

Нелинейная динамика и солитоны цепочки сферических магнитных наночастиц

С.А. Дзян¹, Б.А. Иванов^{2,1}

¹Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, радиофизический факультет
пр. Акад. Глушкова, 2, г. Киев, 03127, Украина

²Институт магнетизма НАН Украины, пр. Вернадского, 36, г. Киев, 03142, Украина
E-mail: bor.a.ivanov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 28 декабря 2012 г.

Свободно перемещающиеся магнитные частицы, при наличии магнитного дипольного взаимодействия их магнитных моментов, могут организовываться в плотные фазы, простейшая из которых — линейная цепочка. Исследована нелинейная динамика, связанная со смещением частиц в такой цепочке, с учетом магнитного дипольного взаимодействия и молекулярного взаимодействия Ван дер Ваальса. Показано, что такая цепочка обладает интересными свойствами нелинейной динамической системы. Для нее могут быть построены точные решения, описывающие распространяющиеся нелинейные волны постоянной амплитуды с длиной волны, сравнимой с расстоянием между частицами, и солитонные решения. Роль нелинейности колебаний оказывается весьма важной для проблемы устойчивости цепочки относительно перехода в плотный трехмерный кластер.

Магнітні частинки, що вільно переміщуються, при наявності магнітної дипольної взаємодії їх магнітних моментів, можуть організовуватися в щільні фази, найпростішою з яких є лінійний ланцюжок. Досліджено нелінійну динаміку, яка пов'язана зі зміщенням частинок в такому ланцюжку, з урахуванням магнітної дипольної взаємодії та молекулярної взаємодії Ван дер Ваальса. Показано, що такий ланцюжок має цікаві властивості нелінійної динамічної системи. Для неї можуть бути побудовані точні рішення, що описують нелінійні хвилі постійної амплітуди, які поширюються, з довжиною хвилі, порівнянної з відстанню між частинками, і солітонні рішення. Роль нелінійності коливань виявляється досить важливою для проблеми стійкості ланцюжка відносно переходу в щільний тривимірний кластер.

PACS: 05.45.Yv Солитоны;

75.75.-c Магнитные свойства наноструктур;

75.75.Jn Динамика магнитных наночастиц.

Ключевые слова: магнитные наночастицы, нелинейная динамика, солитон, магнитное дипольное взаимодействие, кластер.

Солитонный подход является наиболее адекватным для описания нелинейной динамики в физике конденсированных сред, плазмы и теории поля. Среди различных моделей конденсированных сред, допускающих солитонные состояния, интерес к солитонам поля намагниченности ферромагнетиков (магнитным солитонам) не ослабевает в течение многих лет [1–3]. Для этого существует много причин. Для одномерных моделей важно, что в бездиссипативном пределе уравнение Ландау–Лифшица, описывающее динамику намагниченности ферромагнетика $\mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}/M_s$, где M_s — намагниченность насыщения, — наиболее общий пример точно интегрируемых систем; известные уравнения синус-

Гордон и нелинейное уравнение Шредингера получают как его частный случай (см. [1–3]). Как ферромагнетики, так и антиферромагнетики характеризуются наличием дополнительных интегралов движения [4–6], за счет чего существуют стабильные солитоны немалой амплитуды (до ее максимального значения, отвечающего антипараллельной ориентации намагниченности в центре солитона и вдали от него). Известны стабильные неоднородные магнитные солитоны [7–9], что в силу теоремы Хобарта–Деррика — весьма нетривиальное свойство нелинейных полевых моделей.

Основное взаимодействие в физике магнетизма — обменное, которое обладает высокой симметрией и

формирует достаточно простые типы магнитного порядка [10, 11]. Однако в течение многих десятилетий не ослабевало внимание к *дипольным магнетикам*, т.е. таким спиновым системам, в которых превалирует дальнедействующее магнитное дипольное взаимодействие. Дипольные магнетики, обладающие рядом необычных свойств, как статических [12–15], так и динамических [16–18], представляют интерес как объекты фундаментальной физики магнетизма. В последние годы внимание к системам с преобладанием магнитного дипольного взаимодействия существенно выросло. Прежде всего это связано с анализом таких искусственных магнитных материалов, как массивы магнитных наночастиц [19–23]. Более традиционная проблема, касающаяся поведения малых магнитных частиц в жидкости [24], в последние годы также приобрела особую актуальность. Дело в том, что вопрос об упорядочении свободно перемещающихся магнитных частиц важен не только с точки зрения стандартной физики феррожидкостей, но представляет интерес и для анализа процессов самоорганизации с образованием упорядоченных кластеров таких частиц, что можно рассматривать как простой и экономичный путь формирования наноструктурированных магнетиков [25–29]. Все это позволяет утверждать, что анализ статических и динамических свойств упорядоченных систем магнитных наночастиц с магнитным дипольным взаимодействием представляет интерес для фундаментальной физики магнетизма и ее приложений.

