

# Резонансные моды в копланарных линиях с встроенными джозефсоновскими цепями

А.В. Швецов, А.М. Сатанин

*Нижегородский государственный университет, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*  
E-mail: alexshdze@mail.ru

В.А. Миронов

*Институт прикладной физики РАН, ул. Ульянова, 46, г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Е. Ильичев

*Institut für Photonische Technologien, Albert-Einstein-Straße 9, Jena, 07745 Germany*

Статья поступила в редакцию 16 апреля 2013 г., после переработки 7 июня 2013 г.

Исследовано распространение микроволнового излучения в копланарных сверхпроводящих линиях с джозефсоновскими цепочками (микрорезонаторами) различной конфигурации. Показано, что провалы в частотной зависимости передаваемой мощности волноводной линии связаны с локальными модами цепочки. Найдены зависимости формы и положения провалов от внешнего магнитного поля и прикладываемой мощности. Результаты вычислений могут быть использованы при разработке современных криоэлектронных микроволновых сверхпроводящих приборов.

Досліджено поширення мікрохвильового випромінювання в копланарних надпровідних лініях з джозефсонівськими ланцюжками (мікрорезонаторами) різної конфігурації. Показано, що провали в частотній залежності потужності хвильоводної лінії, яка передається, пов'язані з локальними модами ланцюжка. Знайдено залежності форми та положення провалів від зовнішнього магнітного поля та від потужності, що прикладається. Результати обчислень можуть бути використані при розробці сучасних криоелектронних мікрохвильових надпровідних приладів.

PACS: 74.81.Fa Матрица джозефсоновских контактов и проволочные сети;  
41.20.Jb Распространение электромагнитных и радиоволн.

Ключевые слова: копланарные волноводы, электромагнитные волны, джозефсоновские контакты, резонансы, скивд.

## 1. Введение

В настоящее время сверхпроводящие резонаторы активно используются в современной криоэлектронике [1]. Вследствие высокой добротности они также находят широкое применение в качестве детекторов электромагнитного излучения. Отметим в частности, успехи применения резонаторов при детектировании электромагнитного излучения в широком диапазоне частот [2,3], контроле как единичных кубитов [4–6], так и систем на их основе [7,8], а также в изучении свойств материалов при низких температурах [9]. Использование нелинейности, которую естественным образом представляет введенный в схему джозефсонов-

ский контакт, позволяет создавать параметрические усилители слабых сигналов [10,11], перестраиваемые магнитным полем резонаторы [12] и, следовательно, генерировать сжатые состояния для квантовых измерений [13]. Перспективным представляется разработка архитектуры, в которой предусмотрено сопряжение различных резонансных контуров, например джозефсоновских цепей (петель) с центральной сверхпроводящей жилой. На основе таких линий, содержащих динамические сосредоточенные элементы, можно осуществить проектирование резонаторов с наперед заданной функцией отклика, что представляется важным для создания сверхпроводящих метаматериалов с требуемыми дисперсионными характеристиками [14–17].

В данной работе речь пойдет о методах возбуждения электромагнитными импульсами СВЧ диапазона резонансных мод в джозефсоновских петлях (микрорезонаторах), встроенных в копланарные линии. Такие сосредоточенные нелинейные резонаторы, частотные характеристики которых легко перестраивать магнитным полем, могут качественно менять выходные характеристики линии. Отметим, что электромагнитные импульсы в идеальной линии достаточно просто описываются на языке телеграфных уравнений для тока и напряжения. При этом встроенные джозефсоновские петли действуют как сосредоточенные динамические преобразователи электромагнитного поля. Покажем, как в общем случае найти электромагнитное поле, переизлучаемое резонатором. Предполагается, что электромагнитное поле и джозефсоновские осцилляторы (петли со слабыми связями) можно трактовать в квазиклассическом приближении. На основе сформулированной модели и уравнений будут исследованы выходные характеристики линии. Показано, что встроенные резонаторы определяют полосы пропускания и поглощения волноводной линии, а взаимодействие резонаторов приводит к их перекрытию. Обсуждаются перспективы использования разрабатываемой архитектуры волноводных линий для управления кубитами и конструирования магнитометров с перестраиваемыми характеристиками.

## 2. Модель копланарной линии, сопряженной с джозефсоновскими осцилляторами

Изучим влияние джозефсоновских петель, инкорпорированных в линию и соединенных со сверхпроводящей волноведущей полоской, на распространение волн в линии. Один из вариантов конструкции петли, в которую вставлены две слабые связи — двухконтактный скивид [18,19], — представлен на рис. 1(а). Технология изготовления сверхпроводящих проволочек микронных размеров, например из алюминия, «разорванных» диэлектрическими прослойками (из диоксида алюминия), описана в работах [4,6,7].

Нас будет интересовать идеальный копланарный волновод, представляющий собой сверхпроводящую полосу, отделенную вакуумным промежутком от полубесконечных сверхпроводящих пластин (см. рис. 1(а)). Для СВЧ диапазона такой волновод можно трактовать на основе эквивалентной схемы — двухпроводной линии, а электромагнитные импульсы описывать путем введения локального тока в одном из проводов и локального напряжения между ними. Предполагается, что возбуждение волн в линии осуществляется «запитывающим» СВЧ генератором, а детектирование — приемником, расположенным на конце линии.

Будем характеризовать нагрузку на линии выходным импедансом  $Z$  (см. рис. 1 (б)). Плотность тока

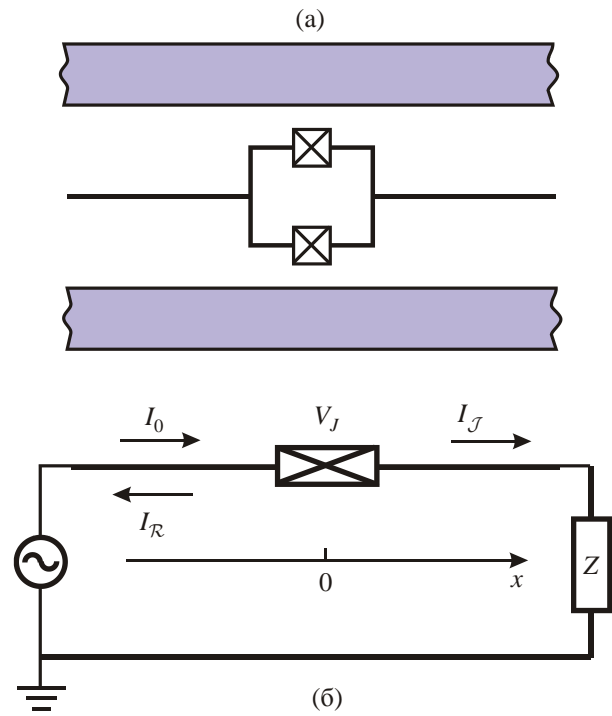


Рис. 1. Схема сопряжения джозефсоновской петли с двумя переходами с центральной жилой волновода (а); эквивалентная схема линии с встроенным переходом (б).

$I(x, t)$  и локальный потенциал  $V(x, t)$  в линии подчиняются телеграфным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -\frac{L_l}{c^2} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C_l \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $L_l$  и  $C_l$  — погонные индуктивность и емкость волноводной линии соответственно. В однородной линии решение уравнений (1) представляет собой бегущие волны с амплитудами  $V_m$  и  $I_m$ :

$$\begin{cases} V(x, t) \\ I(x, t) \end{cases} = \begin{cases} V_m \\ I_m \end{cases} \exp(i(\omega t - kx)), \quad (2)$$

распространяющиеся вдоль линии со скоростью  $v = c/\sqrt{L_l C_l}$  (частота  $\omega$  и волновой вектор  $k$  связаны дисперсионным соотношением  $\omega = vk$ ).

