УДК 656.71:004.231(045)

# ПОБУДОВА ГРАФОВОЇ МОДЕЛІ ЖИВУЧОСТІ НЕЧІТКОЇ МЕРЕЖІ АЕРОПОРТІВ

© 2015 ОЛЕШКО Т. І., ЛЕЩИНСЬКИЙ О. Л., ГОРБАЧОВА О. М.

*УДК 656.71:004.231(045)*

**Олешко Т. І., Лещинський О. Л., Горбачова О. М.**

**Побудова графової моделі живучості нечіткої мережі аеропортів**

*Досліджуючи питання життєвого циклу аеропорту, автори вирішують питання побудови графової моделі живучості нечіткої мережі на прикладі мережі аеропортів. Для вирішення поставленого завдання вводиться нечіткий граф з непарною множиною вершин і парною множиною дуг. У результаті дослідження для введеного графа визначені кон'юнктурна міцність, маршрут, ступінь живучості. Обґрунтовано, що запропонований понятійний апарат дозволяє оцінювати систему аеропортів з точки зору здатності її об'єктів та зв'язків між ними протистояти впливам зовнішніх і внутрішніх економічних, соціально-політичних, екологічних інцидентів, зберігати і відновлювати об'єкти системи, які зазнали негативного впливу. Зроблено висновок про те, що економічна живучість системи аеропортів є тією характеристикою, яка дозволить оцінити ризик виникнення економічної нестабільності системи і загрозу банкрутства. Розглянуті характеристики можуть доповнити інструменти індикації і вимірювання економічної безпеки окремих аеропортів – об'єктів досліджуваної мережі, надаючи системі додаткові якісні характеристики.*

***Ключові слова:** економічна безпека, аеропорт, нечіткий граф, нечіткий шлях, кон'юнктурна міцність*

***Рис.:** 4. **Формул:** 17. **Бібл.:** 8.*

***Олешко Тамара Іванівна** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри, кафедра економічної кібернетики, Національний авіаційний університет (пр. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна)*

***Email:** ti_oleshko@ukr.net*

***Лещинський Олег Львович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра економічної кібернетики, Національний авіаційний університет (пр. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна)*

***Горбачова Оксана Миколаївна** – кандидат економічних наук, доцент, доцент, кафедра фінансів, обліку і аудиту, Національний авіаційний університет (пр. Космонавта Комарова, 1, Київ, 03058, Україна)*

*УДК 656.71:004.231(045)*

***Олешко Т. И., Лещинский О. Л., Горбачева О. Н. Построение графовой модели живучести нечетких сетей аэропортов***

*Изучая задачу жизненного цикла аэропорта, авторы решают вопрос построения графовой модели живучести нечеткой сети на примере сети аэропортов. Для решения поставленной задачи вводится нечеткий граф с нечетким множеством вершин и четким множеством дуг. В результате исследования для введенного графа определены конъюнктурная прочность, маршрут, степень живучести. Обосновано, что предложенный понятийный аппарат позволяет оценивать систему аэропортов с точки зрения способности ее объектов и связей между ними противостоять влияниям внешних и внутренних экономических, социально-политических, экологических инцидентов, сохранять и восстанавливать объекты системы, подвергшиеся негативному влиянию. Сделан взвод о том, что экономическая живучесть системы аэропортов является характеристикой, которая позволит оценить риск возникновения экономической нестабильности системы и угрозу банкротства. Рассмотренные характеристики могут дополнить инструменты индикации и измерения экономической безопасности отдельных аэропортов – объектов исследуемой сети, давая системе дополнительные качественные характеристики.*

***Ключевые слова:** экономическая живучесть, аэропорт, нечеткий граф, нечеткий путь, конъюнктурная прочность*

***Рис.:** 4. **Формул:** 17. **Библ.:** 8.*

***Олешко Тамара Ивановна** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой, кафедра экономической кибернетики, Национальный авиационный университет (пр. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03058, Украина)*

***Email:** ti_oleshko@ukr.net*

***Лещинский Олег Львович** – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра экономической кибернетики, Национальный авиационный университет (пр. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03058, Украина)*

***Горбачева Оксана Николаевна** – кандидат экономических наук, доцент, доцент, кафедра финансов, учета и аудита, Национальный авиационный университет (пр. Космонавта Комарова, 1, Киев, 03058, Украина)*

*UDC 656.71:004.231(045)*

***Oleshko T. I., Leszczynski O. L., Gorbacheva O. M. Construction of a Graphic Model of Fuzzy Network Survivability in Airports***

