

Малярець Л. М., Сенкевич Б. В., Жуков А. В.

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЙНА ЗАДАЧА УПРАВЛІННЯ ЕФЕКТИВНІСТЮ ВИРОБНИЧО-ГОСПОДАРСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІДПРИЄМСТВА

Розроблена багатокритеріальна оптимізаційна задача управління ефективністю виробничо-господарської діяльності промислового підприємства. Обґрунтовано специфікацію моделі управління ефективністю виробничо-господарської діяльності промислового підприємства. Для складання функції цілі та частинних критеріїв рекомендується ефективність виробничо-господарської діяльності підприємства структурувати за трьома основними складовими: ефективністю підсистем виробничо-господарської діяльності підприємства, ефективністю використання окремих видів ресурсів та соціально-екологічною ефективністю, кожна з яких визначається окремою системою показників. Функцію цілі та частинні критерії слід розробляти з використанням методів багатовимірного статистичного аналізу: канонічного аналізу та факторного аналізу. Пропонується систему обмежень в багатокритеріальній оптимізаційній задачі управління ефективністю виробничо-господарської діяльності промислового підприємства формувати з використанням інструментів описової статистики. Наведено розв'язування багатокритеріальної оптимізаційної задачі управління ефективністю виробничо-господарської діяльності промислового підприємства.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізаційна задача, ефективність виробничо-господарської діяльності промислового підприємства, частинні критерії, складові ефективності, методи багатовимірного статистичного аналізу, інструменти описової статистики.

Формул: 82. *Бібл.:* 11.

Малярець Людмила Михайлівна – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)

Email: malyarets@ukr.net

Сенкевич Борис Володимирович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)

Жуков Андрій Вячеславович – аспірант, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)

Email: okydoky87@list.ru

УДК 330.43

Малярець Л. М., Сенкевич Б. В., Жуков А. В.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ ПРОИЗВОДСТВЕННО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ

Разработана многокритериальная оптимизационная задача управления эффективностью производственно-хозяйственной деятельности промышленного предприятия. Обоснована спецификация модели управления эффективностью производственно-хозяйственной деятельности промышленного предприятия. Для составления функции цели и частных критериев рекомендуется эффективность производственно-хозяйственной деятельности предприятия структурировать по трем составляющим: эффективности подсистем производственно-хозяйственной деятельности, эффективности использования отдельных видов ресурсов и социально-экономической эффективности, каждая из которых определяется отдельной системой показателей. Функцию цели и частные критерии следует разрабатывать с использованием методов многомерного статистического анализа: канонического анализа и факторного анализа. Предлагается систему ограничений в многокритериальной оптимизационной задаче управления эффективностью производственно-хозяйственной деятельности промышленного предприятия формировать с использованием инструментов описательной статистики. Приведено решение многокритериальной оптимизационной задачи управления эффективностью производственно-хозяйственной деятельности промышленного предприятия.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизационная задача, эффективность производственно-хозяйственной деятельности промышленного предприятия, частные критерии, составляющие эффективности, методы многомерного статистического анализа, инструменты описательной статистики

Формул: 82. *Библ.:* 11.

Малярець Людмила Михайлівна – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)

Email: malyarets@ukr.net

Сенкевич Борис Владимирович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)

Жуков Андрій Вячеславович – аспірант, кафедра вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет (пр. Леніна, 9а, Харків, 61166, Україна)

Email: okydoky87@list.ru

UDC 330.43

Malyarets L. M., Senkevych B. V., Zhukov A. V.

MULTI-CRITERIAL OPTIMISATION TASK OF MANAGING EFFICIENCY OF PRODUCTION AND ECONOMIC ACTIVITY OF AN ENTERPRISE

The article develops a multi-criterial optimisation task of managing efficiency of production and economic activity of an industrial enterprise. It justifies specification of the model of managing efficiency of production and economic activity of an industrial enterprise. In order to compose functions of a goal and partial criteria, it recommends to structure efficiency of production and economic activity of an enterprise by three components: efficiency of subsystems of production and economic activity, efficiency of use of individual types of resources and socio-economic efficiency, each of which is determined with an individual scorecard. The function of the goal and partial criteria should be developed with the use of methods of multi-dimensional

statistical analysis: canonical analysis and factor analysis. The article offers to form the system of restrictions in a multi-criterial optimisation task of managing efficiency of production and economic activity of an industrial enterprise with the use of instruments of descriptive statistics. The article provides a solution of the multi-criterial optimisation task of managing efficiency of production and economic activity of an industrial enterprise.

Key words: multi-criterial optimisation task, efficiency of production and economic activity of an industrial enterprise, partial criteria, efficiency components, methods of multi-dimensional statistical analysis, instruments of descriptive statistics

Formulae: 82. *Bibl.:* 11.

Malyarets Lyudmyla M. – Doctor of Science (Economics), Professor, Head of the Department, Department of Higher Mathematics and Economics and Mathematical Methods, Kharkiv National University of Economics (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)

Email: malyarets@ukr.net

Senkevych Borys V. – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Economics and Mathematical Methods, Kharkiv National University of Economics (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)

Zhukov Andriy V. – Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics and Economics and Mathematical Methods, Kharkiv National University of Economics (pr. Lenina, 9a, Kharkiv, 61166, Ukraine)

Email: okydoky87@list.ru

В практичній виробничо-господарській діяльності підприємства найчастіше приходиться ухвалювати управлінські рішення з урахуванням одночасно декількох критеріїв. В управлінні ефективністю виробничо-господарською діяльністю підприємства важливо досягати оптимуму одночасно за декількома показниками, що є критеріями або системами показників, що виражають узагальнені критерії. Вирішення даних проблем доцільно ґрунтувати на розробленні та розв'язанні багатокритеріальної оптимізаційної задачі.