Поскольку длина волны СВЧ поля много больше размера петли, то ее влияние эквивалентно локальному скачку потенциала (см. рис. 1(б)), обусловленного эффектом Джозефсона [14,15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -\frac{L_l}{c^2} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - V_J(t)\delta(x), \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C_l \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}, \\ V_J(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\varphi(t)$  — скачок фазы параметра порядка берегов джозефсоновского перехода.

Решение уравнений (3) позволяет исследовать эффекты, обусловленные влиянием джозефсоновских петель сложной конструкции на прохождение и отражение волн, возбуждаемых в волноведущей линии.

Пусть источник (генератор) импульсов находится в области  $x \rightarrow -\infty$  и посылает на переход протяженные импульсы. Справа и слева от сосредоточенного элемента ( $x = 0$ ) поля описываются уравнениями (1), решения которых представляют собой импульсы произвольной формы, распространяющиеся со скоростью  $v$ :

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V_0(t - x/v) + V_{\mathcal{R}}(t + x/v), \\ I(x, t) &= I_0(t - x/v) + I_{\mathcal{R}}(t + x/v). \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку функции, определяемые (4), представляют собой решения (3), то выражения для тока и напряжения связаны соотношением

$$V_0(t - x/v) - V_{\mathcal{R}}(t + x/v) = Z_l [I_0(t - x/v) + I_{\mathcal{R}}(t + x/v)], \quad (5)$$

где  $Z_l = (1/c)(\sqrt{L_l/C_l})$  — погонный импеданс линии. В области  $x > 0$  существуют только прошедшие импульсы для напряжения и тока

$$V(x, t) = V_{\mathcal{J}}(t - x/v), \quad I(x, t) = I_{\mathcal{J}}(t - x/v), \quad (6)$$

связанные соотношением

$$V_{\mathcal{J}}(t - x/v) = Z_l I_{\mathcal{J}}(t - x/v). \quad (7)$$

Граничные условия (при  $x = 0$ ) приводят к выражениям

$$V_{\mathcal{J}}(t) = V_0(t) + V_{\mathcal{R}}(t) - V_J(t), \quad I_0(t) + I_{\mathcal{R}}(t) = I_{\mathcal{J}}(t). \quad (8)$$

Из уравнений (8) с учетом соотношений (5) и (7) следует

$$V_{\mathcal{R}}(t) = \frac{1}{2} V_J(t), \quad V_{\mathcal{J}}(t) = V_0(t) - \frac{1}{2} V_J(t). \quad (9)$$

Таким образом, мы получаем формальное выражение, позволяющее по напряжению на переходе определить амплитуды отраженного и прошедшего импульсов. Для фактического же отыскания полей нужно обратиться к уравнениям Джозефсона [18,19], которые описывают динамику фазы перехода  $\varphi(t)$ . Найденная функция  $\varphi(t)$  определит зависимость от времени падения напряжения  $V_J(t)$  на сосредоточенном переходе. Далее, используя (9), можно найти зависимости от времени выходных напряжений  $V_{\mathcal{R}}(t)$  и  $V_{\mathcal{J}}(t)$ . Рассматриваемая система представляет собой четырехполюсник, который можно описывать различными характеристиками: коэффициентом передачи, матрицей рассеяния, отношением мощностей вход-выход и т.д. Будем вычислять коэффициенты отражения и прохож-

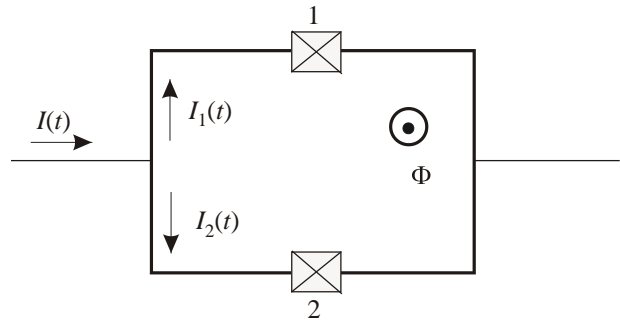


Рис. 2. Схематическое изображение двухконтактного сквида. Первый и второй джозефсоновские переходы обозначены цифрами 1 и 2 соответственно.

дения, определенные как отношения средних по периоду мощностей к средней мощности входного сигнала, выделяемых на эквивалентной нагрузке:

$$\mathcal{R} = \frac{\langle V_{\mathcal{R}}^2(t) \rangle}{\langle V_0^2(t) \rangle}, \quad \mathcal{J} = \frac{\langle V_{\mathcal{J}}^2(t) \rangle}{\langle V_0^2(t) \rangle}. \quad (10)$$

При этом предполагается, что импеданс нагрузки  $Z$  значительно превосходит импеданс микрополосковой линии со встроенными джозефсоновскими цепями, поэтому далее при вычислении коэффициентов прохождения и отражения нагрузку не рассматриваем. Отметим, что в рамках данной схемы можно также описывать и нелинейное преобразование импульсов на любой сосредоточенной джозефсоновской цепи.

В дальнейшем нам потребуются характерные значения погонного импеданса микрополосковой линии  $Z_l$ , изображенной на рис. 1. Для оценок  $Z_l$  используем приближенные значения для погонной индуктивности и емкости двухпроводной линии:

$$L_l = 4 \ln \frac{d}{a}, \quad C_l = \frac{1}{4 \ln(d/a)}, \quad (11)$$

справедливые при  $a \ll d$ , где  $a$  — радиус проводников, а  $d$  — расстояние между ними. Например, если  $d \sim 10$  мкм и  $a \sim 0,1$  мкм, получаем оценку  $Z_l \sim 10^4 - 10^5$  Ом/м.

### 3. Двухконтактный переход

Рассмотрим контур, содержащий два джозефсоновских перехода (сквид), причем каждый из них характеризуется критическим током  $I_{c,i}$ , емкостью  $C_i$  и сопротивлением  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ). Динамику перехода представляем в рамках резистивной модели, согласно которой переход описывается параллельно соединенной емкостью, джозефсоновским током и омическим сопротивлением [18,19]. Предполагается, что управление параметрами сквида осуществляется внешним магнитным полем, пронизывающим контур петли и создающим магнитный поток  $\Phi$  (рис. 2).

Полный ток перехода  $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$  складывается из парциальных токов ветвей

$$I_1(t) = \frac{\hbar}{2e} C_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_{C1} \sin \varphi_1, \quad (12)$$

$$I_2(t) = \frac{\hbar}{2e} C_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{\hbar}{2e} \frac{1}{R_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + I_{C2} \sin \varphi_2,$$

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — скачки фазы параметра порядка берегов первого и второго переходов — связаны соотношением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \equiv f, \quad (13)$$

где  $\Phi_0 = \pi\hbar/e$  — квант потока. Используя (8), (9) и выражение (13), а также учитывая определение  $V_J(t)$ , получаем

$$\frac{\hbar}{2e} C \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{\hbar}{2e} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2Z_l} \right) \frac{d\varphi_1}{dt} + I_{C1} \sin \varphi_1 + I_{C2} \sin(\varphi_1 - f) = \frac{1}{Z_l} V_0(t), \quad (14)$$

где  $C = C_1 + C_2$ ,  $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$ . Как видно, выражение  $2Z_l$  в левой части (14) играет роль импеданса связи джозефсоновской петли с волноводной линией.

