгової реакції і похідних від цієї величини. Вказані можливості визначення меж критичної області та знайдені різні розподілу для ймовірностей перколяції при великих значеннях числа поколінь нейтронів. Залежно від близькості ймовірності поділу ядра нейтроном до критичного значення виділені різні режими, в яких змінюються і вид розподілу, і потік нейтронів, і геометричні траєкторії руху нейтронів.

Ключові слова: перколяція, ланцюгові реакції, дерева Кейлі, ймовірність виникнення ланцюгової реакції, що самопідтримується.

V. V. Ryazanov

*Institute for Nuclear Research National Academy of Sciences of Ukraine,
Prospect Nauky, 47, Kyiv, 03680, Ukraine*

PERCOLATION DESCRIPTION OF BEHAVIOR OF CHAIN REACTION

With strict ratios percolation theory on the Bethe lattice describes the behavior of the neutron multiplication factor in the early stages of development of a self-sustaining chain reaction of nuclear fission. The behavior of the probability of percolation, in this problem - the probability for a self-sustaining chain reaction and derived from this value. Shown the possibility of determining the boundaries of the critical region and found a variety of distribution for the percolation probability for large numbers of neutrons generations. Depending on the proximity of the probability of neutron fission

of the nucleus to the critical distinction between the different modes in which changes and the type of distribution, and flux of neutrons and neutrons geometric trajectory of motion.

Keywords: percolation, chain reactions, Cayley trees, the risk of a self-sustaining chain reaction.

REFERENCES

1. *Tarasevich Yu. Yu.* Percolation theory, applications, algorithms. - Moskva: URSS, 2002. - 112 p. (Rus)
2. *Efros A. L.* Physics and geometry of disorder. (Library of "Quantum", no. 19). - Moskva: Nauka, 1982. 176 p. (Rus)
3. *Stauffer D., Aharony A.* Introduction to percolation theory. - Taylor & Francis Inc., 1994. - 179 p.
4. *Feder E.* Fractals / Trans. from English. - Moskva: Mir, 1991. - 260 p. (Rus)
5. *Kesten H.* Percolation theory for mathematicians. - Moskva: Mir, 1986. - 392 p. (Rus)
6. *Shklovskii B. I., Efros A. L.* The electronic properties of doped semiconductors. - Moskva: Nauka, 1979. - 416 p. (Rus)
7. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance, and Dimension. - San Francisco: Freeman, 1977. - 752 p.
Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Natura. - San Francisco: Freeman, 1982. - 530 p.
8. *Ryazanov V. V., Turbin A.F.* Tree structures, the problem of percolation and fractal phenomena in multiplying environment. Proc. Dokl. seminar-meeting "Fractal objects in mathematics, physics and biology", 25 - 27 April 1991, Slavyansk. - Kiev: Oh of "Knowledge" of Ukraine, 1991. - P. 17. (Rus)
9. *Green L. M., Milovanov A. B.* Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics // Successes of physical sciences. - 2004. - Vol. 174, № 8. - P. 809 - 852. (Rus)
10. *Ryazanov V. V.* Fractal structures and percolation in nuclear reactor // Problemy bezpeky atomnyh electrostantsiy i Chornobylya (Problems of Nuclear Power Plants' Safety and of Chornobyl). - 2014. - Iss. 23. - P. 13 - 21. (Rus)
11. *Ryazanov V. V.* Multifractality neutron processes in a nuclear reactor // Problemy bezpeky atomnyh electrostantsiy i Chornobylya (Problems of Nuclear Power Plants' Safety and of Chornobyl). - 2015. - Iss. 24. - P. 9 - 17. (Rus)
12. *Bak P., Tang C, Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // Phys. Rev. A. - 1988. - Vol. 38, № 1. - P. 364-374.
13. *Schroeder M.* Fractals, chaos, power laws. Thumbnails of an infinite paradise / Trans. from English. - Izhevsk: RHD, 2001. - 528 p.
14. *Shuda I. A.* Influence of the hierarchical structure of self-organization and self-similarity on the complex systems: Dis. Doctor phys.-math. sciences. - Sumy, 2011. (Rus)
15. *Olemskoy A. I.* Synergetic of complex systems. Phenomenology and statistical theory. - Moskva: Krasand, 2009 - 379 p. (Rus)
16. *Olemskoy A. I., Flat A. Y.* Using fractal concepts in condensed matter physics // Successes of physical sciences. - 1993. - Vol. 163, № 12. - P. 1 - 50. (Rus)
17. *Bozhokin S. V., Parshin D. A.* Fractals and multifractals. - Izhevsk: NITs "Regular and Chaotic Dynamics", 2001. - 128 p. (Rus)
18. *Sevastyanov B. A.* Branching processes. - Moskva: Nauka, 1971. - 436 p. (Rus)
19. *Dorogov V. I., Chistyakov V. P.* Probabilistic Model of particle transformations. - Moskva: Nauka, 1988 - 110 p. (Rus)
20. *Harari F., Palmer E.* Enumerating graphs / Trans. from English. - Moskva: Mir, 1977. - 324 p. (Rus)
21. *Antonova E. S., Virchenko Yu. P.* Continuity Bernoulli percolation probability of random fields on homogeneous wood columns // Scientific statements of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics. - 2010. - Vol. 23 (94), № 21. - P. 11 - 21. (Rus)
22. *Cohen R., Havlin S.* Complex networks: Structure, Robustness and Function. - Cambridge: Cambridge University Press, 2010. - 330 p.
23. *Ryazanov V.V.* Lifetime of statistical systems. - Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. - 252 p.
24. *Boyko R. V., Ryazanov V. V.* Stochastic model of nuclear power reactors // Nuclear Energy. - 2002. - T. 93, № 2. - P. 87 - 96. (Rus)
25. *Zweifel P.* Reactor Physics. - Moskva: Atomizdat, 1977. - 342 p. (Rus)

Надійшла 17.05.2016

Received 17.05.2016