Недавно в работе авторов была исследована коллективная динамика магнитных наночастиц, способных свободно двигаться в жидкости, для случая, когда частицы организованы в цепочку (линейный кластер) [30]. Анализ проведен с одновременным учетом дипольного взаимодействия магнитных моментов частиц и изотропного молекулярного взаимодействия Ван дер Ваальса. Спектр колебаний состоит из двух ветвей: магнитной, обусловленной поворотом магнитного момента частицы, и упругой, связанной со смещением частиц без изменения направления ее магнитного момента. Упругая мода имеет бесщелевой закон дисперсии, ее частота стремится к нулю при $q \rightarrow 0$, где q — квазиимпульс в направлении оси цепочки, в то время как магнитная мода имеет значительную энергию активации. В силу этого оказывается, что эффекты гибридизации мод слабые, и эти две моды фактически можно рассматривать независимо. Показано, что если характерная энергия взаимодействия Ван дер Ваальса значительно (примерно в сто раз) превышает дипольную энергию, цепочка теряет устойчивость относительно малых (линейных) возмущений с квазиимпульсом, близким к границе зоны Бриллюэна. Это свидетельствует о важности анализа спектра такой цепочки вне рамок континуального приближения как упругой дискретной среды [31].

В настоящей работе исследованы нелинейные эффекты в упругой (связанной со смещением частиц из положения равновесия) динамике частиц такой цепочки с учетом обоих указанных типов взаимодействий.

Примем, что частицы имеют сферическую форму и одинаковые размеры (диаметр частицы a порядка нескольких десятков нанометров) и их магнитный момент μ_i постоянной длины направлен вдоль оси цепочки (оси x), $\mu_i = \mu_0 = \mu_0 \mathbf{e}_x$ (рис. 1). Колебания магнитного типа, связанные с поворотом μ_i , нами не рассматриваются. В рамках такой модели состояние i -й частицы описывается ее радиус-вектором \mathbf{r}_i . Частицы в цепочке будем классифицировать целым числом n , в равновесии положение n -й частицы $\mathbf{r}_n^{(0)} = (an, 0, 0)$, где a — диаметр частицы, совпадающий с периодом цепочки в равновесии. Полная энергия системы частиц включает энергию магнитного дипольного взаимодействия частиц W_{dd} и энергию взаимодействия Ван дер Ваальса W_{WdW} . Для пары частиц с координатами \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j взаимодействие Ван дер Ваальса $W_{WdW}^{(ij)} = -\kappa/r_{ij}^6$, константа κ определяет его интенсивность, а дипольная энергия зависит как от расстояния между частицами $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$, так и от ориентации вектора $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ относительно μ_0 , т.е. оси цепочки. Однако в данной системе имеются особенности, связанные с тем, что в модели жестких сферических притягивающихся частиц расстояние между ближайшими частицами, $r_{n,n\pm 1} = |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n\pm 1}| = a$ должно оставаться неизменным,

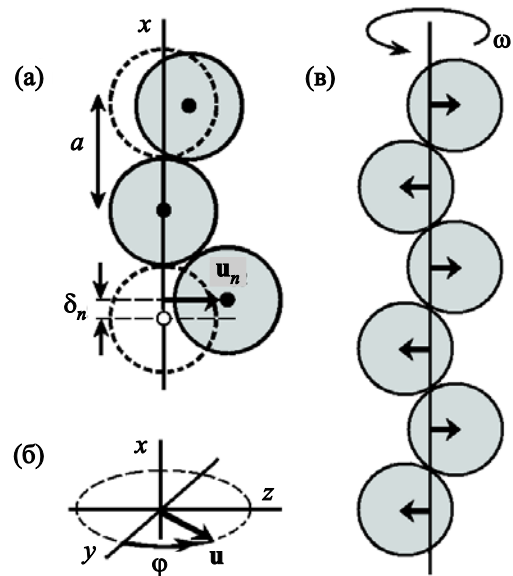


Рис. 1. Модель цепочки сферических магнитных частиц и ее характерная динамика; положения частиц в основном состоянии цепочки и смещенных частиц (кружки из штриховых и сплошных линий соответственно) и определение переменных u_n и δ_n (а); связь переменных u и ϕ (б); характерная вращательная мода движения частиц в цепочке с волновым вектором, близким к π/a , ω — частота вращения частиц в этой моде (в).

