Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2013, т. 39, № 4, с. 411–415

О возможности рождения вихрей в сверхтекучих системах скрещенными однородным магнитным и неоднородным электрическим полями

С.И. Шевченко

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 3 октября 2012 г., после переработки 6 ноября 2012 г.

В работе С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009) установлено, что в магнитном поле квантованные вихри в сверхтекучих системах приобретают электрический заряд. Компенсирующий заряд противоположного знака на поверхности системы может отстоять от заряда вихря на макроскопическое расстояние. В работе показано, что в результате этого в присутствии неоднородного электрического поля, нормального к однородному магнитному, суммарная энергия заряда вихря и компенсирующего заряда может быть отрицательной. Найдены условия, при которых это приводит к спонтанному появлению в системе квантованных вихрей. Обсуждается возможность наблюдения эффекта в He II, в бозе-газах щелочных металлов и в системах с пространственно непрямыми экситонами.

У роботі С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009) встановлено, що в магнітному полі квантовані вихори в надплинних системах набувають електричного заряду. Компенсуючий заряд протилежного знаку на поверхні системи може знаходитися на макроскопічній відстані від заряду вихора. У роботі показано, що в результаті цього за наявності неоднорідного електричного поля, нормального до однорідного магнітного, сумарна енергія заряду вихора та компенсуючого заряду може бути негативною. Знайдено умови, за яких це приводить до спонтанної появи в системі квантованих вихорів. Обговорюється можливість спостереження ефекту в He II, в бозе-газах лужних металів та в системах з просторово непрямими екситонами.

PACS: **67.25.–k** ^{4}He;
67.25.D– Сверхтекучая фаза.

Ключевые слова: сверхтекучесть, вихри, электрические и магнитные поля.

Еще в 1978 г. в работе [1] (см. также [2]) обращено внимание на то обстоятельство, что в скрещенных электрическом и магнитном полях в электронейтральных сверхтекучих системах должны возникать незатухающие потоки массы. Позже предсказанные в [1,2] явления были переоткрыты в работах [3,4]. В цитированных работах речь шла о том, что однородные скрещенные поля приводят к появлению в сверхтекучих системах потоков, подобных мейсснеровским токам в сверхпроводниках. В работах [5,6] было показано, что в двумерных сверхтекучих системах со спариванием пространственно разделенных электронов и дырок, которые всегда обладают дипольным моментом, нормальным к плоскости движения частиц, магнитное поле, имеющее отличную от нуля двумерную дивергенцию $\mathrm{div}_2\,\mathbf{H} \neq 0$, может приводить к спонтанному появлению в системе квантованных планарных вихрей. Этот эффект также может иметь место в тонких сверхтекучих пленках, помещенных в нормальное к пленкам электрическое поле и магнитное поле с $\mathrm{div}_2\,\mathbf{H} \neq 0$. Эти же эффекты позже предсказаны в [7].

В недавней работе [8] (см. также [9,10]) показано, что при наличии магнитного поля квантованный вихрь в электронейтральной системе приобретает реальный электрический заряд, величина которого, как и циркуляция, квантуется и определяется величиной приложенного магнитного поля. Компенсирующий электрический заряд противоположного знака возникает на поверхности системы. Весьма важным обстоятельством является тот факт, что заряд вихря и компенсирующий его поверхностный заряд могут быть разнесены в пространстве на макроскопически большое расстояние. Это приводит, как будет показано ниже, к возможности спонтанного появления квантованных вихрей в электронейтральных сверхтекучих системах, помещенных в однородное магнитное поле и неоднородное, нормальное к магнитному полю, электрическое поле.

Все перечисленные эффекты являются следствием того, что в скрещенных электрическом и магнитном полях кинетическая энергия электронейтральной системы равна (см. [1–7])

$$\frac{1}{2M}\int\left(\mathbf{p}-\alpha\frac{\mathbf{H}\times\mathbf{E}}{c}\right)^2 n dV. \qquad (1)$$

Здесь M — масса частиц, $\mathbf{p}$ — их канонический импульс, α — электрическая поляризуемость, n — плотность. В случае сверхтекучей системы при $T=0$ это выражение можно записать через параметр порядка Ψ:

$$\frac{1}{2M}\int\left(\hbar\nabla\theta-\alpha\frac{\mathbf{H}\times\mathbf{E}}{c}\right)^2 |\Psi|^2\, dV, \qquad (2)$$

