

Направленное движение вихрей и рэчет-эффект в анизотропном сверхпроводнике с периодическим потенциалом пиннинга

В.А. Шкловский^{1,2}, Джин-Тек Со¹

¹Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: shklovskij@gmail.com; iloveukraine91@gmail.com

²Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
Институт теоретической физики, ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина

Статья поступила в редакцию 16 июня 2014 г., опубликована онлайн 22 октября 2014 г.

При нулевой температуре рассмотрена двумерная адиабатическая рэчет-динамика абрикосовских вихрей в симметричном периодическом потенциале пиннинга в присутствии постоянного и переменного транспортного тока и анизотропии вязкого движения вихрей. В рамках модели пилообразного потенциала пиннинга получены и проанализированы точные аналитические формулы для двух анизотропных нелинейных вольт-амперных характеристик вдоль и поперек направления транспортного тока. Физическое происхождение этих нечетных по отношению к инверсии транспортного тока напряжений обусловлено взаимодействием между четным по отношению к инверсии магнитного поля эффектом направленного движения вихрей и асимметрией потенциала пиннинга, возникающей за счет его наклона постоянной составляющей транспортного тока.

При нульовій температурі розглянуто двовимірну адиабатичну речет-динаміку абрікосовських вихорів у симетричному періодичному потенціалі пінінгу у присутності постійного та змінного транспортного струму і анізотропії в'язкого руху вихорів. У рамках моделі пілкоподібного потенціалу пінінгу отримано і проаналізовано точні аналітичні формули для двох анізотропних нелінійних вольт-амперних характеристик вздовж та поперек напрямку транспортного струму. Фізичне походження цих непарних по відношенню до інверсії транспортного струму напруг обумовлено взаємодією між парним по відношенню до інверсії магнітного поля ефектом спрямованого руху вихорів та асиметрією потенціалу пінінгу, яка виникає за рахунок його нахилу постійної складової транспортного струму.

PACS: 74.25.Uv Вихревые фазы (включая вихревые решетки, вихревые жидкости и вихревые стекла);
74.25.Wx Вихревой пиннинг (включая механизмы и течение потока);
74.25.Sv Критические токи.

Ключевые слова: рэчет-эффект, анизотропия вязкости, периодический потенциал пиннинга, двумерная динамика вихрей.

1. Введение

Как известно, резистивные свойства сверхпроводников второго рода в смешанном состоянии определяются динамикой вихрей, которая в присутствии центров пиннинга (pinning — закрепление, прищипливание) может быть описана как движение вихрей в некотором потенциале пиннинга [1]. В простейшем случае такой потенциал пиннинга предполагается периодическим (ППП) и одномерным (1D). Однако в таком подходе не учтены два важных для экспери-

мента обстоятельства. Одно из них связано с возможностью проанализировать не только одномерную, но и двумерную (2D) динамику абрикосовских вихрей в периодическом потенциале пиннинга типа «стиральной доски» (WPP — *washboard* pinning potential) в том случае, когда направление транспортного тока не совпадает с направлением «каналов» ППП. В таком случае появляется не только продольное, но и поперечное напряжение, зависящее от угла α между направлением тока и каналов ППП (см. рис. 1), а направления сред-

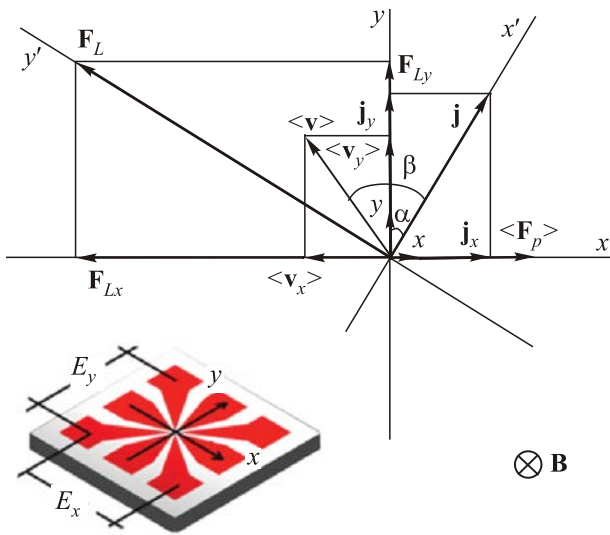


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Система координат xu с единичными ортами \mathbf{x} и \mathbf{y} связана с каналами потенциала пиннинга, которые параллельны оси y . Координатная система $x'y'$ связана с направлением транспортного тока (вектор плотности тока \mathbf{j} направлен вдоль оси x'). α — угол между \mathbf{j} и осью анизотропии y ; β — угол между векторами \mathbf{j} и средней скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$; $\langle \mathbf{F}_p \rangle$ — средняя сила пиннинга; \mathbf{F}_L — сила Лоренца для вихря; \mathbf{B} — вектор магнитного поля.

ней скорости вихря и действующей на него движущей силы Лоренца в общем случае не совпадают, т.е. пиннинг является анизотропным.

Второе обстоятельство связано с тем, что ранее не было исследовано влияние возможной анизотропии вязкого слагаемого в уравнении движения вихря на двумерную динамику и резистивные свойства вихревого ансамбля как на постоянном, так и на переменном токе. Включение в рассмотрение анизотропии вязкости связано с тем, что в большинстве ВТСП кристаллов анизотропия в плоскости \mathbf{ab} достаточно велика: например, для кристаллов YBCO величина магнитосопротивления при движении вихрей вдоль осей \mathbf{a} или \mathbf{b} может различаться более чем в два раза [2].

Следует отметить, что недавно в работе [3] в рамках подхода Фоккера–Планка рассматривалась аналогичная изучаемой в настоящей работе 2D задача при конечных температурах T и произвольной величине плотности постоянного тока, но в отсутствие анизотропии вязкости. В статье [3], однако, не рассматривались рэчет-эффект (ratchet — храповик) и гайдинг-эффект (guiding — направляющий) в присутствии переменного тока. Сравнение полученных там [3] и в настоящей работе результатов обсуждается в Заключение.