т.е. звуковые колебания сводятся к изгибам цепочки. Вследствие этого условия вклад взаимодействия Ван дер Ваальса ближайших частиц (как и вклад любого взаимодействия, зависящего только от расстояния между частицами) не проявляется в динамических свойствах таких возмущений. Таким образом, несмотря на близкоедействующий характер взаимодействия Ван дер Ваальса, его вклад надо учитывать вне рамок приближения взаимодействия ближайших соседей. Для дипольного взаимодействия вклад взаимодействия ближайших частиц не равен нулю, но в силу медленного убывания этого взаимодействия с расстоянием также необходим учет взаимодействия всех частиц. Таким образом, в данной задаче неприменимо стандартное приближение ближайших соседей, которое часто используется в теории решеточных систем [31].

Энергию частиц в системе удобно записать через безразмерный вектор $\mathbf{a}_{n,n\pm\Delta} = \mathbf{r}_{n,n\pm\Delta}/a$, $\mathbf{r}_{n,n\pm\Delta} \equiv \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n\pm\Delta}$. Тогда взаимодействие Ван дер Ваальса E_{WdW} будет содержать только модуль $\alpha_{n,n\pm\Delta} = |\mathbf{a}_{n,n\pm\Delta}|$,

$$W_{WdW} = \sum_n W_{n,WdW} = -\sigma \frac{\mu_0^2}{2a^3} \sum_n \sum_{\Delta \neq 0, \pm 1} \frac{1}{\alpha_{n,n\pm\Delta}^6}, \quad (1)$$

где подчеркнuto, что слагаемое с $\Delta = \pm 1$ не дает вклада в энергию. Энергия магнитного диполь-дипольного взаимодействия содержит также проекцию этого вектора на ось цепочки $\alpha_{n,n\pm\Delta}^x$:

$$W_{dd} = \sum_n W_{n,dd} = \frac{\mu_0^2}{2a^3} \sum_n \sum_{\Delta \neq 0} \frac{\alpha_{n,n\pm\Delta}^2 - 3\alpha_{n,n\pm\Delta}^x}{\alpha_{n,n\pm\Delta}^5}. \quad (2)$$

Здесь введено характерное значение энергии дипольного взаимодействия двух соседних частиц μ_0^2/a^3 ; параметр κ , определяющий интенсивность взаимодействия Ван дер Ваальса, представлен через безразмерный параметр σ в виде $\kappa = \sigma \mu_0^2 a^3$. С использованием введенных выше безразмерных переменных, поперечного и продольного смещений \mathbf{u}_n и δ_n можно записать $\alpha_{n,n\pm\Delta}^2 = (\Delta + \delta_{n+\Delta} - \delta_n)^2 + (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+\Delta})^2$ и $\alpha_{n,n\pm\Delta}^x = \Delta + \delta_{n+\Delta} - \delta_n$ и представить лагранжиан задачи в следующем виде:

$$L = \frac{ma^2}{2} \sum_n \left[\left(\frac{d\mathbf{u}_n}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\delta_n}{dt} \right)^2 \right] - W, \quad W = W_{dd} + W_{WdW}, \quad (3)$$

где m — масса частицы. Отметим, что такая простая запись на самом деле несколько схематична, так как переменные δ_n и \mathbf{u}_n не являются независимыми и связаны соотношением $1 = (1 + \delta_n - \delta_{n-1})^2 + (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1})^2$, которое должно выполняться для каждого n . Приняв для определенности $\delta_0 = 0$, данное условие можно удовлетворить с помощью достаточно сложного нелокального соотношения:

$$\delta_n = -n + \text{sgn}(n) \sum_{k=\text{sgn}(n)}^n \sqrt{1 - (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1})^2},$$

где $\text{sgn}(n) = n/|n|$, которое нетрудно доказать методом математической индукции. Эти соотношения для δ_n включают суммы по всем частицам с положительными номерами для $n > 0$ и с отрицательными номерами для $n < 0$. В линейном приближении при записи δ надо учитывать только члены порядка \mathbf{u}^2 (см. [30]).

Анализ линейной задачи показал, что в системе (3) спектр колебаний содержит две вырожденные ветви колебаний частиц, в качестве которых можно выбрать колебания с линейной поляризацией $\mathbf{u}_n = \mathbf{e}_y u_{n,y}$ или $\mathbf{u}_n = \mathbf{e}_z u_{n,z}$ (как это сделано в [30]) или с круговой поляризацией. Понятно, что в линейном приближении оба выбора полностью эквивалентны. Однако при описании нелинейных эффектов циркулярные моды намного удобнее, поскольку позволяют в явном виде учесть симметрию системы относительно поворотов вокруг оси цепочки. В этом случае естественно ввести комплексную переменную $\psi_n = u_{n,y} + i u_{n,z}$. При этом $\mathbf{u}_n^2 = |\psi_n|^2$ и можно записать δ_n через ψ_n и ψ_n^* в следующем виде:

$$\delta_n = -n + \text{sgn}(n) \sum_{k=\text{sgn}(n)}^n \sqrt{1 - (\psi_k - \psi_{k-1})(\psi_k^* - \psi_{k-1}^*)}. \quad (4)$$