где θ — фаза параметра порядка. Выделим часть энергии, связанную с отличным от нуля градиентом фазы:

$$\frac{1}{2M}\int\left(\hbar\nabla\theta\right)^2 n dV-\frac{\alpha\hbar}{Mc}\int\nabla\theta\cdot\left(\mathbf{H}\times\mathbf{E}\right)n dV. \qquad (3)$$

Первое слагаемое, очевидно, всегда положительно, второе слагаемое, выбирая нужный знак $\nabla\theta$, можно сделать отрицательным. Поэтому в случае, когда второе слагаемое больше первого, скрещенные поля будут приводить к отличному от нуля $\nabla\theta$, поскольку это уменьшает энергию системы. Ясно, что в стационарных условиях возникающие потоки жидкости должны быть круговыми, а в односвязной системе это означает, что они связаны с появлением в системе квантованных вихрей. Рассмотрим отдельно случай, когда поля практически не влияют на плотность жидкости, так что плотность можно считать константой, и случай, когда плотность в существенной мере определяется полями, изменяясь в пространстве в соответствии с изменением полей. В первом случае речь будет идти о He II, во втором — о сверхтекучей фазе пространственно непрямых экситонов.

Пусть He II находится в цилиндрическом сосуде радиусом R, свободный конец которого закрыт тонкой металлической крышкой, и радиус крышки совпадает с радиусом цилиндра. И пусть, наконец, крышка заряжена электрическим зарядом Q. Вблизи края крышки будет возникать весьма сильное электрическое поле, имеющее как нормальную (к плоскости крышки), так и радиальную компоненты. Если параллельно к оси сосуда приложено магнитное поле $\mathbf{H}$, то это поле совместно с радиальной компонентой электрического поля $\mathbf{E}_r$ может привести к появлению квантованного вихря с осью, параллельной оси сосуда.

Прежде чем установить, при каких условиях появление вихря энергетически выгодно, отметим, что даже в самых сильных электрических полях поправкой к изменению плотности He II можно пренебрегать, так как энергия взаимодействия между атомами гелия существенно превосходит их энергию в электрическом поле $\alpha E^2/2$. Поэтому плотность n можно считать константой. Тогда, записав электрическое поле через потенциал $\mathbf{E}=-\nabla\phi$ и проинтегрировав второе слагаемое в (3) по частям, его можно представить в виде

$$\frac{\alpha\hbar n}{Mc}\left\{\int\phi\left(\nabla\theta\times\mathbf{H}\right)\cdot d\mathbf{S}-\int\phi\,\mathrm{div}\left(\nabla\theta\times\mathbf{H}\right)dV\right\}. \qquad (4)$$

Первый интеграл описывает взаимодействие с потенциалом ϕ поверхностного поляризационного заряда с плотностью P_n, где $\mathbf{P}=\alpha(\mathbf{v}_s\times\mathbf{H})n$, а второй — объемного с плотностью $-\mathrm{div}\,\mathbf{P}$ (см. [8–10]). Поскольку потенциал ϕ создается зарядами крышки, то имеет место аксиальная симметрия и ϕ не зависит от угловой переменной. В результате, выбирая ось z вдоль оси сосуда (при этом поле H имеет только z-компоненту), находим

$$\int\phi_s(z)\left(\nabla\theta\times\mathbf{H}\right)\cdot d\mathbf{l}_n dz=$$

$$=H_z\int\phi_s(z)\oint\nabla\theta\cdot d\mathbf{l}_\tau dz=\pm2\pi H\int\phi_s(z)dz. \qquad (5)$$

Здесь ϕ_s — значение потенциала ϕ на поверхности системы и использовано, что при наличии вихря с осью, параллельной оси z, набег фазы при обходе вокруг вихря равняется $\pm2\pi$.

Во втором интеграле в (4) учитываем, что

$$\mathrm{div}\left(\nabla\theta\times\mathbf{H}\right)=\pm2\pi H_z\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_v), \qquad (6)$$

где $\mathbf{r}_v$ — координата вихря.