Решение (14) и сопутствующие нелинейные эффекты будут проанализированы в следующем разделе. Здесь же рассмотрим линейный режим, который наблюдается, когда амплитуда тока в линии в области петли мала по сравнению с критическими токами переходов. Предположим, что в отсутствие тока переходы находятся в равновесии. При этом условие минимума потенциальной энергии сквида (эквивалентное равенству нулю «силы» в уравнении [14])

$$I_{C1} \sin \varphi_1^{(0)} + I_{C2} \sin(\varphi_1^{(0)} - f) = 0 \quad (15)$$

приводит к зависимости «захваченных» в минимум потенциала фаз от магнитного потока. В случае, когда падающий сигнал  $V_0(t - x/v)$  представляет собой радиоимпульс с несущей частотой  $\omega$  (ширина по частоте импульса  $\Delta\omega \ll \omega$ ), а амплитуда падающего импульса мала, можно рассмотреть малые колебания фаз вблизи положения равновесия. Представив фазу первого перехода в виде  $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \psi$ , из (14) получим линейное уравнение для малого отклонения:

$$\frac{\hbar}{2e} C \frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{\hbar}{2e} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2Z_l} \right) \frac{d\psi}{dt} + \frac{\hbar}{2e} C \omega_J^2(f) \psi = \frac{1}{Z_l} V_0(t), \quad (16)$$

где

$$\omega_J^2(f) = \omega_J^2 (1 + a^2 + 2a \cos f)^{1/2}, \quad \omega_J^2 = \frac{2eI_{C1}}{\hbar C}, \quad a = \frac{I_{C2}}{I_{C1}}. \quad (17)$$

Решение уравнения (16) сводится к

$$\psi(t) = \Psi_\omega^+ e^{+i\omega t} + \Psi_\omega^- e^{-i\omega t}, \quad (18)$$

$$\Psi_\omega^\pm = \frac{2eV_{0\omega}^\pm}{\hbar C Z_l D^\pm(\omega)}, \quad (19)$$

где  $D^\pm(\omega) = -\omega^2 \pm i\gamma\omega + \omega_J^2(f)$ ,  $\gamma = \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2Z_l} \right)$ .

Решения телеграфных уравнений для монохроматических волн при  $x < 0$  записываются в виде

$$V(x, t) = V_0 \exp[i(\omega t - kx)] + V_R \exp[i(\omega t + kx)] + \text{к.с.},$$

$$I(x, t) = Z^{-1}_l \{ V_0 \exp[i(\omega t - kx)] - V_R \exp[i(\omega t + kx)] + \text{к.с.} \}, \quad (20)$$

а при  $x > 0$

$$V(x, t) = V_J \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к.с.},$$

$$I(x, t) = Z^{-1}_l V_J \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к.с.} \quad (21)$$

Поскольку падение напряжения на петле связано с фазой соотношением (3), то

$$V_{J\omega}^\pm = \frac{\pm i\omega V_{0\omega}^\pm}{C Z_l D^\pm(\omega)}. \quad (22)$$

Из (9) с учетом (17) находим

$$V_R^\pm = \pm \frac{i\omega V_0}{2Z_l C D^\pm(\omega)}, \quad V_J^\pm = V_0 \left( 1 \pm \frac{i\omega}{2Z_l C D^\pm(\omega)} \right),$$

а коэффициенты отражения и прохождения определяются выражениями

$$\mathcal{R}(\omega, \Phi) = \left( \frac{1}{2Z_l C} \right)^2 \frac{\omega^2}{[\omega_J^2(f) - \omega^2]^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (23)$$

$$\mathcal{J}(\omega, \Phi) = \frac{[\omega_J^2(f) - \omega^2]^2 + \omega^2 \left( \gamma - \frac{1}{2Z_l C} \right)^2}{[\omega_J^2(f) - \omega^2]^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (24)$$

Если  $\gamma \ll \omega_J$ , то при развертке по частоте коэффициент отражения имеет вблизи резонансной частоты  $\omega_J(f)$  узкий «лоренцевский» пик, ширина которого определяется параметром  $\sim \gamma$ . Соответственно, на зависимости коэффициента прохождения при той же частоте имеется «провал». Перепишем выражение для  $\mathcal{J}(\omega, \Phi)$  несколько иначе. Пусть рабочая частота линии фиксирована. Введем добротности перехода  $Q_J = RC\omega$  и линии  $Q_W = 2Z_l C\omega$ . Тогда в минимуме ( $\omega_J(f) = \omega$ ) из (24) вытекает равенство

$$\mathcal{J}_{\min} = \frac{Q_J^2}{(Q_J + Q_W)^2}, \quad (25)$$

отражающее тот факт, что глубокий минимум достигается при  $Q_W \gg Q_J$ .

Из (17) и (24) следует, что коэффициент прохождения  $\mathcal{J}(\omega, \Phi)$  периодически зависит от магнитного потока  $\Phi$  (при фиксированной частоте импульса  $\omega$ ), понижающего петлю. На рис. 3 показаны зависимости коэффициента прохождения от магнитного потока. На графике видны характерные провалы (обозначенные черными стрелками), обусловленные тем, что при данных значениях магнитного потока собственная частота петли  $\omega_J(f)$  совпадает с частотой импульса  $\omega$  (см. (17) и (24)). В случае симметричной петли частота  $\omega_J(f)$  изменяется от  $\omega_{J,\min} = 0$  до  $\omega_{J,\max} = \sqrt{2}\omega_J$ . Положение провалов полностью определяется соотношением между  $\omega$  и  $\omega_{J,\max}$ . С ростом отношения  $\omega/\omega_{J,\max}$  провалы расходятся, а между ними появляется пик пропускания (отмечен пунктирной стрелкой на рис. 3). Наконец, если  $\omega > \omega_{J,\max}$ , то провалы в коэффициенте прохождения исчезают.

На рис. 4 представлены зависимости коэффициента прохождения от магнитного потока через петлю для случая несимметричной петли ( $I_{C1}/I_{C2} = 2$ ), построенные при тех же параметрах системы, что и на рис. 3. Основное отличие здесь связано с тем, что для несимметричной петли собственная частота  $\omega_J(f)$  изменяется в интервале от  $\sqrt{2e|I_{C1} - I_{C2}|/\hbar C}$  до  $\sqrt{2e|I_{C1} + I_{C2}|/\hbar C}$ . Следовательно, если частота волны  $\omega$  меньше, чем  $\sqrt{2e|I_{C1} - I_{C2}|/\hbar C}$ , то провалы менее выражены либо совсем исчезают, поскольку во всем диапазоне изменения магнитного потока  $\omega_J(f)$  не пересекается с частотой волны  $\omega$  (рис. 4, пунктирная линия).