Перейдем теперь к обсуждению рэчет-эффекта в динамике абрикосовских вихрей в сверхпроводниках второго рода. В течение последних двух десятилетий вихревые рэчеты, с которыми связана асимметричная вихревая динамика, привлекают большое внимание

[3–16]. В сущности, вихревой рэчет — это система, где абрикосовский вихрь может приобрести движение с постоянной средней скоростью в асимметричном потенциале пиннинга в присутствии детерминированных и (или) стохастических сил, средние значения которых по времени равны нулю (для детального рассмотрения см. работы [4–6]). Асимметрия в потенциале пиннинга рассматривается по отношению к инверсии направления тока. В принципе, есть два основных способа реализации такой асимметрии потенциала пиннинга. Первый — когда пространственная симметрия ППП может быть нарушена сама по себе, т.е. ППП может быть асимметричным в отсутствие постоянного тока. Второй способ заключается в том, что изначально симметричный ППП подвергается добавочной постоянной движущей силе, возникающей за счет протекания постоянного транспортного тока, что и приводит к эффективному асимметричному потенциалу пиннинга — случай, рассматриваемый в данной работе (см. ниже рис. 3 в разд. 2.3.). Возникающая таким образом пространственная асимметрия изначально симметричного ППП называется *наклонным рэчетом (tilting ratchet)*. Независимо от способа введения асимметрии в систему с практической точки зрения общей чертой сверхпроводящих рэчетов является их свойство выпрямления тока: включение переменного тока в сверхпроводящий образец с асимметричным ППП может привести к усредненному по периоду переменной силы движению вихря, направление которого определяется только асимметрией потенциала пиннинга.

Следует отметить, что рэчет-эффект может быть использован для удаления вихрей из низкотемпературных сверхпроводников [7]. Недавно рэчет-эффект вихревой решетки был экспериментально исследован в пленках Nb, напыленных на решетку нанотреугольников из Ni, создающих асимметричный ППП [8]. Подобные эффекты обсуждались также для сверхпроводящих пленок $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ с антидотами [9]. Однако из-за сложного вида асимметричных потенциалов в этих работах последовательное теоретическое описание этих экспериментальных результатов отсутствует.

Ниже мы предлагаем рассмотреть простейшую модель рэчета, для которой в приближении одиночного вихря существует полное теоретическое описание 2D вихревой динамики с одноосным ППП. Задача будет решаться в рамках элементарного подхода, соответствующего подходу Фоккера–Планка при $T = 0$ [1]. Кроме двух предельных случаев продольной и поперечной геометрии, когда вихри движутся вдоль или поперек каналов ППП, для всех промежуточных углов будет учитываться появление не только продольного, но и поперечного рэчет-эффекта, возникающего из-за направленного движения вихря (guided vortex motion) вдоль каналов ППП.

Целью настоящей работы является анализ двумерной адиабатической рэчет-динамики абрикосовского вихря в симметричном периодическом потенциале пиннинга в присутствии постоянного и переменного транспортного тока и наличия анизотропии вязкого движения вихрей. В рамках модели пилообразного потенциала пиннинга будут получены точные аналитические формулы для двух анизотропных нелинейных вольт-амперных характеристик (ВАХ) вдоль и поперек направления транспортного тока и проанализированы их зависимости от параметров задачи.

План изложения работы следующий. В разд. 2.1. обсуждается наиболее общая формулировка решаемой задачи. Затем в разд. 2.2. изучается простой случай, когда сила пиннинга равна нулю, т.е. вихри движутся в режиме течения магнитного потока (flux flow regime). На примере этого случая выясняется роль анизотропии вязкости, которая даже в отсутствие пиннинга приводит к направленному движению вихрей, а также влияние инверсии направления внешнего магнитного поля на резистивные отклики. В разд. 2.3. анализируется роль пиннинга в формировании продольных и поперечных резистивных откликов как на постоянном, так и на переменном токе. В разд. 3 графически проанализированы эти экспериментально наблюдаемые величины как функции угла α , постоянного тока смещения плотностью j_0 , амплитуды переменного тока плотностью j_1 и анизотропии вязкости γ . В разд. 4 подробно обсуждается предельный случай адиабатического режима, т.е. объясняются особенности откликов рэчета на переменном токе на основе статических ВАХ. В заключительном разд. 5 обсуждаются полученные результаты и формулируются выводы.

2. Формулировка и анализ задачи

2.1. Общая формулировка решаемой задачи

Рассмотрим простейшую модель анизотропного пиннинга, в которой можно достаточно наглядно описать поведение нелинейных продольного E_{\parallel} и поперечного E_{\perp} электрических откликов как функции плотности транспортного тока j , угла α между направлением \mathbf{j} и осью анизотропии потенциала пиннинга и параметра анизотропии вязкости γ для случая, когда температура образца равна нулю. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать задачу о динамике вихря как чисто механическую, которая ввиду простоты выбранного потенциала пиннинга вихрей позволяет решить ее точно.

Для вычисления $E_{\parallel,\perp}(j, \alpha, \gamma)$ используем ту же схему расчета, которая была описана в [1]. А именно, сначала из уравнения движения вихря найдем его среднюю скорость $\langle \mathbf{v} \rangle$ как функцию транспортного тока и остальных параметров задачи, а затем найдем результирующее электрическое поле \mathbf{E} . Мы рассмотрим 2D

динамику вихря в плоскости xu , так как направление вектора плотности транспортного тока \mathbf{j} и каналов ППП в общем случае не совпадают.

Итак, пусть ось x с ее ортом \mathbf{x} (см. рис. 1) направлена перпендикулярно каналам ППП, а ось u с ортом \mathbf{u} — вдоль этих каналов. Уравнение движения для вихря, который движется со скоростью \mathbf{v} , в магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{n}$, где $B = |\mathbf{B}|$, $\mathbf{n} = n\mathbf{z}$, \mathbf{z} — орт в направлении оси z и $n = \pm 1$, имеет вид

$$\hat{\eta}\mathbf{v} = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_p, \quad (1)$$

где $\mathbf{F}_L = n(\Phi_0/c)\mathbf{j} \times \mathbf{z}$ — сила Лоренца, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t) = j_0 + j_1 \cos \omega t$, где j_0 и j_1 есть амплитуды плотности постоянного и переменного тока с частотой ω соответственно, Φ_0 — квант магнитного потока [17], c — скорость света, $\hat{\eta}$ — тензор вязкости вихря. В уравнении (1) $\mathbf{F}_p = -\nabla U_p(x)$ — анизотропная сила пиннинга, а $U_p(x)$ — планарный ППП.