Дослідженням проблем багатокритеріальної оптимізації займалися багато вчених як в Україні, так і в країнах ближнього і дальнього зарубіжжя. В основному ці проблеми були пов'язані з теоретичними основами багатокритеріальної оптимізації, а розробка практичних оптимізаційних задач в економіці залишалась поза увагою вчених [1 – 6; 10; 11]. Для формування управлінського рішення важливо мати всі типи задач багатокритеріальної оптимізації та володіти рекомендаціями щодо їх розроблення.

Для оптимізації значень чинників формування ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства доцільно структурувати їх за трьома основними складовими: ефективністю підсистем виробничо-господарської діяльності підприємства, ефективністю використання окремих видів ресурсів та соціально-екологічною ефективністю, кожна з яких визначається окремою системою показників [7]. Між собою три складові ефективності взаємозв'язані і утворюють механізм, це було перевірено багатомірними статистичними методами, канонічним аналізом та факторним аналізом [8].

Висновок про оптимальний високий рівень значень показників ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства в системі без спеціальних методів визначення зробити не можливо, тому що в цій ситуації виникають труднощі: високі значення окремих показників і низькі значення решти показників ще не дають основу стверджувати про загальну високу оцінку діяльності підприємства. Як відомо, складність вибору рішення в умовах багатоцільової оптимізації визначається не кількістю критеріїв оптимізації і варіантів рішень, а виключенням їх протирічного співвідношення, тобто не при всіх спів-

відношеннях між величинами окремих критеріїв досягається максимум цільової функції. Тому досягнення максимального значення загального критерію ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства можливе при оптимальному співвідношенні значень показників і не обов'язково одночасно високих значень всіх, але таких, що не суперечать один одному. Це є основним принципом при формуванні дієвого управлінського рішення щодо управління ефективністю виробничо-господарської діяльності підприємства. Ігнорування даного принципу призводить до розробки рішень, які відразу спричиняють зменшення значень основного критерію діяльності. В цьому складається необхідність розв'язування багатокритеріальної оптимізаційної задачі управління ефективністю виробничо-господарської діяльності підприємства.

Якщо в якості цільової функції вибрати рентабельність продаж продукції (x_d), яку слід максимізувати, а за іншими показниками, структурованими за трьома складовими ефективності, сформувати часткові або окремі критерії досягнення ефективності: 1) за всіма підсистемами виробничо-господарської діяльності підприємства; 2) ефективного використання основних видів ресурсів на підприємстві; 3) соціально-екологічної ефективності – шукати оптимальне співвідношення їх значень з урахуванням існуючих обмежень, то це є завданням багатокритеріальної оптимізації або її ще називають векторною оптимізацією.

Наведемо математичне формулювання задачі векторної оптимізації [9, с. 31 – 33].

Нехай $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, ($j = \overline{1, n}$) – вектор змінних, зазвичай $X \geq 0$. Функціональний взаємозв'язок меж змінними встановлюється співвідношеннями, на які накладаються обмеження:

$$g_i(X) \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Функціонування підприємства оцінюється окремими критеріями, що записуються у вигляді цільових функцій $f_k(X)$, ($k = \overline{1, p}$). Множину критеріїв можна подати у вигляді векторної цільової функції:

$$F = \{f_1, \dots, f_p(X)\}.$$

Відомо, що для мінімізації частинного критерію $f_k(X)$ достатньо максимізувати $-f_k(X)$, оскільки $\min f_k(X) = -\max(-f_k(X))$. Тому й розглядається, що кожна компонента векторного критерію максимізується. Задача багатоцільової оптимізації записується як векторна задача математичного програмування:

$$\begin{aligned} F(X) &= \{f_1, \dots, f_p(X)\} \quad (\max), \\ g_i(X) &\leq b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Розглядається випадок, коли у векторній задачі математичного програмування точки оптимума X_k^* ($k = \overline{1, p}$), які отримані при розв'язанні задачі по кожному критерію $f_k(X)$, не співпадають, тому розв'язок отримують в результаті компромісного розв'язання. З цього складається особливість задач векторної оптимізації – наявність в області допустимих значень області компромісів, в якій неможливо одночасне покращення всіх критеріїв. Плани, що належать області компромісів, називають ефективними або оптимальними за Парето.

Розглянемо поняття переваги плану або найкращого плану. План X^0 не гірший плану X' , якщо $f_k(X^0) \geq f_k(X')$, ($k = \overline{1, p}$). Якщо серед цих нерівностей хоча б одне строге, то план X^0 кращий або має перевагу порівняно з X' , тобто при переході від X^0 до X' значення жодного критерію не погіршало і хоча б одного критерію покращало. План X^0 оптимальний за Парето (ефективний), якщо він допустимий і не існує іншого плану X' , для якого $f_k(X^0) \geq f_k(X')$, ($k = \overline{1, p}$), і хоча б для одного критерію виконується строга нерівність.

Враховуючи природну протиречність критеріїв оптимальності, тобто неможливості забезпечення оптимального значення за всіма критеріями одночасно, необхідно визначити оптимально компромісні плани на деякому інтервалі, які мають властивість: жоден розв'язок не може бути покращений за жодним критерієм без погіршення інших критеріїв. Маємо множину допустимих планів – множину Парето-планів, де жоден з них не може бути покращений:

$$\pi = \{X / \exists Y \succ X\}.$$

Множина даних планів є наслідком взаємно заміних скалярних критеріїв, як дозволяють збільшити одні компоненти за рахунок зменшення інших. В цих умовах кожний такий план утворює можливості оптимізаційної ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства. Відомо, що принципи виділення множини ефективних планів строго наукові, але визначення на цій множині оптимального компромісного плану потребує пояснень і обґрунтування.

Вважається, що доцільно надати особі, що приймає рішення, всю множину ефективних планів, з яких дана особа,

спираючись на свій досвід, додаткову інформацію вибере єдиний оптимальний розв'язок [1, с. 47 – 48].