*While studying the question of the airport lifecycle, the authors used the example of an airport network to solve the task of construction of a graphic model of fuzzy network survivability. For the purpose of solving the set task, a fuzzy graph with an unpaired vertex set and a paired arc set was introduced. The study allowed determining stability of market environment, the route, the survivability rate for the introduced graph. The article substantiates that the offered conceptual framework allows evaluating the airport system from the standpoint of ability of its objects and their connections to withstand the effects of external and internal economic, social and political, environmental incidents, to preserve and restore the system objects that have undergone negative influences. The study concludes that the economic survivability of the airport system is a characteristic which will permit evaluating the risk of the economic instability of the system and the threat of bankruptcy. The studied characteristics can extend the set of tools for indication and assessment of the economic strength of individual airports – objects of the studied network by providing the system with additional qualitative characteristics.*

***Keywords:** economic survivability, airport, fuzzy graph, fuzzy path, stability of market environment*

***Pic.:** 4. **Formulae:** 17. **Bibl.:** 8.*

***Oleshko Tamara I.** – Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of the Department, Department of Economic Cybernetics, National Aviation University (pr. Kosmonavta Komarova, 1, Kyiv, 03058, Ukraine)*

***Email:** ti_oleshko@ukr.net*

***Leszczynski Oleh L.** – Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Economic Cybernetics, National Aviation University (pr. Kosmonavta Komarova, 1, Kyiv, 03058, Ukraine)*

***Gorbacheva Oksana M.** 0 Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor, Associate Professor, Department of Finance, Accounting and Auditing, National Aviation University (pr. Kosmonavta Komarova, 1, Kyiv, 03058, Ukraine)*

Одним із завдань вивчення життєвого циклу може стати завдання знаходження ступеня живучості певної мережі аеропортів. На сьогодні питання живучості транспортної мережі вивчено далеко не повністю. Загальноприйнятих термінів «живучість транспортної мережі авіаперевезень», «живучість мережі аеропортів» не існує. Одне з перших визначень живучості транспортної мережі було дано в роботі [1]. У вказаних дослідженнях розглядалися мережі, представлені чіткими графами, а під живучістю розумілася чутливість мережі до пошкоджень. Але стосовно мережі аеропортів дане визначення є надто розмитим, оскільки поняття чутливість можна тлумачити, наприклад, як здатність системи приймати подразнення, збурення, тощо, що, у свою чергу, веде до змістовної незв'язності понять, з яких складається визначення живучості. Розглядаючи поняття економічності живучості стосовно системи аеропортів, автори на сьогодні зупиняються на такому визначенні.

Економічною живучістю мережі аеропортів називається здатність її об'єктів і зв'язків між ними протидіяти впливам змінних і внутрішніх економічних, політичних, соціальних, економічних інцидентів, зберігати та відновлювати (повністю або частково) об'єкти, які зазнали негативного впливу.

Економічна живучість мережі аеропортів є характеристикою, яка, на думку авторів, дозволить оцінювати ризик виникнення економічної нестабільності системи та загроз банкрутства. Вказаний критерій, можливо, доповнить інструменти індикації і вимірювання економічної безпеки окремих аеропортів (об'єктів) досліджуваної мережі, надаючи системі додаткові якісні характеристики. Очевидним є той факт, що живучість мережі суттєво зменшується при вилученні певного об'єкта з неї або розриву деякої її гілки зв'язку. Якщо мережу аеропортів представити у вигляді чіткого графу, то вилучення деякого об'єкта (вершини) та (або) одного чи декількох ребер може призвести до руйнування (порушення) зв'язків між іншими об'єктами мережі, що, у свою чергу, потягне за собою зменшення живучості всієї мережі. [5; 6].

Традиційно при представленні транспортної мережі у вигляді чіткого графа мережу вважають зруйнованою, якщо при вилученні одного чи декількох ребер отриманий граф мережі задовольняє одну з наступних умов [7]:

1) граф містить принаймні дві компоненти зв'язності;
2) число вершин в деякій (найбільшій чи найменшій) компоненті зв'язності графа менше деякого наперед заданого числа;
3) довжина найкоротшого шляху між двома заданими вершинами більша деякої заданої величини.

При розв'язанні задач, пов'язаних з поняттям живучості, наявність певних факторів може змушувати задавати параметри мережі якісними або суб'єктивними оцінками. Зокрема, оцінювати живучість мережі можна ступенем живучості. При цьому під ступенем живучості можна розуміти і ймовірність економічної стабільності деякого сегмента мережі і суб'єктивні оцінки надійності, захищеності, важливості. В цьому випадку адекватною моделлю мережі можуть стати нечіткі графи [2; 3].

Нечіткі орієнтовані графи I-го роду використовуються, зокрема, у задачах оптимального розміщення центрів обслуговування, в нечітких транспортних мережах, у задачах пошуку максимального потоку з метою перерозподілу потоків [8]:

На сьогодні існують декілька визначень нечітких графів.