Если x и u — координаты соответственно поперек и вдоль оси анизотропии, то в xu -представлении тензор $\hat{\eta}$ диагонален, и удобно определить η_0 и γ по формулам

$$\eta_0 = \sqrt{\eta_{xx}\eta_{yy}}, \quad \gamma = \sqrt{\eta_{xx}/\eta_{yy}}, \quad \eta_{xx} = \eta_0\gamma, \quad \eta_{yy} = \eta_0/\gamma, \quad (2)$$

где η_0 — усредненный коэффициент вязкого трения, γ — безразмерный параметр анизотропии.

2.2. Движение вихрей в режиме течения магнитного потока

Рассмотрим сначала движение вихря в отсутствие пиннинга (т.е. $\mathbf{F}_p = 0$). Уравнение движения вихря имеет вид

$$\hat{\eta}\mathbf{v}^0 = \mathbf{F}_L^0. \quad (3)$$

В этом случае легко получить скорости вихря в проекциях на оси xu -системы координат (на постоянном токе)

$$v_x^0 = F_{Lx}^0/(\eta_0\gamma), \quad v_y^0 = F_{Ly}^0/\eta_0. \quad (4)$$

Основной физической величиной, позволяющей определить резистивные характеристики образца, т.е. тензор сопротивления на постоянном токе, является величина электрического поля, индуцируемого движущейся вихревой системой:

$$\mathbf{E}^0 = (1/c)\mathbf{B} \times \mathbf{v}^0 = (nB/c)(-v_y^0\mathbf{x} + v_x^0\mathbf{y}). \quad (5)$$

Учтем далее, что экспериментально измеряемые резистивные отклики (продольный и поперечный по отношению к направлению тока) связаны с E_x^0 и E_y^0 откликами в системе координат xu простыми соотношениями [1]:

$$\begin{cases} E_{\parallel}^0 = E_x^0 \sin \alpha + E_y^0 \cos \alpha, \\ E_{\perp}^0 = -E_x^0 \cos \alpha + E_y^0 \sin \alpha, \end{cases} \quad (6)$$

где $E_x^0 = -(nB/c)v_y^0$ и $E_y^0 = (nB/c)v_x^0$.

На постоянном токе в отсутствие пиннинга продольные и поперечные (по отношению к направлению тока \mathbf{j}) отклики и магнитосопротивления соответственно определены соотношениями

$$\begin{cases} E_{\parallel}^0 = (\rho_{f0} j / \gamma) (\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha), \\ E_{\perp}^0 = (\rho_{f0} j / \gamma) (1 - \gamma^2) \sin 2\alpha / 2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \rho_{\parallel}^0 = (\rho_{f0} / \gamma) (\gamma^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha), \\ \rho_{\perp}^0 = (\rho_{f0} / \gamma) (1 - \gamma^2) \sin 2\alpha / 2, \end{cases} \quad (8)$$

где $\rho_{f0} \equiv B\Phi_0 / (\eta_0 c^2)$ — удельное сопротивление течения магнитного потока.

Так как в формулах (8) отсутствуют нечетные по $n = \pm 1$ компоненты, то формулы (8) являются четными по отношению к инверсии направления магнитного поля $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$.

Следует отметить, что соотношения (8) не зависят от величины плотности транспортного тока, т.е. соответствующие ВАХ линейны. Иными словами, оба отличных от нуля резистивных отклика соответствуют режиму течения магнитного потока [1], и разница между ними состоит лишь в различной зависимости магнитосопротивлений ρ_{\parallel}^0 , ρ_{\perp}^0 от параметров α и γ . Включение в рассмотрение потенциала пиннинга (см. следующий раздел) существенно изменит последние выводы.

Рассмотрим теперь несколько простых, физически различных предельных случаев, следующих из соотношений (8). Как и следовало ожидать, видно, что в отсутствие анизотропии ($\gamma = 1$) динамика вихря изотропна (т.е. не зависит от угла α) и соответствует не зависящему от инверсии направления магнитного поля режиму течения потока, когда отлична от нуля единственная продольная (четная по отношению к замене $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$) компонента магнитосопротивления $\rho_{\parallel}^0 = \rho_{f0}$.

Наличие анизотропии вязкости ($\gamma \neq 1$) приводит к появлению нового, четного по отношению к инверсии $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$ магнитосопротивления ρ_{\perp}^0 , приводящего к анизотропии движения вихрей, т.е. несовпадению направлений \mathbf{v} и \mathbf{F}_L . Соответствующую четную анизотропию удобно характеризовать углом β , который определяется соотношением

$$\text{ctg } \beta = -\rho_{\perp}^0 / \rho_{\parallel}^0 = (\gamma^2 - 1) / (\gamma^2 \text{tg } \alpha + \text{ctg } \alpha). \quad (9)$$

По аналогии с появлением направленного движения вихрей при наличии одноосного ППП [18] (в отсут-

ствии эффекта Холла и анизотропии вязкости) угол β можно трактовать аналогично таковому для guiding-эффекта в задаче о пиннинге. Поведение β и $\text{ctg } \beta$, следующее из уравнения (9), было рассмотрено в работе [19] более подробно.

2.3. Продольные и поперечные резистивные отклики при наличии пиннинга

При формулировке модели мы предположили, что притяжение вихря к дефекту может быть описано потенциалом пиннинга $U_p(x)$, который будем считать зависящим только от координаты x и периодическим, так что $U_p(x) = U_p(x + 2a)$, где $2a$ — период. Тогда сила пиннинга \mathbf{F}_p всегда направлена вдоль оси анизотропии x и не имеет составляющей в направлении вдоль оси y , т.е. $F_{py} = 0$. Ниже мы для простоты используем изображенный на рис. 2 пилообразный ППП кусочно-линейного вида:

$$U_p(x) = \begin{cases} -F_p x, & 0 \leq x \leq a, \\ F_p (x - 2a), & a \leq x \leq 2a, \end{cases} \quad (10)$$

где $2a$ — ширина потенциальной ямы канала и период.

Так как $\mathbf{F}_p = -\nabla U_p(x)$, то отсюда следует, что $F_p^+ = F_p$, а $F_p^- = -F_p$, где индексы (\pm) соответствуют левой и правой частям потенциальной ямы (т.е. $F_p^{\pm} = \pm F_p$).