Естественно ввести амплитуду и фазу переменной $\psi_n = \alpha_n \exp(i\varphi_n)$ и записать лагранжиан задачи через эти переменные. В этом случае возникают достаточно громоздкие, но простые выражения, которые несложно проанализировать. Легко видеть, что в терминах переменных α_n и φ_n фазовая переменная φ_n входит в лагранжиан только в комбинациях вида $\varphi_n - \varphi_{n\pm\Delta}$, где целое число $0 < \Delta < n$. Поэтому глобальное преобразование симметрии вида $\varphi_n \rightarrow \varphi_n + \delta\varphi$, которое описывает поворот системы на угол $\delta\varphi$ вокруг оси цепочки, не меняет лагранжиан системы. В силу этого $\sum \partial L / \partial \varphi_n = 0$, т.е. в задаче присутствует интеграл движения M :

$$M = \sum_n \left\{ \mathbf{e}_x \left[\mathbf{u}_n \times \frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{u}_n/dt)} \right] \right\} = ma^2 \sum_n \left[\alpha_n^2 \frac{d\varphi_n}{dt} + \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{d\delta_k}{dt} \frac{\partial (d\delta_k/dt)}{\partial (d\varphi_n/dt)} \right], \quad (5)$$

который представляет собой проекцию момента импульса, связанного с движением частиц, на ось цепочки \mathbf{e}_x . Опять-таки, эта простая формула становится намного сложнее при использовании явной нелокальной связи величин $d\delta_n/dt$ и $d\mathbf{u}_n/dt$, которую можно найти из соотношения (4).

Для простых распространяющихся волн постоянной амплитуды соответствующие выражения для энергии и момента существенно упрощаются. Действительно, варьирование лагранжиана как по φ_n , так и по α_n дает выражения, содержащие или тригонометрические функции $\varphi_n - \varphi_{n\pm\Delta}$, или производные вида $d(\varphi_n - \varphi_{n\pm\Delta})/dt$. Легко показать, что уравнение $\delta L/\delta\varphi_n$ удовлетворяется тождественно при выборе $\alpha_n = \alpha = \text{const}$, $\varphi_n = \omega t - qn$, что отвечает искомой волне с постоянной амплитудой α , q/a имеет смысл квазиволнового вектора. Такой волне соответствует вращение каждой частицы вокруг оси цепочки по окружности, причем амплитуда вращения одинакова для

всех частиц. Разность фаз вращения для различных частиц определяется величиной q . Понятно, что такому движению соответствует $d\delta_n/dt = 0$, в кинетической части лагранжиана остаются только простые локальные слагаемые с $d\mathbf{u}_n/dt$, и зависимость частоты волны от квазиимпульса q и амплитуды волны α дается формулой

$$\omega^2(q, \alpha) \equiv \varepsilon^2(q, \alpha)\omega_0^2 = (1/\alpha)\partial W_n/\partial\alpha_n |_{\alpha_n=\alpha},$$

где энергия W_n (см. (1), (2)) вычислена с помощью указанной подстановки; $\omega_0^2 = \mu_0^2/ma^5$ — характерное значение частоты,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(q, \alpha) = & 12\sigma \sum_{\Delta=2}^{\infty} \frac{1}{D_{\Delta}^8} [\sin^2(q\Delta/2) - \Delta \sin^2(q/2)] + 12 \sum_{\Delta=1}^{\infty} \frac{\Delta^2}{D_{\Delta}^7} [2\sin^2(q\Delta/2) - \Delta \sin^2(q/2)] + \\ & + 8\alpha^2 \sum_{\Delta=1}^{\infty} \frac{1}{D_{\Delta}^7} [7\sin^4(q\Delta/2) - \Delta(1+12\Delta)\sin^2(q\Delta/2)\sin^2(q/2) + 6\Delta^3 \sin^4(q/2)], \end{aligned} \quad (6)$$

где $D_{\Delta}^2 \equiv D_{\Delta}^2(q, \alpha) = \Delta^2[1 - 4\alpha^2 \sin^2(q/2)] + 4\alpha^2 \sin^2(q\Delta/2)$.

Заметим, что существование точного решения для нелинейной волны немалой амплитуды связано с наличием дополнительного нетеровского интеграла движения. Для стандартных решеточных систем ситуация более сложная, и такие волны могут быть найдены только с использованием асимптотической процедуры [32].

Выражение (6) можно легко проанализировать численно (использовался программный пакет «Wolfram Mathematica») при любых q и значениях амплитуды α . При $\alpha \rightarrow 0$ величина $D_{\Delta}(q, \alpha) \rightarrow \Delta$, и два первых слагаемых в формуле (6) определяют закон дисперсии «акустической» моды колебаний, полученный в работе [30] в линейном пределе.