Визначення 1. Нечітким орієнтованим графом I-го роду називається пара множин $X = \{x_i\}$ $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ – чітка множина вершин та

$\tilde{U} = \left\{ \left\langle \frac{\mu(x_i, x_k)}{(x_i, x_k)} \right\rangle \right\}$ – нечітка множина орієнтованих ребер, де $x_i, x_k \in X$,

$\mu_{\tilde{U}} : X^2 \to [0:1]$ – значення функції належності $\mu_{\tilde{U}}$ для ребра $(x_i, x_k)$.

Позначають нечіткий граф I-го роду $\tilde{G}(X, \tilde{U})$.

Якщо мережу аеропортів представляти нечітким графом I-го роду, то об'єкти мережі, що представлені вершинами графу, вважаються незмінними, тобто не можуть впливати на характеристики мережі з точки зору її живучості.

Визначення 2. Нечітким орієнтованим графом II-го роду називається пара нечітких множин: $\tilde{X}$ – нечітка множина вершин в деякій універсальній множині $X$, тобто $\tilde{X} = \left\{ \left\langle \frac{\mu_X(X)}{x} \right\rangle \right\}$, $x \in X$, $|X| = n$ з функцією належності $\mu_X : \mathrm{X} \to [0,1]$,

$\tilde{U}$ – нечітка множина орієнтованих ребер, тобто $\tilde{U} = \left\{ \left\langle \frac{\mu_{\tilde{U}}(x_i, x_k)}{(x_i, x_k)} \right\rangle \right\}$, $x_i, x_k \in X$ з функцією належності $\mu_{\tilde{U}} : \mathrm{X}^2 \to [0,1]$.

Вивчаючи питання живучості мережі аеропортів і доступні публікації з питань живучості нечіткої транспортної мережі, автори прийшли до висновку, що в даних дослідженнях будь-яка економічна інформація може виявитися неповною і неточною. Це, зокрема, пояснюється впливом багатьох можливих факторів, які неможливо передбачити наперед, використанням не всієї доступної, а тільки корисної інформації, складність обробки якої не перевищує ефекту від її використання. Тому, для врахування природної невизначеності, необхідно удосконалення теорії нечітких транспортних мереж. Для дослідження мережі аеропортів введено поняття нечіткого орієнтованого графа $\tilde{G}^*$.

Визначення 3. Нечітким орієнтованим графом $\tilde{G}^*$ будемо називати пару множин $\tilde{X}$ – нечітку множину вершин в деякій універсальній множині $X$, тобто $\tilde{X} = \left\{ \left\langle \frac{\mu_X(X)}{x} \right\rangle \right\}$, $x \in X$, $|X| = n$ з функцією належності $\mu_x : X \to [0;1]$, і $U = \{x_i, x_k\}$ – чітка множина орієнтованих ребер, де $\{x_i, x_k\} \in X$.

Розглянемо теоретичні аспекти живучості нечіткого графу.

Визначення 4. Шляхом (або маршрутом) $\tilde{l}(x_i, x_j)$ нечіткого графа називається направлена послідовність нечітких дуг, яка веде з вершини $x_i$ у вершину $x_j$, в якій кінцева вершина будь-якої дуги, відмінна від останньої, є початковою вершиною наступної дуги.

Під міцністю шляху будемо розуміти властивість шляху не руйнуватись під дією різних факторів, які характеризуються функцією належності.

Визначення 5. Кон'юнктивною міцністю шляху для нечіткого графа I-го роду [3] називають значення

$$\mu_{\tilde{l}}(x_i, x_j) = \bigwedge_{\langle x_k, x_t \rangle} \mu_\upsilon(x_k, x_t).$$

Кон'юнктивна міцність шляху нечіткого графу I-го роду визначається найменшим значенням функції належності дуг, що входять у досліджуваний шлях.

Визначення 6. Кон'юнктивною міцністю нечіткого графа II-го роду [4] називають величину

$$\mu_{\tilde{l}}(x_i, x_j) = \bigwedge_{\substack{\langle x_k, x_t \rangle \in \tilde{l}(x_i, x_j) \\ x_k \neq x_i \\ x_t \neq x_k}} \Big(\mu_\upsilon(x_k, x_t)\big(\Lambda \mu_x(x_k)\big)\big(\Lambda \mu_x(x_t)\big)\Big).$$

Тут у силу специфіки використання останньої величини вважають, що значення функції належності першої і останньої вершини в кон'юнктивній міцності досліджуваного шляху не враховуються. Тобто кон'юнктивна міцність шляху визначається найменшим значенням функції належності нечітких дуг і вершин, що входять до нього, за виключенням початкової і кінцевої вершини.