Элементарная «потенциальная яма» для $U_p(x)$ (см. рис. 2 или на рис. 3 «исходный потенциал») такого вида состоит из двух половин — в левой половине направление силы пиннинга F_p^+ совпадает с направлением оси x , а в правой F_p^- — противоположно ей. Тогда очевидно, что в отсутствие движущей силы F

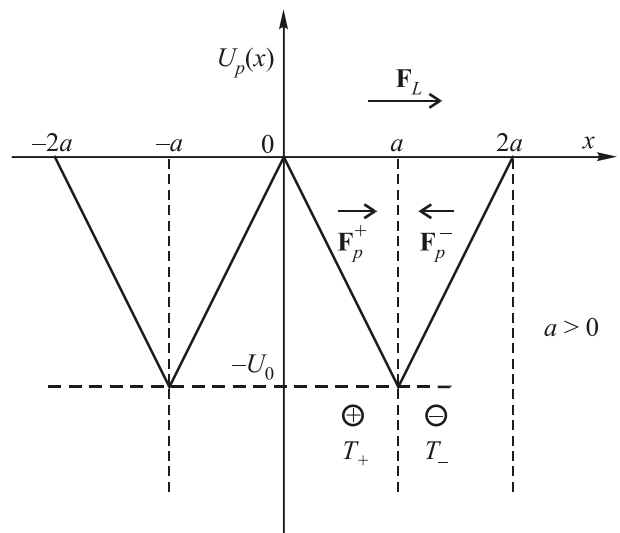


Рис. 2. Симметричный пилообразный потенциал пиннинга $U_p(x)$: $2a$ — период потенциала (ширина каналов потенциала), a — координата минимума потенциальной ямы и U_0 — глубина потенциальной ямы.

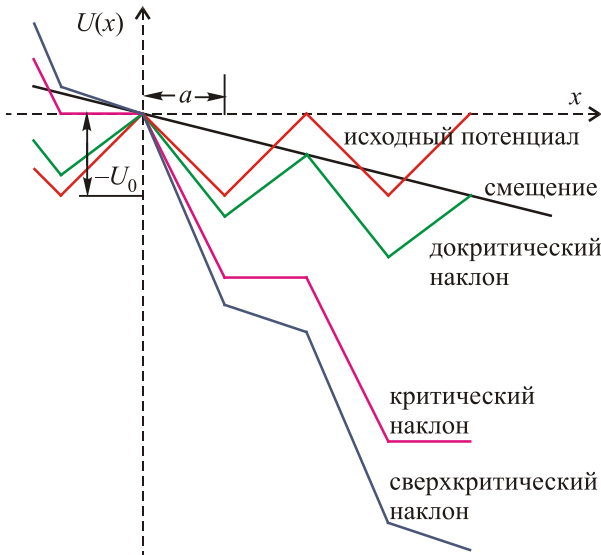


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Изменение эффективного потенциала пиннинга $U(x) \equiv U_p(x) - Fx$ с постепенным увеличением компоненты движущей силы F в направлении x , где $U_p(x)$ — представленный на рис. 2 периодический потенциал пиннинга с его глубиной U_0 и периодом $2a$.

(например, силы Лоренца F_L) при $T = 0$ вихрь локализуется на дне ям (координаты $a + 2ka$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которому соответствует величина глубины потенциальной ямы U_0 , т.е. он не может двигаться, поскольку не в состоянии преодолеть потенциальные барьеры. Пусть теперь в направлении оси x действует постоянная сила F так что дополнительный потенциал, связанный с ней, есть $U_F(x) = -Fx$ (см. на рис. 3 «смещение»). Так как суммарный потенциал, действующий на вихрь, есть $U(x) = U_p(x) - Fx$, и с ростом F он деформируется таким образом, что сначала исходная яма наклоняется с сохранением положения вихря на дне асимметричной ямы (см. на рис. 3 «докритический наклон»), а затем при $F \geq |F_p^\pm|$ исчезают барьеры для движения вихрей вдоль положительного направления оси x , т.е. вихрь получает возможность двигаться в направлении движущей силы (см. на рис. 3 «критический наклон» и «сверхкритический наклон»).

Итак, если используемый ППП симметричный, т.е. $U_p(-x) = U_p(x)$, он может проявить свойства рэчета только при наличии внешнего смещения постоянной силы F , вызывая его наклон. В зависимости от значения смещения F при отсутствии переменной силы при $T = 0$ в движении вихря возникают два качественно различных режима. (1) Если $F < F_p$, хотя исходная потенциальная яма наклонена, она сохраняет среднее положение вихря, т.е. вихрь находится в *локализованном* состоянии и его скорость $v = 0$. При критическом значении наклона, т.е. когда $F = F_p$, правая сторона потенциального барьера исчезает. (2) Наконец, когда $F > F_p$, направление движения вихря совпадает с на-

правлением движущей силы F , т.е. вихрь оказывается двигающимся в направлении оси x с осциллирующей мгновенной скоростью $v(x)$.

Для того чтобы найти ВАХ при $F \equiv F_L > F_p$, необходимо найти из уравнения (1) среднюю скорость вихря $\langle \mathbf{v} \rangle$ в потенциале $U(x)$. Для этого запишем уравнение (1) в проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} \eta_0 \gamma v_x^+ = F_{Lx} + F_p^+ = F_{Lx} + F_p, \\ \eta_0 \gamma v_x^- = F_{Lx} + F_p^- = F_{Lx} - F_p, \\ (\eta_0 / \gamma) v_y = F_{Ly}, \end{cases} \quad (11)$$

где первые два уравнения для x принадлежат интервалам (+) и (-) соответственно. Отсюда значения v_x в каждом из интервалов (+), (-) (см. рис. 2) будут

$$v_x^\pm = (F_{Lx} \pm F_p) / (\eta_0 \gamma). \quad (12)$$

Зная значения скорости v_x на каждом из интервалов, легко найти время движения вихря на каждом из них:

$$T_\pm = a / v_x^\pm = a \eta_0 \gamma / (F_{Lx} \pm F_p), \quad (13)$$

а затем, используя (13), по формуле $\langle v_x \rangle = 2a / (T_+ + T_-)$ вычислить среднюю скорость вдоль оси x :

$$\langle v_x \rangle = [F_{Lx} / (\eta_0 \gamma)] \cdot v_p(F_{Lx}) \text{ для } |F_{Lx}| > F_p, \quad (14)$$

где анизотропная эффективная подвижность вихря v_p дается формулой

$$v_p(F_{Lx}) = [1 - (F_p / F_{Lx})^2] \text{ для } |F_{Lx}| > F_p. \quad (15)$$

Итак, средняя скорость $\langle v_x \rangle$ для $|F_{Lx}| > F_p$ (14) равна произведению двух сомножителей. Первый множитель $F_{Lx} / (\eta_0 \gamma)$ в формуле (14) соответствует скорости вихрей в режиме течения магнитного потока, когда влияние пиннинга отсутствует (см. формулу (4)). Вторым множителем v_p в формуле (14), который имеет физический смысл вероятности вихря преодолеть потенциальный барьер, созданный каналами асимметричного потенциала пиннинга, является безразмерной функцией от отношений (F_p / F_{Lx}) , такой, что $0 \leq v_p \leq 1$ (см. формулу (15)). Если же $|F_{Lx}| < F_p$, то $\langle v_x \rangle = 0$.