Обсудим модификацию этого закона дисперсии при конечном значении амплитуды. Диполь-дипольное взаимодействие и взаимодействие Ван дер Ваальса вносят аддитивный вклад в квадрат частоты звуковых колебаний, т.е. $\omega_s^2 = \omega_{dd}^2 + \omega_{WdW}^2 = \omega_0^2 \varepsilon_s^2$, $\varepsilon_s^2 = \varepsilon_{dd}^2 + \sigma \varepsilon_{WdW}^2$, где введены безразмерные величины ε_{WdW}^2 (первое слагаемое в формуле (6), пропорциональное σ) и ε_{dd}^2 (два остальных слагаемых). Полезно рассмотреть влияние нелинейности отдельно для этих двух слагаемых. Как отмечалось в [30], в линейном приближении величина $\varepsilon_{dd}^2 > 0$ при любых q и ε_{dd}^2 — монотонно растущая функция $|q|$ во всей зоне Бриллюэна, в то время как функция $\varepsilon_{WdW}^2(q)$ растет только при $|q| < 0,32\pi$, далее убывает с ростом q и отрицательная при $0,483\pi < |q| \leq \pi$. Это поведение $\varepsilon_{WdW}^2(q)$ служит причиной неустойчивости цепочки

при одновременном учете обоих взаимодействий в случае $\sigma > \sigma_c \approx 113$. Учет нелинейности принципиально не изменяет этого поведения, лишь с ростом амплитуды убывание частоты как функции q становится более быстрым. Нелинейность, однако, принципиально меняет характер ε_{dd}^2 : уже при сравнительно малых амплитудах α зависимость становится немонотонной, а начиная с $\alpha \sim 0,4$ возникают отрицательные значения ε_{dd}^2 , т.е. появляется неустойчивость (см. рис. 2).

Отметим также, что при $q < \pi/2$ различия между спектрами колебаний для разных амплитуд практически не заметны (см. рис. 2), но во второй половине зоны Бриллюэна возникает существенное нелинейное понижение частоты; максимальный эффект наблюдается на

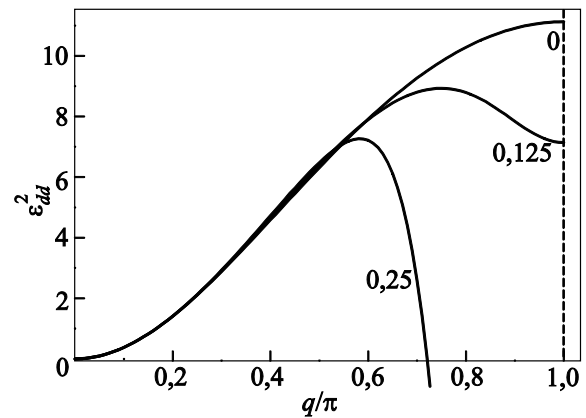


Рис. 2. Магнитодипольный вклад в частоту колебаний для некоторых значений амплитуды (линейный случай $\alpha^2 = 0$, $\alpha^2 = 0,125$ и $\alpha^2 = 0,25$).

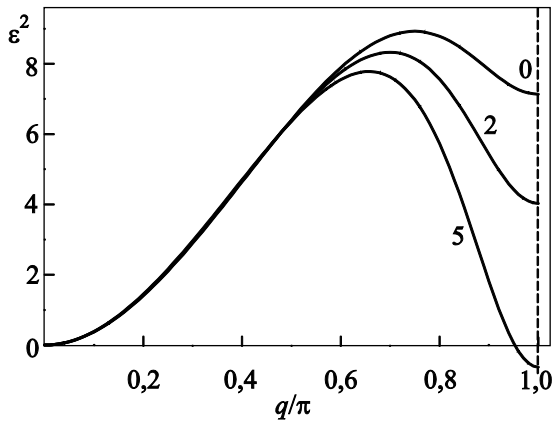


Рис. 3. Вид спектра циркулярных колебаний частиц в цепочке при амплитуде $\alpha^2 = 0,125$ при одновременном учете обоих взаимодействий для различных значений параметра σ : 0 (число диполь-дипольное взаимодействие), 2 и 5.

краю зоны ($q = \pi$). Такое «размягчение» спектра приводит к тому, что критическое значение интенсивности взаимодействия Ван дер Ваальса σ , при котором спектр становится неустойчивым, становится зависимым от амплитуды возмущения, $\sigma_c = \sigma_c(\alpha)$, и очень быстро уменьшается с ростом амплитуды колебаний. Спектр колебаний при $\alpha^2 = 0,125$ и различных значениях σ приведен на рис. 3. Легко видеть, что уже при значении $\sigma = 5$ возмущения с данной амплитудой неустойчивы, в то время как в линейном приближении $\sigma_c \approx 113$.