Визначення 7. Кон'юнктивною міцністю шляху нечіткого орієнтованого графу $\tilde{G}^*$ будемо називати значення

$$\mu_{\tilde{l}^*}(x_i, x_j) = \bigwedge_{\substack{\langle x_k, x_t \rangle \in \tilde{l}^*(x_i, x_j) \\ x_k \neq x_i \\ x_t \neq x_j}} \Big(\big(\Lambda \mu_x(x_k)\big)\big(\Lambda \mu_x(x_t)\big)\Big).$$

Іншими словами, кон'юнктивна міцність шляху нечіткого графа $\tilde{G}^*$ визначається найменшим значенням функції належності вершин, що входять до нього, за виключенням початкової і кінцевої вершин.

Визначення 8. Шляхом $\tilde{l}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$ нечіткого графа $\tilde{G}^*$ будемо називати направлену послідовність чітких дуг, що ведуть від нечіткої вершини $\tilde{x}_i$ до нечіткої вершину $\tilde{x}_j$, в якій кінцева вершина будь-якої дуги, відмінної від останньої, є початковою вершиною наступної дуги.

Розглянемо нечіткий шлях $\tilde{l}^*$ з вершини $\tilde{x}_i$ до вершини $\tilde{x}_j$, представлений об'єднанням його частин:

$$\tilde{l}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \bigcup_{t=1}^{k} \tilde{l}^*(\tilde{x}_t, \tilde{x}_j),$$

де $\tilde{x}_{it}, i = \overline{1,k}$ – нечіткі вершини, що входять до нечіткого шляху $\tilde{l}^*(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$.

Нехай $\mu_{t\tilde{l}}{}^*(x_{it}, x_{it+1}), t = \overline{0,k}$, $x_{i0} = x_i$, $x_{ik+1} = x_j$ – кон'юнктивна міцність шляху між парами вершин. Тоді мають місце такі властивості:

$$\mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \leq \min\{\mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i1})\mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}), ..., \mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_{ik}, \tilde{x}_j)\}$$

Знак «=» виконується у випадку, якщо

$$\min\{\mu_x(\tilde{x}_{i1})\mu_x(\tilde{x}_{i2}), ..., \mu_x(\tilde{x}_{ik})\} \geq$$

$$\geq \min\{\mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i1}), \mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}), ..., \mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_{ik}, \tilde{x}_j)\}.$$

Це означає, що якщо серед початкових або кінцевих вершин частин шляху знайдеться така вершина, що її значення $\mu_x$ буде менше їх кон'юнктивних міцностей, то кон'юнктивна міцність всього шляху $\tilde{l}^*(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$ буде меншою будь-якої кон'юнктивної міцності включених до нього частин. У протилежному випадку вона рівна найменшому з них.

Визначення 9. Нехай $\tilde{L}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)$ – сім'я нечітких шляхів з вершини $\tilde{x}_i$ до вершини $\tilde{x}_j$ Ступенем досяжності вершин $\tilde{x}_j$ з вершини $\tilde{x}_i$ вважатимемо величину

$$\tau(x_i, x_j) = \max_{\tilde{l}^* \in \tilde{L}^*} \{\mu_{\tilde{l}^*}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)\}.$$

Вводячи поняття ступеня живучості нечіткого графа $\tilde{G}^*$, автори прийшли до висновку, що на сьогодні це поняття співпадає з поняттям живучості нечіткого графа II-го роду, тобто це найменше з кон'юнктивних міцностей всіх пар вершин графа.

Визначення 10. Ступенем живучості нечіткого графа $\tilde{G}^*$ будемо називати величину $V(\tilde{G}^*) \in [0;1]$, що визначається виразом

$$V(\tilde{G}^*) = \bigwedge_{\tilde{x}_i \in \tilde{x}} \bigwedge_{\tilde{x}_j \in \tilde{x}} \tau(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j).$$

Наслідок 1. Між довільними двома нечіткими вершинами графа $\tilde{G}^*$ не існує шляху з кон'юнктивною міцністю меншою значення $V(\tilde{G}^*)$.