Перейдем от функции $v_p(F_{Lx})$ в зависимости от движущей силы к зависимости функции $v_p(j, \alpha)$ от плотности тока и угла. Если вихрь обтекается транспортным током плотностью j , то на единицу его длины действует сила Лоренца $\mathbf{F}_L = (1/c) \mathbf{j} \times \Phi_0$, где \mathbf{j} — плотность транспортного тока в месте, где расположена сердцевина вихря, $\Phi_0 = \mathbf{n} \Phi_0$, где \mathbf{n} — единичный вектор вдоль направления магнитного поля, а Φ_0 — квант магнитного потока [17]. Тогда, учитывая, что $\mathbf{j} \times \mathbf{n} = n(j_y \mathbf{x} - j_x \mathbf{y})$ и $\mathbf{F}_L = F_{Lx} \mathbf{x} + F_{Ly} \mathbf{y}$, определим компоненты силы Лоренца на оси x и y :

$$\begin{aligned} F_{Lx} &= n(\Phi_0/c)j_y = n(\Phi_0/c)j \cos \alpha, \\ F_{Ly} &= -n(\Phi_0/c)j_x = -n(\Phi_0/c)j \sin \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Зависящая от плотности тока j и угла α средняя скорость $\langle v_x \rangle$ тогда дается формулой

$$\langle v_x \rangle = [F_{Lx}/(\eta_0 \gamma)] \cdot v_p(j, \alpha), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} v_p(j, \alpha) &= \begin{cases} 1 - [j_c(\alpha)/j]^2, & |j| > j_c(\alpha), \\ 0, & |j| < j_c(\alpha), \end{cases} \\ j_c(\alpha) &\equiv j_c(0)/\cos \alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

есть зависящая от плотности тока j и угла α анизотропная эффективная подвижность вихря. При вычислении (18) мы учли, что $(F_p/F_{Lx}) = [j_c(\alpha)/j]$, где $j_c(\alpha)$ — критическая плотность тока для угла α . Из третьего уравнения (11) следует, что

$$\langle v_y \rangle = F_{Ly} \gamma / \eta_0. \quad (19)$$

Воспользуемся теперь формулой

$$\mathbf{E} = (1/c) \mathbf{B} \times \langle \mathbf{v} \rangle \quad (20)$$

для того, чтобы вычислить наблюдаемые на опыте продольное E_{\parallel} и поперечное E_{\perp} поля двумерной динамики вихрей через $\langle v_x \rangle$ и $\langle v_y \rangle$, даваемые формулами (17) и (19). Возникшее течение магнитного потока создает по закону электромагнитной индукции Фарадея электрическое поле \mathbf{E} . Предварительно соотношениями $\mathbf{e}_{\parallel} \equiv \mathbf{j}/j$ и $\mathbf{e}_{\perp} \equiv \mathbf{z} \times \mathbf{e}_{\parallel}$ введем систему координат, оси которой параллельны и перпендикулярны вектору плотности транспортного тока \mathbf{j} (см. рис. 1). Тогда

$$E_{\parallel} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_{\parallel}, \quad E_{\perp} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_{\perp}. \quad (21)$$

Воспользовавшись теперь тем, что $\mathbf{E} = E_x \mathbf{x} + E_y \mathbf{y}$ и формулой (20), легко получить

$$\begin{cases} E_{\parallel} = E_x \sin \alpha + E_y \cos \alpha = (nB/c) \left(-\langle v_y \rangle \sin \alpha + \langle v_x \rangle \cos \alpha \right), \\ E_{\perp} = -E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha = (nB/c) \left(\langle v_y \rangle \cos \alpha + \langle v_x \rangle \sin \alpha \right). \end{cases} \quad (22)$$

Подставляя в (22) формулы (17) и (19) и учтя еще выражения (16) для F_{Lx} и F_{Ly} , мы получим

$$\begin{cases} E_{\parallel}(j, \alpha, \gamma) = (\rho_{f0} j / \gamma) \left[\gamma^2 \sin^2 \alpha + v_p(j, \alpha) \cos^2 \alpha \right] \equiv E_{\parallel}^a(j) + E_{\parallel}^b(j), \\ E_{\perp}(j, \alpha, \gamma) = (\rho_{f0} j / \gamma) \left[v_p(j, \alpha) - \gamma^2 \right] \sin 2\alpha / 2 \equiv E_{\perp}^a(j) + E_{\perp}^b(j), \end{cases} \quad (23)$$

где $\rho_{f0} \equiv B\Phi_0/(\eta_0 c^2)$ — удельное сопротивление течения магнитного потока, а правые части обоих уравнений (23) определены в следующем разделе формулами (24). Если $v_p(j) = 1$, то мы возвращаемся к формуле (7), т.е. к случаю отсутствия пиннинга.

3. Графический анализ откликов

Рассмотрим теперь движение вихря в адиабатическом приближении для простейшей модели пилообразного симметричного потенциала пиннинга, который наклоняется смещением постоянного тока. Наша

цель заключается в качественном объяснении, почему выпрямленное напряжение постоянного тока появляется в отклике на включение переменного тока j_1 . Для этого сначала рассмотрим ВАХ на постоянном токе для симметричного потенциала пиннинга в отсутствие начального наклона, а именно, уравнения (23), в которых мы разделим продольную и поперечную ВАХ на две элементарные $E_f(j) = j$ и $E_p(j) = jv_p(j)$ с соответствующими коэффициентами, даваемыми следующими формулами:

$$\begin{cases} E_{\parallel}^a(j) = \rho_{\parallel}^a E_f(j), & E_{\parallel}^b(j) = \rho_{\parallel}^b E_p(j), & \rho_{\parallel}^a \equiv \rho_{f0} \gamma \sin^2 \alpha, & \rho_{\parallel}^b \equiv \rho_{f0} \cos^2 \alpha / \gamma, \\ E_{\perp}^a(j) = \rho_{\perp}^a E_f(j), & E_{\perp}^b(j) = \rho_{\perp}^b E_p(j), & \rho_{\perp}^a \equiv -\rho_{f0} \gamma \sin 2\alpha / 2, & \rho_{\perp}^b \equiv \rho_{f0} \sin 2\alpha / 2\gamma. \end{cases} \quad (24)$$

Добавив теперь к j смещение постоянного тока j_0 , видим, что исходная задача о вычислении рэчет-откликов $E_{\parallel}(j+j_0)$ и $E_{\perp}(j+j_0)$ сводится к вычислению линейных комбинаций (с коэффициентами $\rho_{\parallel, \perp}^a$ и $\rho_{\parallel, \perp}^b$) рэчет-откликов только на двух простейших ВАХ: $E_f(j+j_0) = j+j_0$ и $E_p(j+j_0) = (j+j_0)v_p(j+j_0)$.