При розробці методів розв'язання векторних задач вирішують ряд особливих проблем. До них відносяться проблема нормалізації, проблема вибору принципу оптимальності, проблема врахування пріоритету критеріїв, проблема обчислення оптимуму. На наш погляд, ці проблеми відносять до розроблення загального критерію конкретної багатокритеріальної оптимізаційної задачі. Оскільки проблема нормалізації обумовлена різними одиницями і масштабами вимірювання показників чи складових загального критерію, то вона може бути вирішена методом, за допомогою якого побудована. Проблему вибору принципу оптимальності пов'язують з визначенням властивостей оптимального розв'язку і вирішення питання переваги оптимального розв'язку порівняно з іншими. Проблема врахування пріоритету частинних критеріїв виникає у випадку різної важливості їх. Вирішення даної проблеми можливе різними способами: евристичним шляхом або з використанням математичних методів. В переліку проблем задач векторної оптимізації виокремлюють ще одну проблему: проблему обчислення оптимуму, яка виникає у випадку, коли традиційні обчислювальні схеми або алгоритми не підходять.

Розв'язання наведених проблем можливе за декількома напрямками, основними з яких є: методи, що ґрунтуються на згортці критеріїв в один, методи, що використовують обмеження за критеріями, методи цільового програмування, методи, що базуються на відшуванні компромісного розв'язку.

Вирішення проблем задач векторної оптимізації залежить від змісту самої задачі. В даному випадку розв'язок задачі залежить від того, наскільки правильно сформована її специфікація тобто від правильності постановки задачі та вибору методу її розв'язання.

Для комплексного дослідження оптимального стану ефективності виробничо-господарської діяльності на підприємстві слід розв'язати декілька оптимізаційних багатокритеріальних задач. Оскільки в авторській статті [7] був визначений механізм взаємозв'язку між складовими ефективності виробничо-господарської діяльності, то першу багатокритеріальну оптимізаційну задачу слід розробляти із врахуванням взаємозв'язку між складовими ефективності. Інтерес представляє і врахування взаємозв'язку між всіма показниками ефективності виробничо-господарської діяльності, який доцільно визначити за допомогою факторного аналізу. Це є друга багатокритеріальна оптимізаційна задача. Третя багатокритеріальна оптимізаційна задача враховує тенденції змінення значень показників, що описують ефективність виробничо-господарської діяльності.

Розглянемо першу оптимізаційну багатокритеріальну задачу ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства. Необхідно знайти оптимальні значення показників ефективності виробничо-господарської діяльності підприємств, які забезпечують максимальне значення рентабельності продаж продукції, що є цільовою функцією (F_1) залежності від структурних складових ефективності

виробничо-господарської діяльності. Структурні складові виражаються канонічними змінними (U_i, V_i), які є частинними критеріями в багатокритеріальній задачі та, в свою чергу, є функціональними залежностями від показників ефек-

тивності виробничо-господарської діяльності підприємств. Структурні складові знайдені за допомогою багатовимірною статистичного методу канонічного аналізу. Отже цільова функція в даній задачі представляється рівнянням:

$$F_1 = 0,232 + 0,108U_{1(1)} - 0,129V_{1(1)} + 0,022U_{1(2)} + 0,081V_{1(2)} + 0,065U_{1(3)} - 0,0007V_{1(3)}$$

$$t_a = 7,53 \quad t_{b_1} = 0,44 \quad t_{b_2} = -0,53 \quad t_{b_3} = 0,406 \quad t_{b_4} = 1,253 \quad t_{b_5} = -1,1 \quad t_{b_6} = -0,011, \quad F_1 \rightarrow \max,$$

де (U_i, V_i) – частинні критерії, що є структурними складовими ефективності виробничо-господарської діяльності;
 t_{b_i} – обчислені значення критерія Стьюдента.

Незважаючи, що коефіцієнти в регресійній моделі не всі значимі, в цілому модель значима, про це свідчать коефіцієнт детермінації, критерій Фішера та критерій Дарбіна-Уотсона: $R^2 = 0,301$, $F = 1,29$, і $DW = 2,4$.

Систему частинних критеріїв оптимізаційної задачі складають рівняння залежності нових канонічних змінних від показників, що визначають ефективність виробничо-господарської діяльності:

$$\begin{cases} U_{1(1)} = -1,439y_1 + 0,967y_2 + 0,503y_3 + 0,361y_4 + 0,289y_5 - 0,328y_6 + 0,22y_7 + 0,349y_8 + \\ \quad + 0,109y_9 - 0,491y_{10} + 0,046y_{11}, \\ V_{1(1)} = 0,023x_1 - 0,154x_2 + 0,235x_3 - 0,117x_5 + 0,121x_6 - 0,94x_7 + 0,061x_8 + 0,31x_9 + \\ \quad + 0,072x_{10}, \\ U_{1(2)} = 0,684y_1 - 0,056y_2 - 0,388y_3 - 0,021y_4 + 0,3366y_5 - 0,538y_6 + 0,957y_7 - 0,068y_8 + \\ \quad + 0,063y_9 - 0,753y_{10} - 0,191y_{11}, \\ V_{1(2)} = 0,954z_1 - 0,617z_2, \\ U_{1(3)} = 0,489x_1 - 0,018x_2 - 0,218x_3 + 0,002x_5 - 0,177x_6 + 0,225x_7 + 0,112x_8 + 0,607x_9 - \\ \quad - 0,177x_{10}, \\ V_{1(3)} = 0,964z_1 + 0,118z_2. \end{cases}$$