Поскольку для джозефсоновского перехода всегда выполнено неравенство  $1/R \ll 1/2Z_I$ , то при резонансе коэффициент прохождения близок к нулю, а собственная частота структуры суть перестраиваемый при помощи внешнего магнитного поля параметр. Таким об-

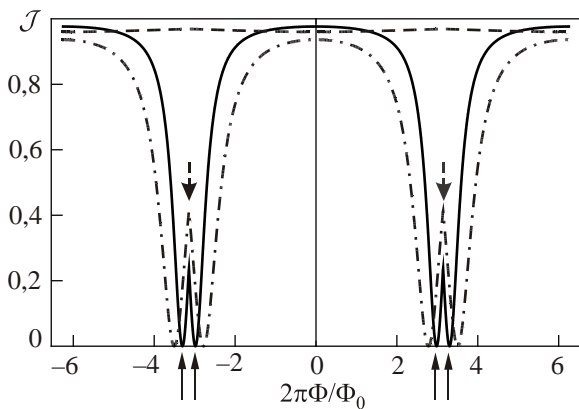


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения от потока через петлю. Вычисления проведены для случая идентичных джозефсоновских переходов и для параметров:  $I_{C1} = I_{C2} = 5 \cdot 10^{-7}$  А,  $C = 10^{-12}$  Ф,  $R = 10^4$  Ом,  $Z_I = 18$  Ом,  $\omega_{J,\max} = 5,5 \cdot 10^{10}$  с $^{-1}$ ,  $\omega = 0,28 \omega_{J,\max}$  — сплошная линия;  $\omega = 0,42 \omega_{J,\max}$  — штрихпунктирная линия;  $\omega = 2,83 \omega_{J,\max}$  — пунктирная линия.

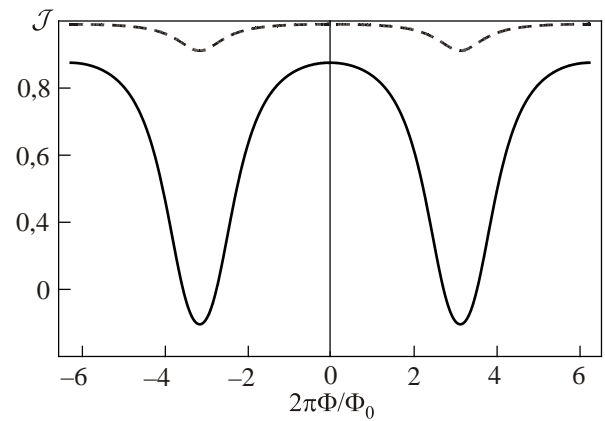


Рис. 4. Зависимость коэффициента прохождения от магнитного потока для несимметричной петли. Вычисления проведены для следующих параметров:  $I_{C1} = 2I_{C2} = 5 \cdot 10^{-7}$  А,  $C = 10^{-12}$  Ф,  $R = 10^4$  Ом,  $Z_I = 18$  Ом,  $\omega_{J,\max} = 5,85 \cdot 10^{10}$  с $^{-1}$ ,  $\omega = 0,4 \omega_{J,\max}$  — сплошная линия;  $\omega = 0,13 \omega_{J,\max}$  — пунктирная линия.

разом, рассмотренная структура может служить управляемым магнитным полем фильтром, работающим в микроволновой области спектра.

#### 4. Нелинейный режим возбуждения и бистабильность

Рассмотрим случай слабой нелинейности (условия на параметры системы будут приведены ниже), когда можно ограничиться учетом слагаемых  $\sim \psi^3$  в уравнении (14):

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \gamma \frac{d\psi}{dt} + \omega_J^2(f)\psi - \beta(f)\psi^3 = \frac{2e}{\hbar CZ_I} V_0(t), \quad (26)$$

где

$$\beta(f) = \frac{\omega_J^2}{6} (1 + a^2 + 2a \cos f)^{1/2}.$$

Отметим, что параметр нелинейности осциллятора зависит от магнитного потока и отношения критических токов. Из (26) видно, что нелинейная поправка мала, если характерная амплитуда потенциала  $V_0$  подчиняется неравенству:  $V_0 \ll \hbar CZ_I \omega_J^2 / 2e$ . Однако в условиях резонанса влияние нелинейности может стать заметным.

Вблизи резонанса, когда частота внешнего импульса  $\omega$  близка к частоте осциллятора  $\omega_J(f)$ , для отыскания решения (26) можно воспользоваться методом Боголюбова–Митропольского [20]. По аналогии с (18) решение (26) ищем в виде

$$\psi(t) = \psi^+(t)e^{+i\omega t} + \psi^-(t)e^{-i\omega t}, \quad (27)$$

где  $\psi^+(t)$  и  $\psi^-(t)$  — две медленно меняющиеся функции, подчиняющиеся дополнительному условию:

$$\frac{d\psi^+(t)}{dt} e^{+i\omega t} + \frac{d\psi^-(t)}{dt} e^{-i\omega t} = 0. \quad (28)$$

Здесь имеется в виду, что масштаб изменения во времени медленных амплитуд определяется обратной величиной частотной «расстройки»:  $1/(\delta\omega_J(f))$ , где  $\delta = (\omega - \omega_J(f))/\omega_J(f)$ . Подставив (27) и (28) в (26), произведя усреднение по быстрым осцилляциям, находим

$$\begin{cases} \frac{d\psi^+}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\psi^+ - i\delta\psi^+ - \frac{3i\beta(f)}{2\omega_J(f)}\psi^{+2}\psi^- - \frac{ieV_0}{2\hbar CZ_l}, \\ \frac{d\psi^-}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\psi^- + i\delta\psi^- + \frac{3i\beta(f)}{2\omega_J(f)}\psi^+\psi^{-2} + \frac{ieV_0}{2\hbar CZ_l}, \end{cases} \quad (29)$$

где мы полагали  $V_0(t) = V_0 \cos(\omega t)$ . Прошедший импульс будет определяться выражением

$$V_T(t) = \left[ \frac{V_0}{2} - i \frac{\hbar\omega}{4e} \psi^+(t) \right] e^{+i\omega t} + \left[ \frac{V_0}{2} + i \frac{\hbar\omega}{4e} \psi^-(t) \right] e^{-i\omega t}. \quad (30)$$

Уравнение для медленных амплитуд при  $\gamma^{-1} \ll t$  выходит на стационарные значения, которые и будут определять коэффициент отражения. Уравнение для амплитуды установившихся колебаний  $A = 2|\psi^+|$  находится из (29):

$$A^2 \left[ \frac{\gamma^2}{4} + \left( \delta + \frac{3\beta(f)}{6\omega_J(f)} A^2 \right)^2 \right] = \left( \frac{eV_0}{2\hbar CZ_l} \right)^2. \quad (31)$$

Исходя из (30), после усреднения по высокочастотным осцилляциям можно вычислить коэффициент прохождения

$$\mathcal{J}(\omega, \Phi) = \frac{\left[ \delta + \frac{3\beta(f)}{8\omega_J(f)} A^2 \right]^2 + \left( \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4CZ_l} \right)^2}{\frac{\gamma^2}{4} + \left[ \delta + \frac{3\beta(f)}{8\omega_J(f)} A^2 \right]^2}. \quad (32)$$

При малой амплитуде накачки это выражение (в резонансной области) переходит в (24). Из (31) видно, что при увеличении амплитуды импульса накачки растет амплитуда колебаний джозефсоновского осциллятора. Как хорошо известно, существует такое  $V_{0cr}$ , когда возникает неустойчивость колебаний и осциллятор имеет бистабильное поведение. Поскольку кривая (31) универсальна, то, действуя согласно [20], найдем

$$V_{0cr} = \frac{16\hbar CZ_l \gamma^2}{3\sqrt{3}e\omega_J} (1 + a^2 + 2a \cos f)^{-1/4}. \quad (33)$$

Отметим, что в рассматриваемом случае значение  $V_{0cr}$  зависит от магнитного потока.