Из уравнения (18) следует, что $v_p(j)$ — четная функция по отношению к j , т.е. $v_p(j) = v_p(-j)$, и тогда из уравнений (23) следует, что ВАХ $E_{\parallel, \perp}(j)$ являются нечетными, т.е. $E_{\parallel, \perp}(j) = -E_{\parallel, \perp}(-j)$. Функции $v_p(j)$ и $E_{\parallel, \perp}(j)$ для конкретных значений $j_c(0) = 1$, $\alpha = \pi/4$ и $\gamma = 0,6$ приведены на рис. 4(а) и 4(б), (в) соответственно.

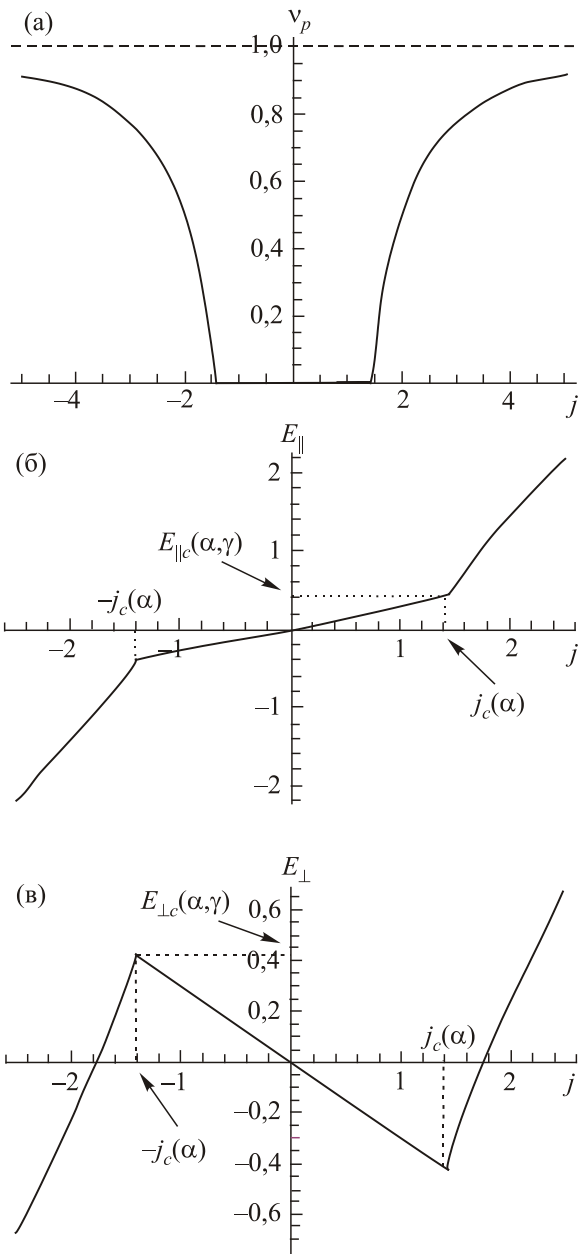


Рис. 4. Функции $v_p(j)$ (а) и $E_{\parallel,\perp}(j)$ (б), (в) в отсутствие наклона при нулевой температуре; здесь $j_c(0) = 1$, $\alpha = \pi/4$ и $\gamma = 0,6$.

4. Асимметрия статической ВАХ и адиабатический рэчет-эффект

Цель этого раздела двоякая. Во-первых, покажем, как асимметрия статической ВАХ относительно изменения направления транспортного тока связана с появлением адиабатического рэчет-эффекта, т.е. с возникновением постоянного напряжения на образце, через который пропускается переменный ток. Во-вторых, вычислим величину рэчет-отклика образца как функцию амплитуды переменного тока применительно к ВАХ, создаваемой пилообразным потенциалом пиннинга, рассмотренным ранее в разд. 2.3. (в данном разделе рассмотрим 1D случай (т.е. $\alpha = 0$) в отсутствие анизотропии $\gamma = 1$).

4.1. Симметричная ВАХ — ток смещения j_0 равен нулю

Рассмотрим сначала динамику вихрей в образце с периодическим симметричным потенциалом пиннинга $U_p(x)$ таким, что $U_p(x) = U_p(-x)$ и $U_p(x) = U_p(x + 2a)$, где $2a$ — период ППП, по которому протекает постоянный ток плотностью j . Тогда вычисление средней скорости вихрей при $j > j_c(0)$, где $j_c(0)$ есть величина критического тока для $\alpha = 0$, приведет к ВАХ $E_p(j)$, схематический вид которой показан на рис. 5, где $-\infty < j < \infty$.

Здесь для простоты используются безразмерные единицы напряженности электрического поля E_p и плотности тока j такие, что при $j \rightarrow \infty$ $E_p = j$. Из-за наличия пиннинга появляется область токов, где $E_p(j) = 0$, которую в дальнейшем будем называть «щелью ВАХ» шириной $\Delta = 1 + |-1| = 2$ ($j_c(0) = 1$), а интервал ее существования по j обозначим $\tilde{\Delta} \equiv (-1, 1)$. Если щель для $E_p(j)$ стремится к нулю (что эквивалентно обращению в нуль потенциала пиннинга), то $E_p(j) \rightarrow E_f(j) = j$ (см. текст перед формулой (24)). Тогда в силу нечетности $E_f(j)$ по j имеем $E_f^r(j) = 0$ (среднее значение отклика). $E_p(j)$, кроме $\tilde{\Delta}$, имеет еще две ветви: $E_p(j) > 0$ для $j > 1$ и $E_p(j) < 0$ для $j < -1$. В целом очевидно, что $E_p(j) = -E_p(-j)$, т.е. $E_p(j)$ — нечетная функция j .