Якщо позначити через $\tilde{G}'^* = (\tilde{x}', U')$ деякий підграф нечіткого графа $\tilde{G}^*(\tilde{x}, U) \cdot (\tilde{x}' \leq \tilde{x})$, то його ступінь живучості буде дорівнювати

$$V(\tilde{G}^*) = \bigwedge_{x_i \in \tilde{x}'} \bigwedge_{x_j \in \tilde{x}'} \tau(x_i, x_j) = \bigwedge_{x_i \in \tilde{x}'} \bigwedge_{x_j \in \tilde{x}'} \left( \bigvee_{\tilde{l}^* \in \tilde{L}^*} \mu_{\tilde{l}^*}(x_i, x_k) \right) =$$

$$= \bigwedge_{x_i \in \tilde{x}'} \bigwedge_{x_j \in \tilde{x}'} \left( \bigvee_{\tilde{l}^* \in \tilde{L}^*} \bigwedge_{\substack{\langle x_k, x_t \rangle \\ x_k, x_t \neq x_i, x_j}} \big((\Lambda \mu_{\tilde{x}}(x_k)\big)\big((\Lambda \mu_{\tilde{x}}(x_t)\big) \right) =$$

$$= \bigwedge_{x_i \in \tilde{x}'} \bigwedge_{x_j \in \tilde{x}'} \left( \bigvee_{\tilde{l}^* \in \tilde{L}^*} \bigwedge_{\substack{\langle x_k, x_t \rangle \in \tilde{l}^*(x_i, x_j) \\ x_k, x_t \neq x_i, x_j \\ \forall x_k, x_t \in \tilde{x}'}} \big((\Lambda \mu_{\tilde{x}}(x_k)\big)\big((\Lambda \mu_{\tilde{x}}(x_t)\big) \right) =$$

$$\times \bigvee\bigvee \left( \bigvee_{\tilde{l}^* \in \tilde{L}^*} \bigwedge_{\substack{\langle x_k, x_t \rangle \in \tilde{l}^*(x_i, x_j) \\ x_k, x_t \neq x_i, x_j \\ \exists x_k, x_t \in \tilde{x} \setminus \tilde{x}'}} \big((\Lambda \mu_{\tilde{x}}(x_k)\big)\big((\Lambda \mu_{\tilde{x}}(x_t)\big) \right) =$$

$$= \bigwedge_{x_i\in\tilde{x}'}\bigwedge_{x_j\in\tilde{x}'}\left(\bigvee_{\tilde{l}^{*}\in\tilde{L}^{*}}\bigwedge_{\substack{\langle x_k,x_t\rangle\in\tilde{l}^{*}(x_i,x_j)\\ x_k,x_t\neq x_i,x_j\\ \forall x_k,x_t\in\tilde{x}'}}((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_k))((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_t))\right)=$$

$$\times\bigvee\bigvee\bigwedge_{x_i\in\tilde{x}'}\bigwedge_{x_j\in\tilde{x}'}\left(\bigvee_{\tilde{l}^{*}\in\tilde{L}^{*}}\bigwedge_{\substack{\langle x_k,x_t\rangle\in\tilde{l}^{*}(x_i,x_j)\\ x_k,x_t\neq x_i,x_j\\ \exists x_k,x_t\in\tilde{x}\setminus\tilde{x}'}}((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_k))((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_t))\right)$$

Визначення 11. Внутрішнім ступенем живучості нечіткого під графа $\tilde{G}'^{*}$ будемо називати величину

$$V_{ins}(\tilde{G}'^{*})=\bigwedge_{x_i\in\tilde{x}'}\bigwedge_{x_j\in\tilde{x}'}\left(\bigvee_{\tilde{l}^{*}\in\tilde{L}^{*}}\bigwedge_{\substack{\langle x_k,x_t\rangle\in\tilde{l}^{*}(x_i,x_j)\\ x_k,x_t\neq x_i,x_j\\ \forall x_k,x_t\in\tilde{x}'}}((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_k))((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_t))\right)$$

Визначення 12. Зовнішнім ступенем живучості нечіткого під графа $\tilde{G}'^{*}$ будемо називати величину

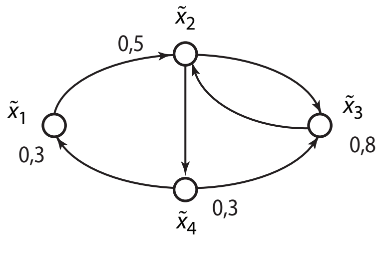
$$V_{ext}(\tilde{G}'^{*})=\bigwedge_{x_i\in\tilde{x}'}\bigwedge_{x_j\in\tilde{x}'}\left(\bigvee_{\tilde{l}^{*}\in\tilde{L}^{*}}\bigwedge_{\substack{\langle x_k,x_t\rangle\in\tilde{l}^{*}(x_i,x_j)\\ x_k,x_t\neq x_i,x_j\\ \exists x_k,x_t\in\tilde{x}\setminus\tilde{x}'}}((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_k))((\Lambda\mu_{\tilde{x}}(x_t))\right)$$

Отже, ступінь живучості нечіткого під графа $\tilde{G}'^{*}$ можна представити у вигляді