Складемо систему обмежень першої оптимізаційної багатокритеріальної задачі. Використавши інструменти описової статистики для кожного показника, що характеризує ефективність виробничо-господарської діяльності підприємств та за яким вона діагностується, маємо такі обмеження на змінення значень показників [7]:

$$\begin{aligned} 0,08 \leq x_1 \leq 0,56; \quad 0,046 \leq x_2 \leq 0,99; \quad 0,06 \leq x_3 \leq 0,98; \\ 0,002 \leq x_5 \leq 0,257; \quad 1,05 \leq x_6 \leq 3,2; \quad 0,209 \leq x_7 \leq 0,921; \\ 0,00 \leq x_8 \leq 1,099; \quad 0,03 \leq x_9 \leq 0,799; \quad 0,00 \leq x_{10} \leq 4,354; \\ 0,003 \leq y_1 \leq 0,195; \quad 0,008 \leq y_2 \leq 0,685; \quad 0,001 \leq y_3 \leq 0,252; \\ 0,766 \leq y_4 \leq 2,507; \quad 39,00 \leq y_5 \leq 136,00; \quad 0,018 \leq y_6 \leq 0,812; \\ -95,81 \leq y_7 \leq 169,35; \quad 1,95 \leq y_8 \leq 203,82; \quad -65,25 \leq y_9 \leq 1,02; \\ 0,007 \leq y_{10} \leq 1,892; \quad -80,6 \leq y_{11} \leq 28,28; \\ 0,00 \leq z_1 \leq 0,349; \quad 0,001 \leq z_2 \leq 0,576. \end{aligned}$$

Функція цілі (F_1) отримана як регресійна лінійна залежність від частинних критеріїв (U_i, V_i), які в свою чергу можна розглядати як лінійні комбінації від показників ефективності виробничо-господарської діяльності. То функцію цілі

багатокритеріальної задачі можна перетворити в лінійну функцію, що залежить від 22 змінних. Система обмежень залишається тією ж. Отже, дана задача звелась до лінійної оптимізаційної задачі з 22 змінними. Опорні розв'язки цієї задачі знаходяться у вершинах гіпербагатокутника, кількість вершин дорівнює 2^{22} . Оптимальний план знаходиться в одній з цих вершин, а отже значення показників при оптимальному розв'язку мають тільки граничні значення, тобто або найменші, або найбільші.

Розв'язавши дану багатокритеріальну задачу в середовищі MatLab з використанням розширення Optimization Toolbox, оптимальний розв'язок маємо:

$$\begin{aligned} x_1 = 0,56; \quad x_2 = 0,99; \quad x_3 = 0,06; \quad x_5 = 0,257; \quad x_6 = 1,05; \\ x_7 = 0,921; \quad x_8 = 0,00; \quad x_9 = 0,03; \quad x_{10} = 0,00; \quad y_1 = 0,003; \\ y_2 = 0,685; \quad y_3 = 0,252; \quad y_4 = 2,507; \quad y_5 = 136,0; \\ y_6 = 0,018; \quad y_7 = 169,35; \quad y_8 = 203,82; \quad y_9 = 1,02; \\ y_{10} = 0,007; \quad y_{11} = 28,28; \quad z_1 = 0,349; \quad z_2 = 0,001; \end{aligned}$$

при цьому значення цільової функції буде дорівнювати $F_{\max} = 20,8217$.

Отже, враховуючи механізм взаємозв'язку між складовими ефективності виробничо-господарської діяльності підприємств та розподіл значень показників ефективності, оптимальні значення показників такі: частка внутрішнього ринку 0,56, рентабельність інвестицій 0,99, рентабельність інноваційних заходів 0,06, рентабельність виробництва і збуту 0,257, частка експорту 1,05, коефіцієнт фінансової автономії 0,921, коефіцієнт абсолютної ліквідності 0,00, коефіцієнт підвищення кваліфікації персоналу 0,03, ефективність витрат на інформатизацію та програмне забезпечення 0,00, рентабельність активів 0,003, рентабельність оборотних засобів 0,685, рентабельність власного капіталу 0,252, темп зростання продуктивності праці 2,507, абсолютне вивільнення (-), приріст (+) трудових ресурсів 136,0, рентабельність матеріальних витрат 0,018, економія (-), приріст (+) матеріальних витрат 169,35, фондвіддача 203,82, економія (-), приріст (+) основних виробничих фондів 1,02, коефіцієнт оборотності 0,007, вивільнення (-), додатковий приріст (+) оборотних активів 28,28, частка витрат, що направляються на соціальний розвиток працівників 0,349, коефіцієнт розвитку екологічного механізму 0,001. При цьому буде досягнуто максимуму рентабельності продаж продукції – 20,8217. Аналіз даних оптимальних значень показників свідчить, що при мінімальних значеннях окремих показників таких як: рентабельність інноваційних заходів, частки експорту, коефіцієнта абсолютної ліквідності, коефіцієнта підвищення кваліфікації персоналу, ефективності витрат на інформатизацію та програмне забезпечення, рентабельності активів, рентабельності матеріальних витрат, коефіцієнта оборотності, коефіцієнта розвитку екологічного механізму та при максимальних значеннях решти показників в системі отримуємо високий рівень рентабельності продажів продукції.

$$f_1 = 0,0291x_1 + 0,3680x_2 + 0,0268x_3 + 0,1118x_5 + 0,5446x_6 + 0,3881x_7 + 0,7921x_8 - \\ - 0,3266x_9 + 0,0539x_{10} + 0,7600y_1 + 0,9162y_2 + 0,7626y_3 - 0,1336y_4 + \\ + 0,0839y_5 + 0,5121y_6 + 0,5622y_7 - 0,2218y_8 - 0,1690y_9 + 0,8734y_{10} + \\ + 0,1100y_{11} - 0,2370z_1 + 0,0109z_2;$$

$$f_2 = 0,8679x_1 + 0,6843x_2 + 0,1424x_3 + 0,0499x_5 - 0,4701x_6 + \\ + 0,0495x_7 - 0,0864x_8 + 0,6700x_9 - 0,1142x_{10} + 0,1185y_1 - 0,0293y_2 + 0,2599y_3 - \\ - 0,0549y_4 + 0,0486y_5 - 0,0819y_6 + 0,4461y_7 + 0,0808y_8 - 0,7964y_9 - 0,1363y_{10} - \\ - 0,6246y_{11} + 0,8525z_1 + 0,1733z_2;$$