С помощью (5), (6) выражение (4) записывается в виде (L_z — высота цилиндра)

$$\pm2\pi\frac{\alpha\hbar n}{Mc}H\int_0^{L_z}\left[\phi(R,z)-\phi(r_v,z)\right]dz. \qquad (7)$$

Чтобы оценить входящий в это выражение интеграл, допустим, что вихрь возникает на оси сосуда, т.е. что $r_v=0$. Тогда, воспользовавшись выражением для потенциала, создаваемого заряженным металлическим круглым диском (см., например, [11]), нетрудно показать, что при $L_z\ll R$

$$\phi(R,z)-\phi(0,z)=-\frac{Q}{R}\left(\frac{z}{R}\right)^{1/2}. \qquad (8)$$

Подставляя (7) в (8), после элементарного интегрирования по z найдем часть энергии вихря, обусловленную электрическим и магнитным полями:

$$-\frac{2\pi\hbar\alpha n H}{Mc}\frac{4}{3}\frac{\phi}{\pi}\left(\frac{L_z}{R}\right)^{1/2}L_z. \qquad (9)$$

Мы учли, что потенциал ϕ металлического диска и его заряд связаны соотношением $\phi=\frac{\pi}{2}\frac{Q}{R}$, и выбрали такой знак циркуляции, при котором взаимодействие вихря с полями понижает энергию системы.

Чтобы получить полную энергию вихря, к (9) следует прибавить кинетическую энергию жидкости (ξ — длина когерентности)

$$\frac{1}{2M}\int\left(\hbar\nabla\theta\right)^2 n dV=\frac{\pi\hbar^2 n}{M}\left(\ln\frac{R}{\xi}\right)L_z. \qquad (10)$$

Полная энергия системы, связанная с появлением вихря, отрицательна, если электрический потенциал диска удовлетворяет условию

$$\phi>\phi_c\equiv\frac{3}{8}\pi\frac{\hbar c}{\alpha H}\left(\frac{R}{L_z}\right)^{1/2}\ln\frac{R}{\xi}. \qquad (11)$$

Отметим, что критическое значение потенциала ϕ_c не зависит ни от массы образующих систему частиц, ни от плотности системы. Это значение определяется электрической поляризуемостью частиц α и величиной длины когерентности ξ (которая зависит от температуры и может быть сделана достаточно большой в непосредственной окрестности температуры сверхтекучего перехода).

Приведем численные оценки. Для ^{4}He поляризуемость $\alpha=2\cdot10^{-25}$ см^3. В магнитном поле $H\approx$ 10 Тл получаем оценку $\phi_c\approx4{,}5\cdot10^5(R/L_z)^{1/2}\ln(R/\xi)$ В. Множитель $(R/L_z)^{1/2}$ предполагался при вычислениях большим, но в условиях эксперимента его можно сделать порядка единицы. Численное значение множителя $\ln(R/\xi)$ порядка 10 (вдали от T_c). Таким образом, критическое значение $\phi_c\approx5\cdot10^6$ В. Этот результат показывает, что условие спонтанного появления вихрей в He II в однородном магнитном и неоднородном электрическом поле, ортогональном магнитному полю, весьма трудно выполнить в настоящее время.

Ситуация, однако, становится более благоприятной, если от He II мы перейдем к бозе-газу какого-нибудь щелочного металла. По порядку величины выражение (11) справедливо и для разреженного бозе-газа при условии, что неоднородное электрическое поле не влияет на плотность газа. Важное отличие атомов щелочного металла от атомов ^{4}He состоит в том, что их электрическая поляризуемость α почти на два порядка больше поляризуемости последних. В результате для бозе-газа щелочного металла критическое значение ϕ_c должно быть на два порядка меньше приведенной выше оценки, т.е. для бозе-газа щелочного металла $\phi_c\approx5\cdot10^4$ В. При превышении этой величины в сверхтекучем бозе-газе появится конечное число вихрей.