Мы рассмотрели нелинейную распространяющуюся волну, амплитуда которой постоянна в пространстве. Для этой волны частота $\omega^2(q, \alpha) = \omega_0^2 \varepsilon^2(q, \alpha)$ является убывающей функцией амплитуды. При малых амплитудах с точностью до членов первого порядка малости по α^2 нетрудно представить выражение для частоты в виде

$$\varepsilon^2(q, \alpha) = \varepsilon^2(q, 0) - \alpha^2 U(q), \quad U(q) = \sigma U_{WdW}(q) + U_{dd}(q), \quad (7)$$

где $\varepsilon^2(q, 0)$ определяет спектр в линейном приближении, величины $\sigma U_{WdW}(q)$ и $U_{dd}(q)$ описывают вклад в нелинейность взаимодействия Ван дер Ваальса и диполь-дипольного взаимодействия соответственно. Для них получается

$$U_{WdW}(q) = 192 \sum_{\Delta=2}^{\infty} \frac{(S_{\Delta} - \Delta S_1)(S_{\Delta} - \Delta^2 S_1)}{\Delta^{10}},$$

$$U_{dd}(q) = 40 \sum_{\Delta=2}^{\infty} \frac{[7S_{\Delta}^2 - \Delta(4 + 6\Delta)S_{\Delta}S_1 + 3\Delta^3 S_1^2]}{\Delta^7}, \quad (8)$$

для сокращения записи обозначено $S_{\Delta} = \sin^2(q\Delta/2)$, $S_1 = \sin^2(q/2)$. Отметим, что в сумме, определяющей $U_{dd}(q)$, вклад слагаемого с $\Delta = 1$ обращается в нуль.

Понятно, что слагаемое с $\Delta = 1$ отсутствует для взаимодействия Ван дер Ваальса, но в линейном приближении вклад этого слагаемого был отличен от нуля для дипольного взаимодействия. Поэтому вклад последнего был относительно велик, в частности, было мало критическое значение σ_c . В нелинейных же слагаемых вклад обоих взаимодействий определяется суммами $\Delta \geq 2$, и их значения могут быть сравнимыми. Именно в силу этого обстоятельства критические значения $\sigma_c(\alpha)$ быстро уменьшаются с ростом амплитуды возмущения α , что представлено на рис. 3.

Полученные результаты можно использовать для анализа устойчивости волны постоянной амплитуды относительно нарушения однородности (самофокусировки), а также для асимптотического анализа солитонов малой амплитуды. Это можно осуществить с помощью перехода к континуальному приближению для огибающей, рассматривая ее как плавную функцию координат и времени. Значение $\partial \varepsilon^2(q, \alpha) / \partial \alpha^2 = -U(q)$, и оба слагаемых в $U(q) = \sigma U_{WdW}(q) + U_{dd}(q)$ положительны. По известному критерию Лайтхилла (см. [31,33]) это означает, что такие колебания устойчивы относительно неоднородных возмущений (самофокусировки) при выполнении условия $\partial^2 \omega(q) / \partial q^2 < 0$, т.е. для случая отрицательной дисперсии. Для рассматриваемой нами задачи дисперсия коллективных колебаний частиц цепочки может быть отрицательной для достаточно больших q . Однако для малых q величина $\partial^2 \omega(q) / \partial q^2 > 0$ и дисперсия положительна. В этих условиях устойчивыми являются самолокализованные нелинейные волны (солитоны огибающей). Такие солитоны даже в системах без точной интегрируемости — достаточно долго живущие возбуждения. Они были исследованы для стандартных атомных систем с помощью асимптотической процедуры, основанной на разложении решения в ряд по малой амплитуде солитона α [32].

Результат использования асимптотической процедуры для слаболокализованных солитонов огибающей с малой амплитудой достаточно универсален. В основном порядке по малой амплитуде получается солитонное решение с амплитудой ψ_0 , описывающее пространственную локализацию периодической волны вида $\psi \propto \cos(qx/a - \omega t)$, где частота волны ω близка к соответствующей частоте коллективной моды $\omega_0(q)$, найденной в линейном приближении:

$$\Psi_{\text{sol}}(x, t) = \frac{\psi_0}{\text{ch}[(x - vt)/l_0]} \exp(iqx/a - i\omega t). \quad (9)$$

Здесь нелинейный сдвиг частоты волны связан с амплитудой солитона, $\omega_0^2(q) - \omega^2 = \omega_0^2 U(q) \psi_0^2 / 2$, скорость движения центра области локализации совпадает с групповой скоростью волны линейной теории, а ширина области локализации l_0 обратно пропорциональна амплитуде солитона:

$$V = \omega_0 a \frac{\partial \varepsilon_0(q)}{\partial q}, \quad l_0 = \frac{a}{\psi_0} \sqrt{\frac{D_q}{U(q)} \left(1 - \frac{v^2}{v_c^2}\right)},$$

$$D_q = \frac{\partial^2}{\partial q^2} \varepsilon_0^2(q), \quad (10)$$

и введено предельное значение скорости $v_c = a\omega_0 \sqrt{D_q}/2$. В этих формулах восстановлены размерности физических величин. Напомним, что a — период цепочки, и выше использован безразмерный квазиимпульс q .