$$f_3 = 0,1822x_1 + 0,0455x_2 + 0,0044x_3 + 0,8909x_5 - 0,1081x_6 - \\ - 0,0022x_7 - 0,1657x_8 - 0,4033x_9 - 0,0407x_{10} + 0,5464y_1 + 0,2192y_2 + \\ + 0,3336y_3 + 0,2060y_4 + 0,0128y_5 - 0,2613y_6 - 0,1723y_7 - 0,1014y_8 + \\ + 0,1703y_9 - 0,1077y_{10} - 0,2944y_{11} - 0,0807z_1 - 0,8117z_2;$$

$$f_4 = -0,3034x_1 - 0,0635x_2 + 0,0221x_3 + 0,0086x_5 + 0,1669x_6 + \\ + 0,8164x_7 + 0,3109x_8 - 0,2691x_9 + 0,0592x_{10} + 0,2215y_1 + 0,1535y_2 - 0,1593y_3 - \\ - 0,0631y_4 - 0,0118y_5 + 0,3060y_6 + 0,2151y_7 - 0,9275y_8 - 0,1143y_9 + 0,2384y_{10} - \\ - 0,3793y_{11} + 0,0594z_1 - 0,0559z_2;$$

$$f_5 = 0,0940x_1 + 0,0691x_2 + 0,1252x_3 - 0,0146x_5 + 0,2525x_6 + 0,0260x_7 - \\ - 0,2202x_8 - 0,1008x_9 - 0,1117x_{10} - 0,0336y_1 - 0,1118y_2 - 0,1019y_3 + 0,8317y_4 - \\ - 0,7106y_5 + 0,3426y_6 + 0,4929y_7 + 0,0334y_8 + 0,0920y_9 + 0,0486y_{10} - 0,0743y_{11} - \\ - 0,0871z_1 - 0,1949z_2;$$

Для комплексного дослідження максимально можливого рівня ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства на основі оптимального узгодження значень показників, що її визначають, слід визначити залежність рентабельності продажів продукції від латентних факторів, одержаних за допомогою методу багатовимірної статистичного аналізу – факторного аналізу. Це є друга оптимізаційна багатокритеріальна задача. В ній також враховується механізм взаємозв'язку, але не на рівні складових, а на рівні тісноти взаємозв'язку безпосередньо самих показників в системі.

Функція (F_2) залежності рентабельності продажів продукції ефективності виробничо-господарської діяльності підприємств тільки зі значущими латентними факторами в моделі, що є критерієм в оптимізаційній задачі, має вигляд:

$$F_2 = 0,2322 + 0,0448f_3,$$

$$t_a = 10,05 \quad t_{b_3} = 4,78,$$

$$F_2 \rightarrow \max,$$

де f_i – частинні критерії, що є латентними факторами ефективності виробничо-господарської діяльності;

t_{b_i} – обчислені значення критерія Стюдента.

Модель статистично якісна, оскільки $R^2 = 0,498$,

$F = 22,85$ і $DW = 2,528$.

Латентні фактори ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства, отримані за допомогою факторного аналізу, є частинними критеріями другої багатокритеріальної оптимізаційної моделі і визначаються рівняннями:

$$f_6 = 0,0108x_1 - 0,2535x_2 - 0,0939x_3 + 0,0037x_5 + 0,0376x_6 + \\ + 0,1543x_7 - 0,1106x_8 + 0,1862x_9 + 0,9248x_{10} + 0,0999y_1 + 0,1054y_2 + 0,1133y_3 + \\ + 0,1955y_4 + 0,4001y_5 + 0,5053y_6 - 0,1454y_7 + 0,0010y_8 + 0,0690y_9 + 0,0344y_{10} - \\ - 0,0533y_{11} - 0,0610z_1 + 0,1427z_2;$$

$$f_7 = 0,1502x_1 + 0,1941x_2 + 0,9381x_3 + 0,2054x_5 + 0,3461x_6 + 0,1459x_7 + 0,0277x_8 + \\ + 0,1518x_9 - 0,0611x_{10} + 0,0990y_1 + 0,0126y_2 + 0,2050y_3 + 0,2002y_4 - 0,0070y_5 - \\ - 0,0748y_6 - 0,2641y_7 + 0,0969y_8 + 0,0376y_9 - 0,1773y_{10} - \\ - 0,2229y_{11} - 0,0931z_1 + 0,3083z_2.$$

При цьому система обмежень залишається тією ж, що і в першій задачі, а саме:

$$0,08 \leq x_1 \leq 0,56; \quad 0,046 \leq x_2 \leq 0,99; \quad 0,06 \leq x_3 \leq 0,98; \\ 0,002 \leq x_5 \leq 0,257; \quad 1,05 \leq x_6 \leq 3,2; \quad 0,209 \leq x_7 \leq 0,921; \quad 0,00 \leq x_8 \leq 1,099; \\ 0,03 \leq x_9 \leq 0,799; \quad 0,00 \leq x_{10} \leq 4,354; \\ 0,003 \leq y_1 \leq 0,195; \quad 0,008 \leq y_2 \leq 0,685; \quad 0,001 \leq y_3 \leq 0,252; \\ 0,766 \leq y_4 \leq 2,507; \quad 39,00 \leq y_5 \leq 136,00; \quad 0,018 \leq y_6 \leq 0,812; \\ -95,81 \leq y_7 \leq 169,35; \quad 1,95 \leq y_8 \leq 203,82; \quad -65,25 \leq y_9 \leq 1,02; \\ 0,007 \leq y_{10} \leq 1,892; \quad -80,6 \leq y_{11} \leq 28,28; \\ 0,00 \leq z_1 \leq 0,349; \quad 0,001 \leq z_2 \leq 0,576.$$

Розв'язавши дану задачу, маємо оптимальний план:

$$x_1 = 0,56; \quad x_2 = 0,99; \quad x_3 = 0,98; \quad x_5 = 0,257; \quad x_6 = 1,05; \quad x_7 = 0,209; \quad x_8 = 0,00; \\ x_9 = 0,03; \quad x_{10} = 0,00; \quad y_1 = 0,195; \quad y_2 = 0,685; \quad y_3 = 0,252; \quad y_4 = 2,507; \\ y_5 = 136,0; \quad y_6 = 0,018; \quad y_7 = -95,81; \quad y_8 = 1,95; \quad y_9 = 1,02; \quad y_{10} = 0,007; \\ y_{11} = -80,6; \quad z_1 = 0,00; \quad z_2 = 0,001;$$