Обратимся к случаю пространственно непрямых экситонов. Здесь уместно небольшое отступление. Возможность сверхтекучести в системе экситонов была предсказана около пятидесяти лет назад [12,13]. Однако эта сверхтекучесть до сих пор не получила ясного экспериментального подтверждения. Возможно, наиболее критическим обстоятельством для экситонной сверхтекучести является очень короткое внутреннее радиационное время, обязанное электрон-дырочной рекомбинации. Время рекомбинации можно увеличить на много порядков величины путем пространственного разделения электрона и дырки. Это обычно достигается путем использования двойных квантовых ям. Возникающий экситон образован электроном в одном слое и дыркой в другом. Сверхтекучесть в таких системах была предсказана в [14,15] и исследована в большом числе теоретических и экспериментальных работ [16–22]. Однако в этих системах возникает новая проблема. Пространственно непрямые экситоны имеют постоянный дипольный момент, ориентированный нормально к плоскости слоев. Поскольку все диполи ориентированы в одном направлении, это приводит к большим силам отталкивания между экситонами. Возникает проблема удержания экситонов от разлета в плоскости проводящих слоев. Эту проблему решают с помощью создания ловушки, захватывающей экситоны, подобно тому, как это делается в случае паров щелочных металлов. В качестве такой ловушки может выступать заряженный металлический диск, помещенный над двухъямной системой (подробности см., например, в [23,24]). Эффект захвата экситонов основан на том, что пространственно непрямые экситоны взаимодействуют с приложенным электрическим полем, и их плотность определяется из баланса энергии, обусловленной отталкиванием между экситонами, и энергии, происходящей от взаимодействия с электрическим полем (отрицательный знак последней обеспечивается соответствующим выбором знака заряда у диска).

Итак, рассмотрим двухъямную электрон-дырочную структуру, помещенную в однородное нормальное к плоскости структуры магнитное поле $\mathbf{H}$ и электрическое поле заряженного диска, плоскость которого параллельна плоскости структуры. В случае, когда расстояние d между слоями с электронной и дырочной проводимостью превышает боровский радиус экситона, энергия отталкивания между экситонами (в расчете на один экситон) равна $\frac{4\pi e^2 d}{\varepsilon}n_{\text{ex}}(r)$. Здесь ε — диэлектрическая проницаемость двухъямной структуры. Энергия взаимодействия экситона с электрическим полем заряженного диска есть

$$e[\phi(r_+)-\phi(r_-)]\approx ed\partial\phi/\partial z.$$

Приравнивая эти два выражения, получаем уравнение для двумерной плотности экситонов $n_{\text{ex}}(r)$

$$n = \frac{\varepsilon}{4\pi e}\frac{\partial\phi}{\partial z}. \qquad (12)$$

Если радиус диска равен R, то потенциал электрического поля диска равен (см. [11])

$$\phi = \frac{Q}{R}\operatorname{arctg}\left[\frac{2R^2}{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4z^2R^2}}\right]^{1/2}. \qquad (13)$$

Здесь использовано обозначение $\Delta = r^2 + z^2 - R^2$. Если расстояние от диска до двухъямной структуры обозначить через l, то при $R \gg l$ (и, разумеется, $l \gg d$) распределение экситонов можно принять равным

$$n_{\text{ex}}(r) = \frac{\varepsilon}{4\pi e}\frac{Q}{R}\frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \qquad (14)$$

Это выражение получено из (12), (13) и справедливо лишь при $r \gg l$, но оно приводит к результату, имеющему правильный порядок величины, если $r < R - l$. Ниже будем считать, что возникающая плотность экситонов достаточно велика для того, чтобы экситоны при температуре эксперимента перешли в сверхтекучее состояние.

Из (13) следует, что радиальное электрическое поле равно

$$\mathbf{E}_r \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}} = \frac{l\mathbf{r}}{\left(R^2 - r^2\right)^{3/2}}\frac{Q}{R}. \qquad (15)$$

Предположим, что электрическое поле $\mathbf{E}_r$ и приложенное нормально к структуре магнитное поле $\mathbf{H}$ приводят к появлению вихря, кор которого находится в центре системы, т.е. $r_v = 0$. При этом поле скоростей имеет только азимутальную компоненту и равно $v_s = (\hbar/M)(1/r)$. В данном случае обусловленная полями часть энергии экситонов дается выражением

$$\frac{\alpha}{c}\int H_z \frac{\partial\phi}{\partial r} v_s n_{\text{ex}}\, dS. \qquad (16)$$

Интегрирование производится по площади, занимаемой экситонами, т.е. по угловой переменной от 0 до 2π и по r от 0 до $R - l$. Подставляя (14), (15) в (16), получаем после интегрирования

$$\frac{1}{8}\left(\frac{Q}{R}\right)^2 \frac{\alpha\hbar}{Mc}\frac{\varepsilon H}{eR}. \qquad (17)$$

Кинетическая энергия экситонов равна

$$\int \frac{Mv_s^2}{2} n_{\text{ex}}\, dS = \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\varepsilon}{4\pi e}\frac{Q}{R}\frac{2\pi}{R}\ln\frac{2R}{\xi}. \qquad (18)$$