Бистабильное поведение в данной системе означает следующее. Если амплитуда подаваемого на переход импульса меняется со стороны напряжения, меньшего критического (33), то, согласно (31), амплитуда колебаний будет соответствовать значению верхней ветви  $A_u$  [20], а провал будет расположен при значении отстройки  $\delta = -[3\beta(f)/8\omega_J(f)]A_u^2$ . При увеличении ам-

плитуды произойдет переброс амплитуды колебаний на нижнюю ветвь  $A_d$ , следовательно, точка минимума провала примет значение  $\delta = -[3\beta(f)/8\omega_J(f)]A_d^2$ . Как следует из выражения (32), амплитуда прохождения однозначна, несмотря на неоднозначный характер амплитуды поля. Известно, что при прохождении поля через нелинейную пластину с «керровской» нелинейностью (нелинейный резонатор Фабри–Перо) амплитуда прохождения как функция поля демонстрирует гистерезис (см. [21]). При этом основная причина «опрокидывания» коэффициента прохождения связана с модуляцией фазы волн внутри пластины. Различие объясняется тем, что в рассматриваемой выше ситуации размер рассеивателя мал по сравнению с длиной волны, поэтому изменение фазы на его длине пренебрежимо мало.

Исследуем численно вынужденные колебания в системе, вызываемые импульсом тока  $I_0(t)$  со сравнительно большой амплитудой. Вводя безразмерное время  $\tau = \omega_J t$ , запишем уравнение (14) в виде

$$\frac{d^2\phi_1}{d\tau^2} + \frac{\gamma}{\omega_J} \frac{d\phi_1}{d\tau} + [\sin \phi_1 + a \sin(\phi_1 - f)] = \frac{I_0(\tau)}{I_{C1}}. \quad (34)$$

Пусть импульс тока описывается широким гауссовским пакетом с несущей частотой  $\omega$ :

$$I_0(\tau) = I_0 \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2 \tau^2}{2\omega_J^2}\right) \sin\left(\frac{\omega}{\omega_J} \tau\right). \quad (35)$$

Из (34) видно, что амплитуда изменения  $\phi$  зависит от отношения  $I_0/I_{C1}$ . При малых значениях последней справедливо линейное приближение, и мы приходим к результатам разд. 3 (рис. 5, сплошная линия). С увеличе-

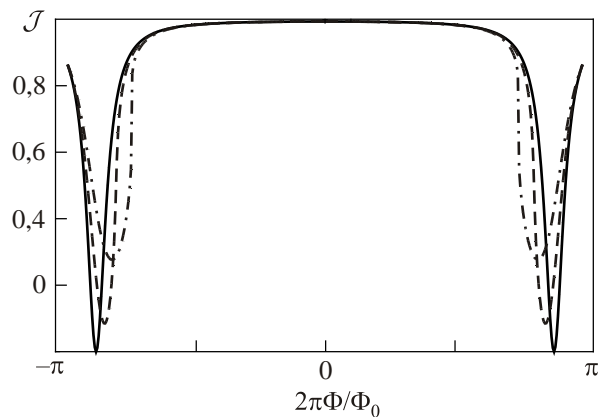


Рис. 5. Зависимость коэффициента прохождения от значения потока через петлю. Вычисления проведены для случая идентичных джозефсоновских переходов,  $I_{C1} = I_{C2} = 5 \cdot 10^{-7}$  А,  $C = 10^{-12}$  Ф,  $R = 10^4$  Ом,  $Z_l = 57$  Ом,  $\omega_J = 5,5 \cdot 10^{10}$  с $^{-1}$ ,  $\omega = 0,6 \omega_J$ ,  $I_0/I_{C1} = 0,25$  — пунктирная линия,  $I_0/I_{C1} = 0,4$  — штрихпунктирная линия. Сплошная линия соответствует линейному приближению и построена для указанных параметров согласно (24).

нием  $I_0/I_{C1}$  необходимо учитывать нелинейные эффекты. На рис. 5 представлено бистабильное поведение зависимости коэффициента прохождения (на частоте  $\omega$ ) от магнитного потока через петлю при больших значениях отношения  $I_0/I_{C1}$  (штрихпунктирная линия).

### 5. Мультирезонансные джозефсоновские цепи

Чтобы увеличить число полос отражения волнующей структуры, усложним микрорезонатор. Понятно, что каждый дополнительный джозефсоновский переход, встроенный в петлю с простой топологией, может внести новую колебательную моду. Усложнение топологии системы приведет к дроблению потока, пронизывающего соответствующие площадки, следовательно, к более сложной зависимости собственных частот от магнитного потока. Действуя по данной схеме, можно получить необходимое число линий отражения.

$$\begin{cases} C_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + C_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2Z_l} \right) \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{2eI_{C1}}{\hbar} \sin \varphi_1 + \frac{2eI_{C2}}{\hbar} \sin \varphi_2 = \frac{2eV_0(t)}{\hbar Z_l}, \\ (C_1 + C_3) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - C_3 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{1}{R_3} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{2eI_{C1}}{\hbar} \sin \varphi_1 - \frac{2eI_{C3}}{\hbar} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + f) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Условия минимума потенциальной энергии переходов сводятся к уравнениям:

$$\begin{cases} I_{C1} \sin(\varphi_1^{(0)}) + I_{C2} \sin(\varphi_2^{(0)}) = 0, \\ I_{C2} \sin(\varphi_2^{(0)}) + I_{C3} \sin(\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)} + f) = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Исследуем решение системы (38) в линейном приближении. Полагая  $\varphi_1 = \varphi_1^{(0)} + \psi_1$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2^{(0)} + \psi_2$ , где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — малые отклонения фаз от положений равновесия, нетрудно записать для них линеаризованные уравнения. Решение полученных уравнений находится путем фурье-преобразования. Фурье-компонента падения  $V_{J,\omega}^\pm$  напряжения на петле на частоте волны  $\omega$  равна

$$V_{J,\omega}^\pm = \frac{\pm i\omega V_{0\omega}^\pm}{Z_l} \frac{C_1 D_1^\pm + C_3 D_3^\pm}{C_1 C_3 D_1^\pm D_3^\pm + C_2 \tilde{D}_2^\pm (C_1 D_1^\pm + C_3 D_3^\pm)}, \quad (40)$$

$$D_i^\pm = \omega_i^2 - \omega^2 \pm i\gamma_i\omega, \quad \tilde{D}_i^\pm = \omega_i^2 - \omega^2 \pm i\tilde{\gamma}_i\omega,$$

$$\omega_1^2 = \frac{2eI_{C1} \cos(\varphi_1^{(0)})}{\hbar C_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{2eI_{C2} \cos(\varphi_2^{(0)})}{\hbar C_2},$$

$$\omega_3^2 = \frac{2eI_{C3} \cos(\varphi_2^{(0)} - \varphi_1^{(0)} + f)}{\hbar C_3},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{C_i R_i}, \quad \tilde{\gamma}_i = \gamma_i + \frac{1}{2C_i Z_l}.$$

Собственные частоты системы определяются нулями знаменателя (40). При этих частотах  $V_{J,\omega}^\pm$  достигает своих максимальных значений, и в соответствии с (22)

### 5.1. Трехконтактный скивид

Сначала рассмотрим петлю, в которой в одно из плеч введен дополнительный джозефсоновский переход (см. рис. 6 (а)). Имеются следующие соотношения для токов и напряжений:

$$I_1 = I_3, \quad I = I_1 + I_2, \quad V_1 + V_3 = V_2, \quad \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_2}{dt}, \quad (36)$$