при цьому значення цільової функції буде дорівнювати $F_2 = 2,1612$. Тобто частка внутрішнього ринку дорівнює 0,56, рентабельність інвестицій 0,99, рентабельність інноваційних заходів 0,98, рентабельність виробництва і збуту 0,257, частка експорту 1,05, коефіцієнт фінансової автономії 0,209, коефіцієнт абсолютної ліквідності 0,00, коефіцієнт підвищення кваліфікації персоналу 0,03, ефективність витрат на інформатизацію та програмне забезпечення 0,00, рентабельність активів 0,195, рентабельність оборотних засобів 0,685, рентабельність власного капіталу 0,252, темп зростання продуктивності праці 2,507, абсолютне вивільнення (-), приріст (+) трудових ресурсів 136,0, рентабельність матеріальних витрат 0,018, економія (-), приріст (+) матеріальних витрат -95,81, фондівіддача 1,95,

економія (-), приріст (+) основних виробничих фондів 1,02, коефіцієнт оборотності 0,007, вивільнення (-), додатковий приріст (+) оборотних активів -80,6, частка витрат, що направляються на соціальний розвиток працівників 0,00, коефіцієнт розвитку екологічного механізму 0,001. При цьому буде досягнуто максимуму рентабельності продаж продукції - 2,1612.

Оптимальний розв'язок складається зі значень показників, що не завжди є максимальними для даних підприємств, а навпаки мають мінімальні значення. Проте максимальні значення інших показників забезпечують максимальне значення рентабельності продажів продукції.

Розглянемо функцію критерію ефективності зі всіма факторами в моделі:

$$F'_2 = 0,2322 - 0,0004f_1 - 0,0053f_2 + 0,0424f_3 + 0,001f_4 - 0,0046f_5 + 0,0135f_6 + 0,0239f_7$$

$$t_a = 9,77 \quad t_{b_1} = 0,05 \quad t_{b_2} = 0,78 \quad t_{b_3} = 3,97 \quad t_{b_4} = 0,08 \quad t_{b_5} = -0,32 \quad t_{b_6} = 0,02 \quad t_{b_7} = 1,39$$

$$F'_2 \rightarrow \max.$$

Модель статистично якісна, оскільки $R^2 = 0,607$, $F = 3,76$ і $DW = 2,7$.

Систему обмежень залишимо тією ж. Оптимальний розв'язок задачі буде:

$$x_1 = 0,56; \quad x_2 = 0,046; \quad x_3 = 0,98; \quad x_5 = 0,257; \quad x_6 = 3,2; \quad x_7 = 0,921; \quad x_8 = 0,00; \\ x_9 = 0,03; \quad x_{10} = 4,354; \quad y_1 = 0,195; \quad y_2 = 0,685; \quad y_3 = 0,252; \quad y_4 = 2,507; \\ y_5 = 136,0; \quad y_6 = 0,018; \quad y_7 = -95,81; \quad y_8 = 1,95; \quad y_9 = 1,02; \quad y_{10} = 0,007; \\ y_{11} = -80,6; \quad z_1 = 0,00; \quad z_2 = 0,001;$$

при цьому значення цільової функції буде дорівнювати $F_2' = 4,7494$. В даному розв'язку частка внутрішнього ринку дорівнює 0,56, рентабельність інвестицій 0,046, рентабельність інноваційних заходів 0,98, рентабельність виробництва і збуту 0,257, частка експорту 3,2, коефіцієнт фінансової автономії 0,921, коефіцієнт абсолютної ліквідності 0,00, коефіцієнт підвищення кваліфікації персоналу 0,03, ефективність витрат на інформатизацію та програмне забезпечення 4,354, рентабельність активів 0,195, рентабельність оборотних засобів 0,685, рентабельність власного капіталу 0,252, темп зростання продуктивності праці 2,507, абсолютне вивільнення (-), приріст (+) трудових ресурсів 136,0, рентабельність матеріальних витрат 0,018, економія (-), приріст (+) матеріальних витрат -95,81, фондвіддача 1,95, економія (-), приріст (+) основних виробничих фондів 1,02, коефіцієнт оборотності 0,007, вивільнення (-), додатковий приріст (+) оборотних активів -80,6, частка витрат, що направляються на соціальний розвиток працівників 0,00, коефіцієнт розвитку екологічного механізму 0,001. Мінімальне значення мають показники: рентабельність інвестицій, коефіцієнт абсолютної ліквідності, коефіцієнт підвищення кваліфікації персоналу, рентабельність матеріальних витрат, економія (-), приріст (+) матеріальних витрат, фондвіддача, коефіцієнт оборотності, вивільнення (-), додатковий приріст (+) оборотних активів, частка витрат, що направляються на соціальний розвиток працівників, коефіцієнт розвитку екологічного механізму. Решта показників в системі повинні мати максимальне значення

на даному інтервалі дослідження. При цьому буде досягнуто максимуму рентабельності продажів продукції - 4,7494.