Здесь учтено, что $R \gg l \gg \xi$, где ξ — длина когерентности экситонного газа. Приравнивая выражения (17) и (18), найдем критическое значение потенциала диска ϕ_c, при превышении которого появление вихря энергетически выгодно (учитываем, что $\frac{Q}{R} = \frac{2}{\pi}\phi$)

$$\phi_c = \frac{\pi}{\alpha}\frac{c\hbar}{H}\ln\frac{2R}{\xi}. \qquad (19)$$

Это значение ϕ_c буквенно совпадает с ϕ_c из (11) (если в последнем опустить множитель $(R/L_z)^{1/2}$). При численной оценке используем для поляризуемости экситона выражение

$$\alpha = \frac{9}{2}\left(\frac{\hbar^2\varepsilon}{me^2}\right)^3. \qquad (20)$$

Здесь $m = m_e m_h/(m_e + m_h)$ — приведенная масса экситона. Для $\varepsilon \approx 10$ и $m \approx m_0$, где m_0 — масса свободного электрона, находим, что $\alpha \approx 10^{-22}$ см^3. В результате в магнитном поле H = 10 Тл получаем из (19) следующую оценку: $\phi_c \approx 3\cdot 10^4$ В. Такое значение электрического потенциала представляется вполне реалистичным.

Итак, в работе показано, что однородное магнитное поле и нормальное к нему неоднородное электрическое поле могут индуцировать в сверхтекучей системе квантованные вихри. Вопрос о методах наблюдения этих вихрей требует отдельного рассмотрения. Здесь отметим лишь обсуждавшуюся в литературе (см., например, [25]) возможность влияния вихрей на фотолюминесценцию бозе-конденсата.

Работа выполнена в рамках совместного проекта НАН Украины и CNRS.

1. С.И. Шевченко, *Письма в ЖЭТФ* **28**, 112 (1978).
2. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3312 (1995).
3. H. Wei, R. Han, and X. Wei, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2071 (1995).
4. U. Leonhardt and P. Piwnicki, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2426 (1999).
5. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **56**, 10355 (1997).
6. S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **57**, 14809 (1998).
7. E.B. Sonin, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 106407 (2009).
8. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
9. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
10. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 596 (2010)].
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1978).
12. S.A. Moskalenko, *Fiz. Tverd. Tela* **4**, 276 (1962).
13. J.M. Blatt, K.W. Boer, and W. Brandt, *Phys. Rev.* **126**, 1691 (1962).
14. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).

15. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys*. **2**, 251 (1976)].
16. K. Moon, H. Mori, K. Yang, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheng, D. Yoshioka, and Shou-Cheng Zhang, *Phys. Rev. B* **51**, 5138 (1995).
17. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett*. **93**, 036801 (2004).
18. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
19. L.V. Butov, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295207 (2007).
20. V.B. Timofeev, A.V. Gorbunov, and A.V. Larionov, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295209 (2007).
21. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **75**, 075322 (2007).
22. D.V. Fil and S.I. Shevchenko, *Phys. Lett. A* **374**, 3335 (2010).
23. R. Rapaport, G. Chen, S. Simon, O. Mitrofanov, L. Pfeiffer, and P.M. Platzman, *Phys. Rev. B* **72**, 075428 (2005).
24. R. Rapaport and G. Chen, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295207 (2007).
25. J. Keeling, L.S. Levitov, and P.B. Littlewood, *Phys. Rev. Lett*. **92**, 176402 (2004).

The possibility of vortex nucleation in superfluid systems by homogeneous magnetic and inhomogeneous electric crossed fields

S.I. Shevchenko

It was found by article S.I. Shevchenko and A.S. Rukin, *JETP Lett.* **90**, 42 (2009) that quantized vortices in superfluid systems in a magnetic field acquire an electric charge. The compensating charge of the opposite sign is on the surface of the system and can be at a macroscopic distance from the vortex charge. It is shown in the above article that as a consequence, the total energy of a vortex and compensating charges can be negative in the inhomogeneous electric field normal to the homogeneous magnetic one. The conditions when this gives rise to spontaneous appearance of quantized vortices in the system are found. We discuss the possibility of observation of this effect in He II, in Bose gases of alkali metals and in systems with spatially indirect excitons.

PACS: **67.25.–k** ^{4}He;
67.25.D– Superfluid phase.

Keywords: superfluidity, vortices, electric and magnetic fields.