а также соотношение для фаз:

$$\varphi_3 + \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = f. \quad (37)$$

Учет граничных условий и указанных соотношений позволяет написать уравнения для независимых переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

будут наблюдаться два пика отражения. Так, при  $I_{C1} = I_{C2} = 2I_{C3} = I_C$  и  $C_1 = C_2$  собственные частоты

$$\begin{aligned} \omega_{e1} &= \sqrt{\frac{2eI_C |\cos(\varphi_1^{(0)})|}{\hbar C_1}}, \\ \omega_{e2} &= \sqrt{\frac{2eI_C |\cos(\varphi_1^{(0)}) + \cos(f - 2\varphi_1^{(0)})|}{2\hbar C_1}}, \end{aligned} \quad (41)$$

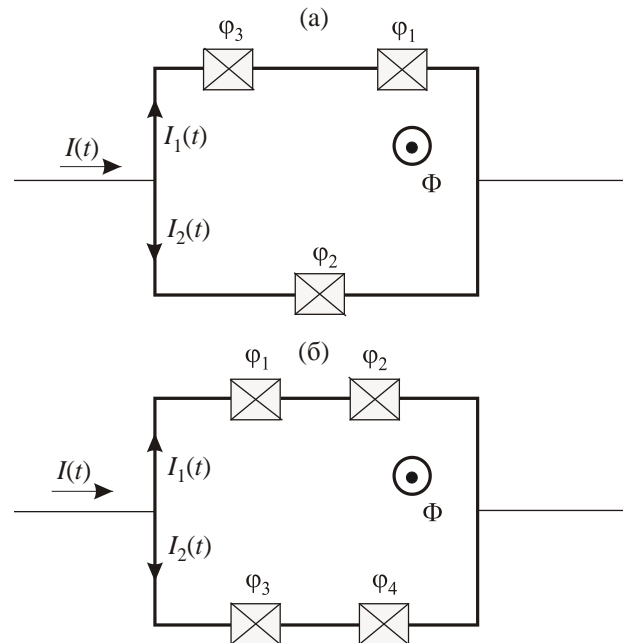


Рис. 6. Петля с тремя (а) и четырьмя (б) джозефсоновскими переходами.

где  $\varphi_1^{(0)}$  определяется из (39) и является функцией магнитного потока через петлю  $f$ . Таким образом, как положение самих резонансов, так и расстояние между ними, зависят от величины магнитного потока  $\Phi$ .

Слабонелинейный режим в системе связанных уравнений может быть описан по схеме, изложенной в разд. 4. Пусть найдены две собственные частоты связанной линейной системы в пренебрежении диссипацией. Учет диссипации приведет к уширению пиков пропускания и отражения. Если расстояние между пиками велико по сравнению с их ширинами, то при небольшой отстройке частоты поля от собственной моды амплитуды

да колебаний подчиняется уравнению типа (29). Влияние второго нормального колебания учитывается по теории возмущений [20]. Если резонансы сильно перекрываются, то движение такой системы носит сложный характер и требует особого рассмотрения.

### 5.2. Четырехконтактный сквид

Петля, изображенная на рис 6(б), может быть описана тремя независимыми переменными, в качестве которых выберем фазы на переходах  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ :

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + C_3 \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2Z_l} \right) \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{1}{2Z_l} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{1}{R_3} \frac{d\varphi_3}{dt} + \frac{2eI_{C1}}{\hbar} \sin \varphi_1 + \frac{2eI_{C3}}{\hbar} \sin \varphi_3 &= \frac{2eV_0(t)}{\hbar Z_l}, \\ C_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - C_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{1}{R_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{2eI_{C1}}{\hbar} \sin \varphi_1 - \frac{2eI_2}{\hbar} \sin \varphi_2 &= 0, \\ C_4 \left( \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} \right) - (C_3 + C_4) \frac{d^2 \varphi_3}{dt^2} + \frac{1}{R_4} \left( \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} \right) - \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \frac{d\varphi_3}{dt} - \\ &\quad - \frac{2eI_{C3}}{\hbar} \sin \varphi_3 + \frac{2eI_{C4}}{\hbar} \sin (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - f) = 0. \end{aligned} \right. \quad (42)$$

Фазы, определяющие минимум потенциальной энергии, определяются из уравнений:

$$I_{C1} \sin(\varphi_1^{(0)}) = I_{C2} \sin(\varphi_2^{(0)}) = -I_{C3} \sin(\varphi_3^{(0)}) = -I_{C4} \sin(\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)} - f).$$

Линеаризуя (42) вблизи положений равновесия фаз, нетрудно решить полученную систему уравнений и найти фурье-компоненту потенциала на джозефсоновском переходе:

$$V_{J,\omega}^{\pm} = \frac{\pm i \omega V_{0\omega}^{\pm}}{Z_l} \frac{(C_1 D_1^{\pm} + C_2 D_2^{\pm})(C_3 D_3^{\pm} + C_4 D_4^{\pm})}{C_1 [C_2 \tilde{D}_1^{\pm} D_2^{\pm} + (\pm i \omega / 2Z_l) D_1^{\pm}] (C_3 D_3^{\pm} + C_4 D_4^{\pm}) + C_3 C_4 D_3^{\pm} D_4^{\pm} (C_1 D_1^{\pm} + C_2 D_2^{\pm})}, \quad (43)$$

$$\omega_1^2 = \frac{2eI_{C1} \cos(\varphi_1^{(0)})}{\hbar C_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{2eI_{C2} \cos(\varphi_2^{(0)})}{\hbar C_2}, \quad \omega_3^2 = \frac{2eI_{C3} \cos(\varphi_3^{(0)})}{\hbar C_3}, \quad \omega_4^2 = \frac{2eI_{C4} \cos(\varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)} - f)}{\hbar C_4}.$$

Если петля имеет различные критические токи, то существуют три собственные частоты колебания фаз. В частном случае, когда переходы 1, 2, 3 идентичны, а критический ток четвертого перехода  $I_{C4} = I_{C1}/2$ , петля характеризуется двумя собственными частотами:

$$\omega_{e1} = \sqrt{\frac{2eI_C |\cos(\varphi_1^{(0)})|}{\hbar C_1}},$$

$$\omega_{e2} = \sqrt{\frac{eI_C |3 \cos(\varphi_1^{(0)} - f) + 2 \cos(\varphi_1^{(0)})|}{\hbar (3C_4 + C_1)}}, \quad (44)$$

поэтому она подобна петле с тремя переходами.

Проанализируем интервал изменения собственных частот  $\omega_{e1}$ , и  $\omega_{e2}$ . На рис. 7 приведены границы изменения  $\omega_{e1}$  и  $\omega_{e2}$  для различных значений отношения  $I_{C4}/I_{C1}$ .

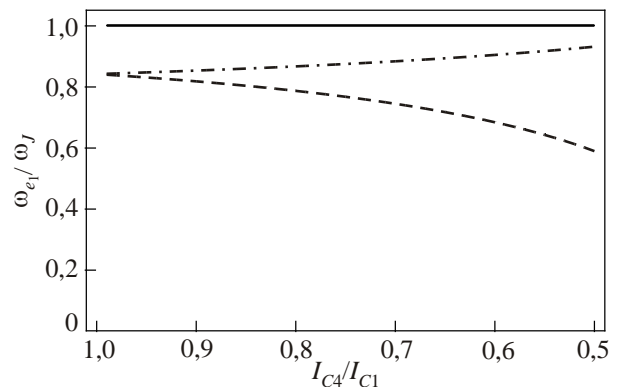


Рис. 7. Границы изменения собственных частот петли. Диапазон изменения  $\omega_{e1}$  ограничен штрихпунктирной и сплошной кривыми. Диапазон изменения  $\omega_{e2}$  ограничен пунктирной и сплошной кривыми.