Задачу визначення максимально можливого рівня ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства на основі оптимального узгодження значень показників, що її визначають, слід розв'язати для кожного підприємства, що досліджувались з урахуванням їх реальних умов функціонування. Так, на основі застосування інструментів описової статистики визначені інтервали змінення показників підприємства ВАТ «Світло шахтаря», це є обмеженнями в оптимізаційній задачі:

$$0,32 \leq x_1 \leq 0,40; \quad 0,11 \leq x_2 \leq 0,99; \quad 0,13 \leq x_3 \leq 0,95;$$

$$0,112 \leq x_5 \leq 0,257; \quad 1,25 \leq x_6 \leq 2,31; \quad 0,742 \leq x_7 \leq 0,875;$$

$$0,001 \leq x_8 \leq 0,02; \quad 0,119 \leq x_9 \leq 0,528; \quad 0,086 \leq x_{10} \leq 2,132;$$

$$0,072 \leq y_1 \leq 0,136; \quad 0,089 \leq y_2 \leq 0,167; \quad 0,075 \leq y_3 \leq 0,142;$$

$$0,789 \leq y_4 \leq 2,507; \quad 68,00 \leq y_5 \leq 98,00; \quad 0,190 \leq y_6 \leq 0,280;$$

$$-7,18 \leq y_7 \leq 8,33; \quad 24,20 \leq y_8 \leq 64,80; \quad -18,5 \leq y_9 \leq -4,47;$$

$$0,272 \leq y_{10} \leq 0,371; \quad -61,92 \leq y_{11} \leq -11,18;$$

$$0,086 \leq z_1 \leq 0,174; \quad 0,012 \leq z_2 \leq 0,052.$$

Розв'язавши дану оптимізаційну задачу та виходячи з реальних умов функціонування підприємства ВАТ «Світло шахтаря», маємо

$$x_1 = 0,40; \quad x_2 = 0,11; \quad x_3 = 0,95; \quad x_5 = 0,257; \quad x_6 = 2,31; \quad x_7 = 0,875; \quad x_8 = 0,001;$$

$$x_9 = 0,119; \quad x_{10} = 2,132; \quad y_1 = 0,136; \quad y_2 = 0,167; \quad y_3 = 0,142; \quad y_4 = 2,507;$$

$$y_5 = 98,0; \quad y_6 = 0,19; \quad y_7 = -7,18; \quad y_8 = 24,2; \quad y_9 = -4,47; \quad y_{10} = 0,272;$$

$$y_{11} = -61,92; \quad z_1 = 0,086; \quad z_2 = 0,012;$$

при цьому значення цільової функції буде дорівнювати $F_{21} = 2,148$.

Отже, тепер маємо змогу визначити оптимальні рівні показників ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства, виходячи з його реальних умов функціонування зі збереженням комплексності і повномасштабності.

Третя оптимізаційна багатокритеріальна задача має враховувати тенденції змінення значень кожного показника для даної групи підприємств. Цільова функція є функцією багатofакторної регресійної залежності рентабельності продажів продукції (F_3) від факторів, що є показниками ефективності виробничо-господарської діяльності:

$$F_3 = 0,674 + 0,435x_1 + 0,078x_2 + 0,212x_3 + 0,504x_5 - 0,132x_6 + 0,421x_7 + 0,319x_8 -$$

$$t_a = 0,81t_{b_1} = 0,34t_{b_2} = 0,44t_{b_3} = 1,08t_{b_4} = 0,61t_{b_5} = -0,81t_{b_6} = 0,51t_{b_7} = 1,09$$

$$-0,337x_9 + 0,083x_{10} - 10,221y_1 + 3,959y_2 + 1,774y_3 + 0,076y_4 + 0,001y_5 - 0,184y_6 +$$

$$t_{b_8} = -1,08t_{b_9} = 1,07t_{b_{10}} = -1,26t_{b_{11}} = 1,31t_{b_{12}} = 1,02t_{b_{13}} = 0,45t_{b_{14}} = -0,35t_{b_{15}} = -0,44 \quad F_3 \rightarrow \max$$

$$+ 0,001y_7 - 0,001y_8 + 0,001y_9 - 0,961y_{10} + 0,001y_{11} - 0,144z_1 - 0,7z_2;$$

$$t_{b_{16}} = 0,64t_{b_{17}} = -0,36t_{b_{18}} = 0,34t_{b_{19}} = -1,5t_{b_{20}} = 0,32t_{b_{21}} = -0,08t_{b_{22}} = -1,65$$

$$R = 0,959, \quad F = 2,12, \quad DW = 2,67.$$

Маємо ще одну цільову функцію, яка містить тільки значимі фактори:

$$F_3 = 0,874 + 0,517x_1 + 0,173x_3 + 0,5x_8 + 0,087x_{10} - 6,853y_1 + 2,641y_2 + 1,696y_3 - \\ + 0,003y_5 - 0,002y_8 - 0,797y_{10} - 0,922z_2;$$

$$R = 0,899, F = 10,55, DW = 1,736.$$

$$F_3 \rightarrow \max.$$

Для складання системи обмежень оптимізаційної задачі доцільно обчислити рівняння основних тенденцій зміни значень по кожному показнику ефективності виробничо-господарської діяльності:

$$x_1 = \sqrt{0,033 + 0,0002t^2}, R = 0,302, F = 9,97, DW = 0,176;$$

$$x_2 = 0,3358 + 0,0007t^2, R = 0,1806, F = 5,07, DW = 1,4427;$$

$$x_3 = 0,3814 + 0,0003t^2, R = 0,0347, F = 0,83, DW = 1,5793;$$

$$x_5 = \sqrt{0,0521 - 0,0168 \ln(t)}, R = 0,5221, F = 25,13, DW = 1,9136;$$

$$x_6 = \sqrt{4,1148 - \frac{2,7826}{t}}, R = 0,0579, F = 1,41, DW = 1,3038;$$

$$x_7 = \sqrt{0,4124 + \frac{0,3166}{t}}, R = 0,0769, F = 1,92, DW = 0,6010;$$

$$x_8 = (-0,0760 + 0,1338 \ln(t))^2, R = 0,1420, F = 3,81, DW = 0,8140;$$

$$x_9 = \sqrt{-0,0194 + 0,0006t^2}, R = 0,4558, F = 19,27, DW = 0,8700;$$

$$x_{10} = \sqrt{3,4680 - 0,0034t^2}, R = 0,0238, F = 0,56, DW = 1,5762;$$

$$y_1 = \left(0,1816 + \frac{0,2006}{t}\right)^2, R = 0,1420, F = 3,81, DW = 1,6996;$$

$$y_2 = \frac{1}{47,1706 - \frac{51,2394}{t}}, R = 0,0643, F = 1,58, DW = 2,2027;$$