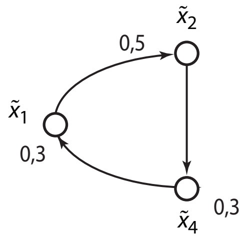
$$V(\tilde{G}'^{*})=V_{ins}(\tilde{G}'^{*})VV_{ext}(\tilde{G}'^{*}).$$

Внутрішній ступінь живучості $V_{ins}(\tilde{G}'^{*})$ нечіткого підграфа визначається шляхами, що проходять через нечіткі вершини з множини $\tilde{x}'$, а зовнішній ступінь живучості $V_{ext}(\tilde{G}'^{*})$ визначається шляхами, що проходять через нечіткі вершини, коли одна з них не належить підмножині нечітких вершин $\tilde{x}'$.

Як приклад розглянемо граф $\tilde{G}^{*}$




і його підграф $\tilde{G}'^{*}=(\tilde{x}',U')$, $\tilde{x}'=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_4\}$




$V_{ins}(\tilde{G}'^{*})=0,3;$

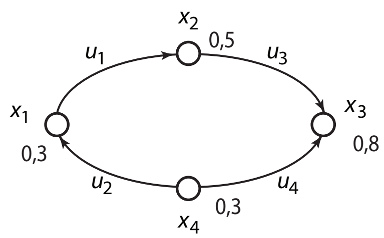
$V_{ext}(\tilde{G}'^{*})=0,3;$

$V(\tilde{G}'^{*})=0,3.$

Розглянемо сурграф $\tilde{G}''^{*}(\tilde{x}''^{*},U'')$ нечіткого орієнтованого графа $\tilde{G}^{*}(\tilde{x},U)(\tilde{x}''=\tilde{x};\ U''\leq U)$.

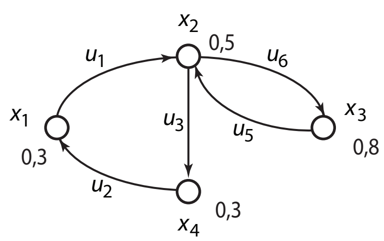
1. Вивчаючи питання живучості нечіткого $\tilde{G}^{*}$-орієнтованого графа сурграфами $\tilde{G}''^{*}$, можна виокремити два випадки:

Руйнування частини шляхів (ребер) між вершинами може привести до порушення сильної зв'язності графа, і живучість сурграфа буде дорівнювати 0.




$V(\tilde{G}''^{*})=0.$

2. Руйнування частини шляхів (ребер) зберігає сильну зв'язність всієї мережі. Це означає, що аналогічно, як і в графі $\tilde{G}^{*}$, який є сильно зв'язним між будь-якими двома вершинами, існує шлях з кон'юнктивною міцністю не менше $V(\tilde{G}^{*})$, вилучення одного або декількох ребер не зменшує ступінь живучості отриманого сурграфу.




$V(\tilde{G}''^{*})=0,3.$

Властивість 1. Якщо руйнування шляхів (ребер) між вершинами нечіткого графа $\tilde{G}^{*}$ зберігає його сильну зв'язність, то має місце нерівність $V(\tilde{G}''^{*})\geq V(\tilde{G}^{*})$.

Проаналізуємо метод знаходження ступеня живучості нечіткого графа $\tilde{G}^{*}$.

Розглянемо систему нечітких многозначних відображень $\tilde{F}_1,\tilde{F}_2,...,\tilde{F}_n$ та систему обернених відображень $\tilde{F}_{-1},\tilde{F}_{-2},...,\tilde{F}_{-n}$:

$$\tilde{F}_1(x_i) = \left\{ \left\langle \frac{\mu_{\tilde{F}}(x_i, x_j)}{x_j} \right\rangle \middle| \forall_j \tilde{x}_i \in \tilde{X} \right\},$$

де $\mu_{\tilde{F}}(x_i, x_j) = \mu_U(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \exists(x_i, x_j) \\ 0, \text{ якщо } \nexists(x_i, x_j) \end{cases}$.

визначає кон'юнктивну міцність з вершини $x_i$ у вершину $x_j$ довжиною 1.

$$\tilde{F}_2(x_i) = \tilde{F}(\tilde{F}_1(\tilde{x}_i)) = \left\{ \left\langle \frac{\mu_{\tilde{F}_2}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_1)}{\tilde{x}_1} \right\rangle, \left\langle \frac{\mu_{\tilde{F}_2}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1}, ..., \frac{\mu_{\tilde{F}_2}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_n)}{\tilde{x}_1} \right\rangle \right\},$$

де

$$\mu_{\tilde{F}_2}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \left( \bigvee_{x_k \in X} \mu_{U_2}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_k)(\Lambda \mu_X(\tilde{x}_k)) \right) \left( \vee \left( \bigvee_{x_k \in X} \mu_U(\tilde{x}_k, \tilde{x}_j) \right) \right)$$