Если $j = j_1 \cos \omega t$, где j_1 — амплитуда, а ω — частота переменного тока, то величина рэчет-напряженности постоянного электрического поля E_p^r в адиабатическом приближении определяется формулой

$$E_p^r = (1/T_\omega) \int_0^{T_\omega} dt E(j_1 \cos \omega t) = [1/(2\pi)] \int_0^{2\pi} dx E(j_1 \cos x), \tag{25}$$

где $T_\omega = 2\pi/\omega$ есть период переменного тока $j_1(t)$ и $\omega t \equiv x$. Из физических соображений очевидно, что для ВАХ, изображенной на рис. 5, $E_p^r = 0$, если $j_1 < 1$. Более того,

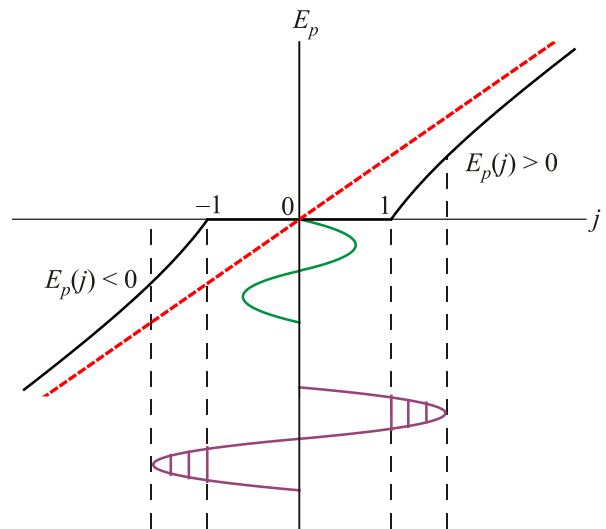


Рис. 5. (Онлайн в цвете) Симметричная вольт-амперная характеристика $E_p(j)$ при $\alpha = 0$.

в силу нечетности $E_p(j)$, $E_p^r = 0$ и для $j_1 > 1$. Если же мы рассмотрим ВАХ общего вида $E(j) = E^+(j) + E^-(j)$, где $E^\pm(j) = [E(j) \pm E(-j)]/2$ есть четная и нечетная части ВАХ, т.е. $E^\pm(j) = \pm E^\pm(-j)$, то легко показать [10], что только четная часть ВАХ $E^+(j)$ приводит к появлению $E^r \neq 0$. Есть два простых способа сделать статическую ВАХ такой, что $E_p^r \neq 0$, т.е. допускающей рэчет-эффект: (1) считать исходный ППП асимметричным (например, если зубья пилообразного ППП имеют разный наклон, см. [3]), (2) для симметричного ППП включить дополнительный постоянный «ток смещения ВАХ» j_0 , так что ППП становится наклонным, из-за чего критические токи образца различны для положительного и отрицательного значения j . В настоящей работе мы исследуем только второй случай, как наиболее простой.

4.2. Асимметричная ВАХ с $j_0 \neq 0$ — качественный анализ

Рассмотрим сначала рэчет-эффект для $E_f(j + j_0) = j + j_0$. Тогда, используя формулу (25), легко показать, что $E_f^r(j_1, j_0) = j_0$. Отметим также, что этот результат очевиден из вида ВАХ $E_f = j + j_0$ при $j = j_1 \cos \omega t$, где $j_1 \rightarrow 0$.

Переходя теперь к рассмотрению рэчет-эффекта для $E_p(j + j_0)$ будем считать сначала, для простоты, плотность тока смещения $0 < j_0 < 1$, и рассмотрим $E_p(j + j_0)$ как функцию j . Тогда на рис. 6 границы щели (по сравнению с рис. 5) смещаются влево на величину j_0 , т.е. $\tilde{\Delta} = (-1 - j_0, 1 - j_0)$.

Теперь уже $E_p(j + j_0)$ не есть ни четная, ни нечетная функция j , но может быть разложена стандартным образом на сумму четной и нечетной [10]. Если рассматривать снова $j = j_1 \cos \omega t$, то из данных рис. 6 следует, что в зависимости от величины j_1 имеются три области

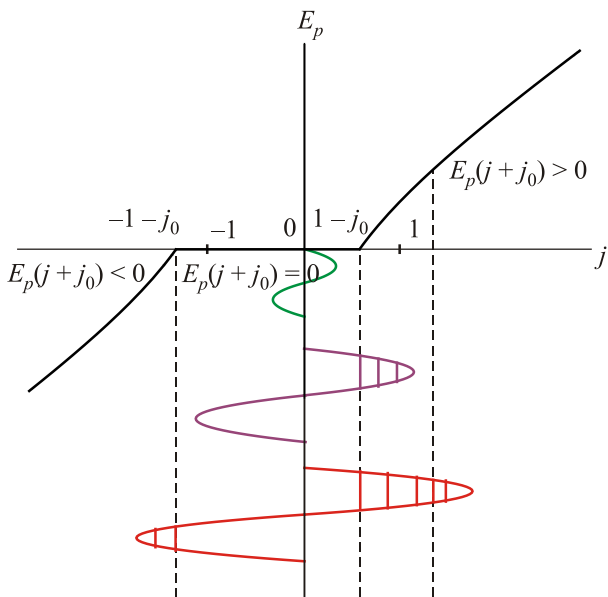


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Асимметричная вольт-амперная характеристика $E_p(j + j_0)$ с $j_0 = 0,4$ и $\alpha = 0$.

на оси j , в которых отклик $E_p(j_1 \cos \omega t + j_0)$ ведет себя качественно различно. Именно, если $j_1 < 1 - j_0$, то $E_p^r = 0$. Для $1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0$ имеется только положительный отклик $E_p^r > 0$, а для $j_1 > 1 + j_0$ сосуществуют как $E_p^r > 0$, так и $E_p^r < 0$, причем в силу асимметрии щели $|E_p(j_1, j_0) < 0| < (E_p(j_1, j_0) > 0)$ при достаточно малом превышении порога $j_1 = 1 + j_0$. Тогда качественно очевидно, что поведение $E_p^r(j_1, j_0)$ будет различным в каждом из этих трех интервалов. Точнее, если $j_1 < 1 - j_0$, то $E_p^r = 0$. Для $1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0$ $E_p^r > 0$ и растет с ростом j , тогда как для $j_1 > 1 + j_0$ скорость роста $E_p^r(j_1)$ может уменьшаться из-за появления отрицательного вклада в рэчет-эффект.