Таким образом, динамика системы магнитных частиц, упорядоченных в цепочку, включает собственную моду колебаний, которой соответствует вращение деформированной цепочки с определенной частотой. Характер деформации определяется квазиимпульсом q , при немалых q частота сильно зависит от амплитуды. Характерная частота определяется величиной $\omega_0 = \mu_0/\sqrt{ma^5}$, которую удобно записать через намагниченность насыщения и плотность материала: $\omega_0 = (M_s/a)\sqrt{\pi/6\rho}$. Для стандартного материала, используемого для приготовления феррожидкостей, например магнетита Fe_3O_4 , $M_s = 500$ Гс, $a = 10\text{--}20$ нм, $\rho = 5$ г/см³. Это дает оценку $\omega/2\pi \sim 6\omega_0/2\pi \sim 100\text{--}200$ МГц, что удобно для измерений и важно для ряда приложений в радиоэлектронике и вычислительной технике. Характерная скорость солитона $a\omega_0$ невелика, порядка 10 м/с.

Результаты анализа позволяют сделать вывод об устойчивости цепочечного кластера частиц, что важно для общей теории феррожидкости. Ранее было показано, что в линейном приближении неустойчивость имеет место только тогда, когда взаимодействие Ван дер Ваальса существенно сильнее, чем диполь-дипольное взаимодействие, конкретно при $\sigma \geq \sigma_c \approx 113$ [30]. В нелинейном случае это условие существенно более мягкое, и неустойчивость относительно возмущений вида $u_l \sim \exp(iqn)$ с $q \simeq \pi/a$ и немалой амплитудой может существовать даже для системы с чисто дипольным взаимодействием (см. рис. 2). Понятно, что такая «нелинейная» неустойчивость не носит такой абсолютный характер, как неустойчивость в линейной теории. Фактически, при наличии нелинейной неустойчивости цепочка является метастабильной, и ее разрушение, что можно рассматривать как начальный этап формирования плотной фазы феррожидкости [30], происходит только при сильных деформациях.

Рассмотрение в работе проводилось без учета движения жидкости, вызванного движением частиц. Отметим только, что из-за наличия вязкости при движении частицы в жидкости в данной задаче должно появиться затухание рассмотренных мод. Затухание можно описать, введя стандартные диссипативные функции для вязкого движения, которые пропорцио-

нальны квадратичной форме от скоростей частиц [34]. В результате скорость диссипации энергии будет пропорциональна квадрату частоты, т.е. декремент затухания будет пропорционален частоте волны.

Таким образом, найденные коллективные моды даже в области линейного закона дисперсии заведомо не являются голдстоуновскими возбуждениями, их затухание пропорционально частоте и коэффициенту вязкого трения частицы в жидкости. Более детальные оценки выходят за рамки данной работы; тем более, что эффекты вязкости не влияют на выводы работы об устойчивости цепочки и возможных сценариях нарушения ее устойчивости и перехода в плотную фазу (трехмерный кластер).

Работа поддержана государственной программой «Нанотехнологии и наноматериалы» проект № 1.1.3.27.

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1988).
2. А.М. Kosevich, В.А. Ivanov, and А.С. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990); *Physica D* **3**, 363 (1981).
3. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, УроРАН, Екатеринбург (2009).
4. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 516 (1977); *ФНТ* **3**, 906 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 440 (1977)].
5. В.А. Ivanov and А.К. Kolezhuk, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1859 (1995).
6. А.А. Жмудский, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 899 (1997); *ЖЭТФ* **115**, 1511 (1999); Д.В. Филин, Б.А. Иванов, *ФНТ* **37**, 916 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 729 (2011)]; *Письма в ЖЭТФ* **97**, 291 (2013).
7. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 495 (1976); *ЖЭТФ* **72**, 2000 (1977).
8. А.С. Ковалев, А.М. Косевич, К.В. Маслов, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 321 (1979).
9. Б.А. Иванов, В.А. Стефанович, *ЖЭТФ* **91**, 638 (1986); В.А. Ivanov and V.A. Stephanovich, *Phys. Lett. A* **141**, 89 (1989).
10. А.И. Ахизер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
11. Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва (2001).
12. J.M. Luttinger and L. Tisza, *Phys. Rev.* **70**, 954 (1946).
13. П.И. Белобров, Р.С. Гехт, В.А. Игнатченко, *ЖЭТФ* **84**, 1097 (1983).
14. В.М. Розенбаум, В.М. Огенко, А.А. Чуйко, *УФН* **161**, 79 (1991).
15. J.E.L. Bishop, A.Yu. Galkin, and В.А. Ivanov, *Phys. Rev. B* **65**, 174403 (2002); А.Ю. Галкин, Б.А. Иванов, А.Ю. Меркулов, *ЖЭТФ* **128**, 1260 (2005); А.Ю. Галкин, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 450 (2006).