визначає кон'юнктивну міцність шляху з вершини $x_i$ в $x_j$ довжиною 2.

$$\tilde{F}_3(x_i) = \tilde{F}(\tilde{F}_2(\tilde{x}_i)) = \left\{ \left\langle \frac{\mu_{\tilde{F}_3}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)}{\tilde{x}_1} \right\rangle, \middle| \forall \tilde{x}_i \in \tilde{X} \rangle \right\},$$

де

$$\mu_{\tilde{F}_3}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \left( \bigvee_{x_k \in X} \mu_{\tilde{F}_2}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_k)(\Lambda \mu_X(\tilde{x}_k))(\Lambda \mu_X x_k) \bigvee_{x_k \in X} \mu_U(\tilde{x}_k, \tilde{x}_j) \right)$$

визначає найбільшу кон'юнктивну міцність шляху з вершини $x_i$ в вершину $x_j$ довжиною 3.

$$\tilde{F}_n(x_i) = \tilde{F}(\tilde{F}_{n-1}(\tilde{x}_i)) = \left\{ \left\langle \frac{\mu_{\tilde{F}_n}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)}{\tilde{x}_i} \right\rangle, \middle| \forall \tilde{x}_i \in \tilde{X} \rangle \right\},$$

де

$$\mu_{\tilde{F}_n}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \left( \bigvee_{x_k \in X} \mu_{\tilde{F}_{n-1}}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_k)(\Lambda \mu_X(\tilde{x}_k))(\Lambda \mu_X \tilde{x}_k) \bigvee_{x_k \in X} \mu_U(x_k, x_j) \right)$$

визначає найбільшу кон'юнктивну міцність шляху з вершини $x_i$ до вершини $x_j$ довжиною $n$.

$$\tilde{F}_{-1}(\tilde{x}_i) = \left\{ \left\langle \frac{\mu_F(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j)}{x_j} \right\rangle \middle| \forall_j \tilde{x}_i \in \tilde{X} \rangle \right\},$$

де $\mu_F(x_i, x_j) = \mu_U(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \exists(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \\ 0, \text{ якщо } \nexists(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) \end{cases}$.

визначає кон'юнктивну міцність довжини 1 з вершини $x_j$ в вершину $x_i$

$$\tilde{F}_{-n}(\tilde{x}_i) = \tilde{F}(\tilde{F}_{-(n-1)}(\tilde{x}_i)) = \{\langle \mu_{\tilde{F}_{-n}}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) / x_j \rangle \forall x_j \in X\},$$

де величина

$$\mu_{\tilde{F}_{-n}}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \left( \bigvee_{x_k \in X} \mu_{\tilde{F}_n}(\tilde{x}_i, \tilde{x}_k) \right)(\Lambda \mu(x_k))(\mu_U(\tilde{x}_k, \tilde{x}_i)$$

визначаєнайбільшукон'юнктивнуміцністьшляхувершинних $x_j$ до вершини $x_i$ довжиною $n$.

Отже, $\tilde{F}_n(\tilde{x}_i)$ і $\tilde{F}_{-n}(\tilde{x}_i)$ є відповідно нечіткими підмножинами множини $X$-вершин, в які можна попасти з вершини $\tilde{x}_i$, використовуючи шляхи довжиною $n$, а також тих нечітких вершин, з яких можна потрапити в $\tilde{x}_i$, використовуючи шляхи довжиною $n$.

Визначення 13. Нечіткими транзитивними замиканнями $\hat{\tilde{F}}(x_i) \cdot \left( \hat{\tilde{F}}_{-}(x_i) \right)$ будемо називати нечітке многозначне відображення

$$\hat{\tilde{F}}(x_i) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \tilde{F}_j(x_i),$$

де $\tilde{F}_0(x_i) = \left\{ \left\langle \frac{1}{x_i} \right\rangle \right\}$,

$$\hat{\tilde{F}}(x_i) = \bigcup_{j=0}^{n-1} \tilde{F}_{-j}(x_i) \cdot j = 0.$$

Нечітке транзитивне замикання $\hat{\tilde{F}}(x_i)$ – це нечітка підмножина вершин $X$, які можна досягти з вершини $x_i$ по деякому шляху з відповідною кон'юнктивною міцністю.

Зауваження. Очевидним є той факт, що формально поняття транзитивного замикання $\hat{\tilde{F}}(x_i)$ і оберненого транзитивного замикання $\hat{\tilde{F}}_{-}(x_i)$ для нечіткого графа $\tilde{G}^*$ співпадають з цими ж самими поняттями для нечітких графів I-го роду [3] та II-го роду [4].