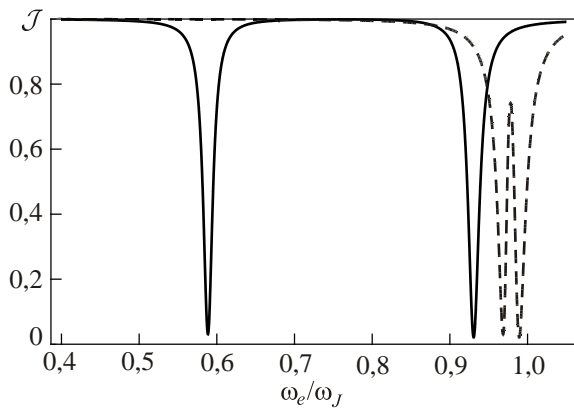


Рис. 8. Зависимость коэффициента прохождения от частоты волны для случая петли с четырьмя переходами. Вычисления проведены для следующих параметров:  $I_{C1} = I_{C2} = I_{C3} = 5 \cdot 10^{-7}$  А,  $C_{1,2,3} = 10^{-12}$  Ф,  $R_{1,2,3,4} = 10^4$  Ом,  $Z_l = 5,4 \cdot 10^2$  Ом,  $\omega_J = 5,5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $I_{C4} = I_{C1}/2$ ;  $f = -\pi$  — сплошная линия;  $f = -\pi/3$  — пунктирная линия.

На рис. 8 изображена зависимость коэффициента прохождения от частоты волны для случая  $I_{C4} = I_{C1}/2$  при двух фиксированных значениях магнитного потока через петлю. При  $f = -\pi$  собственные частоты  $\omega_{e1}$  и  $\omega_{e2}$  достигают своих минимальных значений, при этом расстояние между двумя резонансами максимально (сплошная линия). Видно, что значения собственных частот соответствуют точкам на пунктирной и штрихпунктирной линиях при  $I_{C4} = I_{C1}/2$  на рис. 7. При дальнейшем увеличении  $f$  собственные частоты возрастают и стремятся к своему максимальному значению  $\omega_J$ , расстояние между резонансами при этом убывает (пунктирная линия). При  $f = 0$  резонансы сливаются.

Когда частота сигнала меньше минимальных значений собственных частот петли (лежит ниже пунктирной линии на рис. 7), то резонансное отражение, а следовательно, и провалы в коэффициенте прохождения не наблюдаются. На рис. 9 приведена зависимость коэффициента прохождения от величины магнитного потока через петлю. Когда критические токи переходов 4 и 1 существенно отличаются ( $I_{C4} = I_{C1}/2$ ), могут наблюдаться два провала в зависимости коэффициента прохождения от магнитного потока (рис. 9, сплошная линия), соответствующие двум собственным частотам (44). Однако, если частота волны  $\omega$  лежит вне интервала изменения собственной частоты  $\omega_{e1}$ , т.е. находится между пунктирной и штрихпунктирной кривыми на рис. 7, то наблюдается лишь один провал. При этом каждый минимум зависимости  $\mathcal{J}(\Phi)$  означает, что при данном значении магнитного потока  $\Phi$  через петлю одна из собственных частот петли совпадает с частотой волны.

Когда все четыре перехода идентичны  $I_{C4} = I_{C1}$ , существует вырождение  $\omega_{e1} = \omega_{e2}$  (рис. 7), согласно

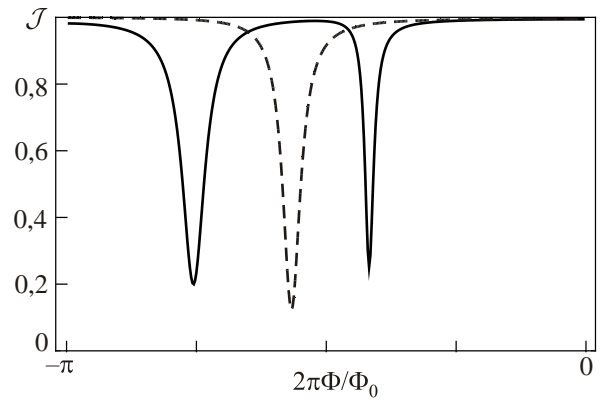


Рис. 9. Зависимость коэффициента прохождения от значения потока через петлю для случая петли с четырьмя переходами. Вычисления проведены для следующих параметров:  $I_{C1} = I_{C2} = I_{C3} = 5 \cdot 10^{-7}$  А,  $C_{1,2,3} = 10^{-12}$  Ф,  $R_{1,2,3,4} = 10^4$  Ом,  $Z_l = 5,4 \cdot 10^2$  Ом,  $\omega_J = 5,5 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 0,95 \omega_J$ ;  $I_{C4} = I_{C1}/2$ ,  $C_4 = C_1/2$  — сплошная линия;  $I_{C4} = I_{C1}$ ,  $C_4 = C_1$  — пунктирная линия.

(43), так как фазы всех четырех переходов равны, и возможно наблюдение провала в зависимости  $\mathcal{J}(\Phi)$  при условии, что частота волны лежит в интервале  $(0, \omega_J)$  (рис. 9, пунктирная линия).

Разобранные примеры показывают, что магнитное поле изменяет собственные частоты цепи и позволяет управлять коэффициентом пропускания волноводной структуры. Кроме того, положение собственных частот и расстояние между ними существенно зависят от отношения критических токов переходов, входящих в петлю. Например, невозможно достичь резонансного отражения для волны частотой  $\omega$  в структуре с критическими токами  $I_{C1}$  и  $I_{C4}$ , для которых точка  $(I_{C4}/I_{C1}, \omega)$  лежит ниже пунктирной кривой на рис. 7. В то же время для всех точек, лежащих между штрихпунктирной и сплошной кривыми, существуют два пика резонансного отражения, которые можно наблюдать, варьируя магнитное поле.

## 6. Заключение

Показано, что электромагнитные импульсы СВЧ диапазона могут быть использованы для возбуждения локальных резонансных мод в джозефсоновских петлях (микрорезонаторах), встроенных в копланарные линии. Локальные моды проявляются в зависимостях коэффициентов отражения и прохождения электромагнитной волны от величины магнитного потока, когда имеются характерные провалы, обусловленные резонансным взаимодействием электромагнитного поля с джозефсоновскими осцилляторами. При этом изменение магнитного потока через петлю приводит к изменению собственных частот осциллятора. При совпадении одной из собственных частот осциллятора с частотой волны происходит резонансное отражение и прохождение падающих импульсов. Глубина провалов определяется соотноше-

нием импедансов резонатора и волноводной линии. Наличие нескольких различных джозефсоновских переходов в петле ведет к появлению серии пиков отражения, положение и расстояние между которыми зависят от соотношений параметров джозефсоновских переходов (критических токов и емкостей). Установлены диапазоны изменения собственных частот при варьировании внешнего магнитного поля для различных значений отношения критических токов. Проанализировано влияние нелинейности джозефсоновских осцилляторов на характер пропускания линии. Поскольку собственная частота — перестраиваемый при помощи внешнего магнитного поля параметр, то рассмотренная структура может служить фильтром, управляемым магнитным полем, в микроволновой области спектра. Если зафиксировать частоту в области провала прозрачности, то вследствие большой крутизны характеристики прохождения и зависимости частоты перехода от магнитного поля можно измерить изменение поля, пронизывающее петлю. Отметим, что резонансное отражение электромагнитных волн в микрополосковой линии, содержащей последовательность идентичных петель с двумя джозефсоновскими переходами, экспериментально наблюдалось в работе [22]. При этом резонансная частота являлась периодической функцией магнитного потока, пронизывающего петлю.