16. И.П. Каретникова, И.М. Нефедов, М.В. Сапожников, А.А. Фраерман, И.А. Шершевский, *ФТТ* **43**, 2030 (2001).
17. P. Politi and M.G. Pini, *Phys. Rev. B* **66**, 214414 (2002).
18. A.Yu. Galkin, B.A. Ivanov, and C.E. Zaspel, *Phys. Rev. B* **74**, 144419 (2006); P.V. Bondarenko, A.Yu. Galkin, B.A. Ivanov, and C.E. Zaspel, *Phys. Rev. B* **81**, 224415 (2010).
19. R. Skomski, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, R841 (2003).
20. *Advanced Magnetic Nanostructures*, D.J. Sellmyer and R. Skomski (eds.), Springer, New York (2006).
21. M. Dvornik, P. Bondarenko, B.A. Ivanov, and V.V. Kruglyak, *J. Appl. Phys.* **109**, 07B912 (2011).
22. A.A. Awad, G.R. Aranda, D. Dieleman, K.Y. Guslienko, G.N. Kakazei, B.A. Ivanov, and F.G. Aliev, *Appl. Phys. Lett.* **97**, 132501 (2010).
23. V.V. Kruglyak, S.O. Demokritov, and D. Grundler, *J. Phys. D* **43**, 264001 (2010).
24. Р. Розенцвейг, *Феррогидродинамика*, Мир, Москва (1989).
25. S.Y. Yang, Y.H. Chao, H.E. Horng, S.Y. Yang, Y.H. Chao, H.E. Horng, C.-Y. Hong, and H.C. Yang, *J. Appl. Phys.* **97**, 093907 (2005).
26. Y. Zhang, L. Sun, Y. Zhai, Y. Zhang, L. Sun, Y. Zhai, H.B. Huang, R.S. Huang, H.X. Lu., and H.R. Zhai, *J. Appl. Phys.* **101**, 09J109 (2007).
27. S.M. Zhou, M.T. Zhang, H.C. Gong, S. Zhou, X.T. Zhang, H.C. Gong, B. Zhang, Z.S. Wu, Z.L. Du, and S.X. Wu, *J. Phys.: Condens. Mater.* **20**, 075217 (2008).
28. V. Schaller, G. Wahnstrom, A. Sanz-Velasco, V. Schaller, G. Wahnstrom, A. Sanz-Velasco, P. Enoksson, and C. Johansson, *J. Magn. Magn. Mater.* **321**, 1400 (2009).
29. R. Rungsawang, J. da Silva, C. Wu, R. Rungsawang, J. da Silva, C.P. Wu, E. Sivaniah, A. Ionescu, C.H.W. Barnes, and N.J. Darton, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 255703 (2010).
30. С.А. Дзян, Б.А. Иванов, *ЖЭТФ* **142**, 969 (2012).
31. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Киев, Наукова думка (1989).
32. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1793 (1974).
33. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва (1977).
34. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

Nonlinear dynamics and solitons for a chain of spherical magnetic nanoparticles

S.A. Dzian and B.A. Ivanov

Freely moving magnetic particles with a magnetic dipole interaction of their magnetic moments can be organized in a dense phase, the simplest example of which is a linear chain. The nonlinear dynamics associated with the displacement of the particles in such a chain, is investigated with taking into account both the magnetic dipole interaction and the molecular van der Waals interaction is investigated. It is shown that such a chain is characterized by interesting properties of nonlinear dynamical system. For this model one can construct both an exact solution an exact solution describing the propagating nonlinear waves of constant amplitude with a wavelength comparable to the distance between the particles, and soliton solutions. The role of nonlinearity for these vibrations is very important for the problem of chain stability upon transition to a dense three-dimensional cluster.

PACS: 05.45.Yv Solitons;

75.75.-c Magnetic properties of nanostructures;

75.75.Jn Dynamics of magnetic nanoparticles.

Keywords: magnetic nanoparticles, nonlinear dynamics, soliton, magnetic dipole interaction, cluster.