Визначення 14. Нехай

$$\tilde{H}(x_i) = \hat{\tilde{F}}(x_i) \cap \hat{\tilde{F}}_{-}(x_i) = \left\{ \left\langle \frac{\tau_k}{x_k} \right\rangle, k = \overline{1, n}, \tau_k \in [0;1] \right\}.$$

Ступенем живучості графа $\tilde{G}^*$ будемо називати величину $V(\tilde{G}^*) = \min\{\tau_1, \tau_1, ..., \tau_n\}$ у випадку співпадання носія нечіткої множини $\tilde{H}(x_i)$ з множиною вершин X графа $\tilde{G}^*$ (тобто, коли $\tilde{G}^*$ сильно зв'язаний) або 0 в протилежному випадку $V(\tilde{G}^*) = 0$.

Зауваження. Визначення ступеня живучості нечіткого графа $\tilde{G}^*$ співпадає з аналогічним визначенням для нечіткого графа II-го роду [4].

Звичайною сприймається задача підвищення ступеня живучості графа $\tilde{G}^*$ з найменшими витратами. Тут під витратами розуміють вкладання коштів на збільшення функції належності вершин графа за рахунок додавання нових ребер, внутрішніх властивостей вершин тощо. Вказана задача є наступним кроком досліджень авторів в даному напрямку. Окремим завданням є також побудова множин нечітких вершин $X = \left[ \left\langle \frac{\mu_X(x)}{x} \right\rangle \right]$. На емпіричному рівні це завдання зводиться до задачі нечіткого впорядкування або ранжування елементів $x \in X$ відповідно до скінченної множині критеріїв. При більш глибоких дослідженнях це завдання є достатньо складним і передбачає окреме вивчення.

**ЛІТЕРАТУРА**

**1.** Фрэнк Г. Сети. Связь и потоки / Г. Фрэнк, И. Фриш. – М. : Связь, 1978. – 448 с.

**2.** Monderson J. N. Fussy graphs and fussy hypergraphs / J. N. Monderson, P. S. Nair. – Heidelberg; New York: Physica-Verl., 2000. – 248 p.

**3.** Берштейн Л. С. Нечеткие графы и гиперграфы / Л. С. Берштейн, А. В. Боженюк. – М. : Научный мир, 2005. – 256 с.

**4.** Боженюк А. В. Нахождение живучести нечетких транспортных сетей с применением геоинформационных систем / А. В. Боженюк, И. Н. Розенберг, Д. Н. Ястребинская. – М. : Научный мир, 2012. – 176 с.

**5.** Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман; [пер. с фр.]. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

**6.** Аверкин А. Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. Н. Аверкин; [под. ред. Д. А. Поспелова]. – М. : Наука, 1986. – 312 с.

**7.** Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М. : Мир, 1976. – 100 с.

**8.** Круглов В. В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети / В. В. Круглов, М. Н. Дли, Р. Ю. Голунов. – М. : Физматлит, 2001. – 224 с.


**REFERENCES**


Averkin, A. N. Nechetkie mnozhestva v modeliakh upravleniia i iskusstvennogo intellekta [Fuzzy sets in management models and artificial intelligence]. Moscow: Nauka, 1986.

Bershteyn, L. S., and Bozheniuk, A. V. Nechetkie grafy i gipergrafy [Fuzzy graphs and hypergraphs]. Moscow: Nauchnyy mir, 2005.

Bozheniuk, A. V., Rozenberg, I. N., and Yastrebinskaia, D. N. Nakhozhdenie zhivuchesti nechetkikh transportnykh setey s primeneniem geoinformatsionnykh sistem [Finding survivability fuzzy transport networks using geographic information systems]. Moscow: Nauchnyy mir, 2012.

Frenk, G., and Frish, I. Seti. Sviaz i potoki [Network. Communication and streams]. Moscow: Sviaz, 1978.

Kofman, A. Vvedenie v teoriiu nechetkikh mnozhestv [Introduction to the theory of fuzzy sets]. Moscow: Radio i sviaz, 1982.

Kruglov, V. V., Dli, M. N., and Golunov, R. Yu. Nechetkaia logika i iskusstvennye neyronnye seti [Fuzzy logic and artificial neural networks]. Moscow: Fizmatlit, 2001.

Monderson, J. N., and Nair, P. S. Fussy graphs and fussy hypergraphsHeidelberg; New York: Physica-Verl., 2000.

Zade, L. Poniatie lingvisticheskoy peremennoy i ego primenenie k priniatiiu priblizhennykh resheniy [The concept of linguistic variable and its application to the adoption of approximate solutions]. Moscow: Mir, 1976.