Как уже отмечалось во Введении, в данной работе речь шла о классическом режиме функционирования связанных систем: электромагнитное поле предполагалось когерентным, а встроенные джозефсоновские переходы считались возбужденными на высоколежащие уровни. Интересные эффекты будут наблюдаться, когда для переходов выполнены условия квантования, а частота возбуждающего когерентного поля сравнивается с частотой перехода между низколежащими уровнями. При выполнении двухуровневого приближения одно-, двухпетлевые системы будут играть роль кубитов, а волноводная линия будет обеспечивать связь кубитов с управляющим полем. Различные конфигурации петель, «прикрепленных» к волноводной линии, изучались в работах [23–26]. Рассмотренная в работе схема управления межпетлевым взаимодействием позволит наблюдать многофотонные переходы в зависимости от константы связи между кубитами [27]. В том случае, когда и поле, и кубиты работают в квантовом режиме, рассмотренная нами система петель в волноводе в резонансном приближении может быть сведена к стандартной модели Джейнса–Каммингса (см., например, [28,29]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-07-00546 и 12-07-31144), Министерства образования и науки РФ (ГК № 07.514.11.4147, 07.514.11.4162, 14.В37.21.0079), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» и Министерства науки Германии (BMBF) (проект RUS 10/015).

1. S. Anders, M.G. Blamire, F.-Im. Buchholz, D.-G. Crété, R. Cristiano, P. Febvre, L. Fritzsche, A. Herr, E. Il'ichev, J. Kohlmann, J. Kunert, H.-G. Meyer, J. Niemeyer, T. Ort-lepp, H. Rogalla, T. Schurig, M. Siegel, R. Stolz, E. Tarte, H.J. Mter Brake, H. Toepfer, J.-C. Villegier, A.M. Zagoskin, and A.B. Zorin, *Physica C* **470**, 2079 (2010).
2. G. Vardoulakis, S. Withington, D.J. Goldie, and D.M. Glowacka, *Meas. Sci. Technol.* **19**, 015509 (2008).
3. B.A. Mazin, M.E. Eckart, B. Bumble, S. Golwala, P. Day, J. Gao, and J. Zmuidzinas, *J. Low Temp. Phys.* **151**, 537 (2008).
4. E. Il'ichev, A.Yu. Smirnov, M. Grajcar, A. Izmalkov, D. Born, N. Oukhanski, Th. Wagner, W. Krech, H.G. Meyer, and A. Zagoskin, *Fiz. Nizk. Temp.* **30**, 823 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 620 (2004)].
5. A. Wallraff, D.I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, *Nature* **431**, 162 (2004).
6. G. Oelsner, S.H.W. van der Ploeg, P. Macha, U. Hübner, D. Born, S. Anders, E. Il'ichev, H.-G. Meyer, M. Grajcar, S. Wunsch, M. Siegel, A.N. Omelyanchouk, and O. Astafiev, *Phys. Rev. B* **81**, 172505 (2010).
7. M. Grajcar, A. Izmalkov, and E. Il'ichev, *Phys. Rev. B* **71**, 144501 (2005).
8. A.N. Omelyanchouk, S.N. Shevchenko, Ya.S. Greenberg, O. Astafiev, and E. Il'ichev, *Fiz. Nizk. Temp.* **36**, 1117 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 893 (2010)].
9. P. Macha, S.H.W. van der Ploeg, G. Oelsner, E. Il'ichev, H.-G. Meyer, S. Wunsch, and M. Siegel, *Appl. Phys. Lett.* **96**, 062503, (2010).
10. N. Bergeal, F. Schackert, M. Metcalfe, R. Vijay, V.E. Manucharyan, L. Frunzio, D.E. Prober, R.J. Schoelkopf, S.M. Girvin, and M.H. Devoret, *Nature* **465**, 64 (2010).
11. M. Hatridge, R. Vijay, D.H. Slichter, John Clarke, and I. Siddiqi, *Phys. Rev. B* **83**, 134501 (2011).
12. C.M. Wilson, T. Duty, M. Sandberg, F. Persson, V. Shumeiko, and P. Delsing, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 233907 (2010).
13. A.M. Zagoskin, E. Il'ichev, M.W. McCutcheon, Jeff F. Young, and Franco Nori, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 253602 (2008).
14. D.M. Pozar, *Microwave Engineering*, Wiley (2005).
15. M. Ricci, N. Orloff, and S.M. Anlage, *Appl. Phys. Lett.* **87**, 034102 (2005).
16. C.G. Du, H.Y. Chen, and S.Q. Li, *Phys. Rev. B* **74**, 113105 (2006).
17. N. Lazarides and G.P. Tsironis, *Appl. Phys. Lett.* **90**, 163501 (2007).
18. A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York (1982).
19. K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, Gordon and Breach, New York (1985).
20. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1963).
21. Ч.С. Ким, А.М. Сатанин, В.Б. Штенберг, *ФТТ* **45**, 594 (2003).

22. M.A. Castellanos-Beltran, K.D. Irwin, G.C. Hilton, L. Vale, and K.W. Lehnert, *Nature Phys.* **4**, 928 (2008).
23. A.A. Abdumalikov, Jr., O. Astafiev, Y. Nakamura, Y.A. Pashkin, and J.S. Tsai, *Phys. Rev. B* **78**, 180502 (2008).
24. J. Bourassa, J.M. Gambetta, A.A. Abdumalikov, Jr., O. Astafiev, Y. Nakamura, and A. Blais, *Phys. Rev. A* **80**, 032109 (2009).
25. B. Peropadre, P. Forn-Díaz, E. Solano, and J.J. García-Ripoll, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 023601 (2010).
26. O. Astafiev, A.M. Zagoskin, A.A. Abdumalikov, Jr., Yu.A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, and J.S. Tsai, *Science* **327**, 840 (2010).
27. M. Satanin, M.V. Denisenko, S. Ashhab, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **85**, 184524 (2012).
28. S.N. Shevchenko, A.N. Omelyanchouk, and E. Il'ichev, *Fiz. Nizk. Temp.* **38**, 360 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 283 (2012)].
29. L. Du, Y. Yu, D. Lan, *Fiz. Nizk. Temp.* **39**, 649 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 503 (2013)].

## Resonance modes in coplanar waveguide lines with imbedded Josephson circuits

A.V. Shvetsov, A.M. Satanin, V.A. Mironov,  
and E. Il'ichev

The transmission coefficient of microwave waveguide lines with different Josephson junction circuits has been calculated. The resonance modes in lines manifest themselves as sharp dips in the transmission power. The shape and the position of these dips depend both on external magnetic field and applied microwave power. The results of calculation can be useful for design and implementation of modern cryoelectronics microwave superconducting devices.

PACS: 74.81.Fa Josephson junction arrays and wire networks;  
41.20.Jb Electromagnetic wave propagation; radiowave propagation.

Keywords: co-planar waveguide, electromagnetic waves, Josephson junction, SQUID.