$$y_3 = \sqrt{0,0063 + 0,00001t^2}, R = 0,0637, F = 1,57, DW = 2,1933;$$

$$y_4 = \frac{1}{0,7771 + \frac{0,3028}{t}}, R = 0,0577, F = 1,41, DW = 1,9744;$$

$$y_5 = \frac{1}{0,0113 + 0,0001t}, R = 0,0226, F = 0,53, DW = 2,3221;$$

$$y_6 = 0,1348 + 0,0415\sqrt{t}, R = 0,0617, F = 1,51, DW = 1,3800;$$

$$y_7 = -29,2653 + 0,1927t^2, R = 0,2620, F = 8,17, DW = 0,9329;$$

$$y_8 = \sqrt{1622,64 + 20,743t^2}, R = 0,1998, F = 5,74, DW = 0,5279;$$

$$y_9 = -3,4913 - 0,0422t^2, R = 0,2870, F = 9,26, DW = 2,4703;$$

$$y_{10} = 0,2702 + 0,1000 \ln(t), R = 0,0461, F = 1,11, DW = 1,4292;$$

$$y_{11} = -27,1842 + 3,3647 \ln(t), R = 0,0133, F = 0,31, DW = 1,8969;$$

$$z_1 = \sqrt{-0,0013 + 0,0001t^2}, R = 0,2859, F = 9,21, DW = 0,9191;$$

$$z_2 = (-0,1259 + 0,1664\sqrt{t})^2, R = 0,6471, F = 42,18, DW = 1,0052.$$

При цьому слід врахувати, що $1 \leq t \leq 25$. З урахуванням тенденцій зміни кожного показника функція цілі F_3 є спадною на інтервалі дослідження.

Наведені типи багатокритеріальних оптимізаційних задач управління ефективністю виробничо-господарської діяльності підприємства дозволяють комплексно діагностувати стан діяльності на основі порівняння досягнутих рівнів значень показників в системі з можливими оптимальними значеннями з урахуванням існуючих механізмів взаємозв'язків між показниками на підприємстві, складових ефективності, тенденцій зміни значень показників та законів розподілу значень показників і їх числових характеристик. Таке аналітичне обґрунтування діагностики забезпечує її об'єктивність, а отже і дієвість управлінських рішень, які на основі діагностики будуть ухвалюватись. А самі розроблені та розв'язані багатокритеріальні оптимізаційні задачі управління ефективністю виробничо-господарської діяльності підприємства розвивають методологію економіко-математичного моделювання.

ЛІТЕРАТУРА

- Шимко П. Д. Оптимальное управление экономическими системами: Учеб. пособие. – СПб.: Издательский дом «Бизнес-пресса», 2004. – 240 с.
- Фролькис В. А. Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов / Фролькис В. А. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2002. – 320 с.

REFERENCES

- Chernorutskiy, I. G. Metody optimizatsii i priniatia resheniy [Methods of optimization and decision-making]. St. Petersburg: Lan, 2001.
- Christodoulos, A. Floudas, and Panos, M. Pardalos Encyclopedia of Optimization Berlin: Springer, 2008.
- Ehrgott, M. Multicriteria Optimization Berlin: Springer, 2006.

3. Черноуцкий И. Г. Методы оптимизации и принятия решений: Учебное пособие. – СПб.: Изд. «Лань», 2001. – 384 с.
4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М., Наука, 1982, – 256 с.
5. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.
6. Грешилов А. А. Как принять наилучшее решение в реальных условиях. – М.: Радио и связь, 1991.
7. Малярець Л. М. Математико-статистичні інструменти діагностики ефективності виробничо-господарської діяльності підприємства / Малярець Л. М., Жуков А. В. // Економіка розвитку. – 2013. – №3(67). – С. 87 – 93.
8. Пономаренко В. С. Аналіз даних у дослідженнях соціально-економічних систем: монографія / В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець ; Харківський національний економічний ун-т. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2009. – 432 с.
9. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие / Н. И. Холод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихор и др.: Под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: ВГЭУ, 1999. – 413 с.
10. Matthias Ehrgott. Multicriteria Optimization. Springer.– 2006.– 336 p.
11. Christodoulos A. Floudas, Panos M. Pardalos. Encyclopedia of Optimization, Springer.– Volume 1.– 2008.– P. 4626.
- Frolkis, V. A. Vvedenie v teoriyu i metody optimizatsii dlia ekonomistov [Introduction to the theory and methods of optimization for economists]. St. Petersburg: Piter, 2002.
- Greshilov, A. A. Kak priniat nailuchshee reshenie v realnykh usloviakh [How to make the best decisions in the real world]. Moscow: Radio i sviaz, 1991.
- Kuritskiy, B. Ya. Poisk optimalnykh resheniy sredstvami Excel 7.0. [Search for optimal solutions by means of Excel 7. 0.]. St. Petersburg: BHV-Sankt-Peterburg, 1997.
- Kholod, N. I., Kuznetsov, A. V., and Zhikhor, Ya. N. Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli [Economic-mathematical methods and models]. Minsk: VGEU, 1999.
- Maliarets, L. M., and Zhukov, A. V. "Matematyko-statystychni instrumenty diahnostryky efektyvnosti vyrobnycho-hospodarskoi diialnosti pidpriemstva" [Mathematical and statistical tools diagnostic efficiency of production and business enterprises]. Ekonomika rozvytku, no. 3 (67) (2013): 87-93.
- Ponomarenko, V. S., and Maliarets, L. M. Analiz danykh u doslidzhenniakh sotsialno-ekonomichnykh system [The analysis of data in studies of socio-economic systems]. Kharkiv: INZhEK, 2009.
- Podinovskiy, V. V., and Nogin, V. D. Pareto-optimalnye resheniia mnogokriterialnykh zadach [Pareto-optimal solutions of multiobjective problems]. Moscow: Nauka, 1982.
- Shimko, P. D. Optimalnoe upravlenie ekonomicheskimi sistemami [Optimal control of economic systems]. St. Petersburg: Biznespress, 2004.