4.3. Адиабатический рэчет-эффект

Перейдем теперь к вычислению величины $E_p^r(j_0, j_1)$ по формуле (25) для ВАХ, представленной на рис. 6. Легко показать [10], что формула (25) может быть представлена в виде суммы двух интегралов

$$E_p^r(j_0, j_1) = (1/\pi) \times \left[\int_0^{\pi/2} dx E_p^+(j_0 + j_1 \cos x) + \int_0^{\pi/2} dx E_p^-(j_0 - j_1 \cos x) \right], \quad (26)$$

где по сравнению с формулой (25) $\cos x$ всегда положителен (точнее $0 < \cos x < 1$), а индексы \pm соответствуют знакам перед j_1 , т.е. $E_p^\pm \equiv E_p^\pm(j_0 \pm j_1 \cos x)$, а $E_p = E_p(j_0 + j)$. Здесь $E_p(j_0 + j) = (j_0 + j)v_p(j_0 + j)$, где $v_p(j_0 + j) = 1 - 1/(j_0 + j)^2$ для $(j_0 + j)^2 > 1$ и $v_p(j_0 + j) = 0$ для $(j_0 + j)^2 < 1$ (см. формулы (23) и (18) для $\alpha = 0$).

Тогда

$$E_p(j_0 + j) = \begin{cases} (j_0 + j) - 1/(j_0 + j), & j < -1 - j_0, \\ 0, & -1 - j_0 < j < 1 - j_0, \\ (j_0 + j) - 1/(j_0 + j), & j > 1 - j_0 \end{cases} \quad (27)$$

(качественный вид этой ВАХ изображен на рис. 6). Для переменного тока $j = j_1 \cos \omega t$ следует рассмотреть два варианта:

$$E_p^\pm = [(j_0 \pm j_1 \cos x) - 1/(j_0 \pm j_1 \cos x)], \begin{cases} j_1 \cos x > 1 - j_0, \\ j_1 \cos x > 1 + j_0, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$0 < x < \begin{cases} \arccos[(1 - j_0)/j_1] \equiv x_0^+, & j_1 > 1 - j_0, \\ \arccos[(1 + j_0)/j_1] \equiv x_0^-, & j_1 > 1 + j_0. \end{cases} \quad (29)$$

Тогда с учетом последних неравенств выражения для $E_p^\pm(x)$ будут

$$E_p^\pm(x) = \theta [j_1 \cos x - (1 \mp j_0)] \times [(j_0 \pm j_1 \cos x) - 1/(j_0 \pm j_1 \cos x)], \quad (30)$$

где $\theta(z)=1$ для $z > 0$ и $\theta(z)=0$ для $z < 0$. Подставляя выражения (30) в формулу (26) получим

$$E_p^r(j_0, j_1) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} 0, & j_1 < 1 - j_0, \\ j_0 x_0^+ + \sqrt{j_1^2 - (1 - j_0)^2} - I^+, & 1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0, \\ \pi E_p^r(1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0) + \\ j_0 x_0^- - \sqrt{j_1^2 - (1 + j_0)^2} - I^-, & j_1 > 1 + j_0. \end{cases} \quad (31)$$

Здесь

$$I^\pm(j_0, j_1) \equiv \int_0^{x_0^\pm} \frac{dx}{j_0 \pm j_1 \cos x}. \quad (32)$$

Таким образом, вычисление рэчет-отклика в адиабатическом приближении свелось к вычислению $I^\pm(j_0, j_1)$ при $0 < j_0 < 1$, $0 < j_1 < \infty$ и $0 < \cos x < 1$. Выражение для неопределенного интеграла, позволяющее вычислить $I^\pm(j_0, j_1)$, приведено в Приложении. Использование приведенных там формул (П.1)–(П.3) к вычислению $I^\pm(j_0, j_1)$ и $E_p^r(j_0, j_1)$ требует учета еще одного существенного замечания. Оно относится к области значений $1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0$ для I^+ . Простой анализ показывает, что здесь необходимо различать два случая, в одном из которых $0 < j_0 < 0,5$ и $I^+ \equiv I_{<}^+$, а во втором $0,5 < j_0 < 1$ и $I^+ \equiv I_{>}^+$. В первом из них всегда $j_1 > j_0$ и тогда для вычисления I^+ надо использовать только формулу (П.2) Приложения, тогда как во втором случае возможны два варианта: $j_1 < j_0$ и $j_1 > j_0$, так что используются обе формулы (П.1 и П.2) Приложения. В результате, если считать $j_1 > 0$ и $j_0 > 0$, можно получить, что если $1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0$ и $j_0 < 0,5$, то в этом интервале всегда $j_1 > j_0$ и

$$I_{<}^+(j_0, j_1) = \frac{1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \ln \frac{(j_1 - j_0) \operatorname{tg}(x_0^+/2) + \sqrt{j_1^2 - j_0^2}}{(j_0 - j_1) \operatorname{tg}(x_0^+/2) + \sqrt{j_1^2 - j_0^2}}, \quad j_1 > j_0. \quad (33)$$

Если же $j_0 > 0,5$ и при этом $j_1 < j_0$, то

$$I_{>}^+(j_0, j_1) = \left(2/\sqrt{j_0^2 - j_1^2} \right) \times \arctg \left[(j_0 - j_1) \operatorname{tg}(x_0^+/2) / \sqrt{j_0^2 - j_1^2} \right], \quad j_1 < j_0. \quad (34)$$

Если же $j_0 > 0,5$ и $j_1 > j_0$, то $I_{>}^+(j_0, j_1) = I_{<}^+(j_0, j_1)$ и при $j_1 = j_0$ $I_{<}^+$ непрерывно переходит в $I_{>}^+$.

Перейдем теперь к случаю $j_1 > 1 + j_0$ (а следовательно, и $j_1 > j_0$) и вычислению $I^-(j_0, j_1)$ при этих условиях. Использование формулы (П.2) при $j_1 \rightarrow -j_1$ применительно к вычислению $I^-(j_0, j_1)$ приводит к тому, что

$$z^-(x) = -(j_1 + j_0) \operatorname{tg}(x/2) / \sqrt{j_1^2 - j_0^2}, \quad (35)$$

из которой с учетом формулы

$$\operatorname{tg}(x/2) = \sqrt{(1 - \cos x)/(1 + \cos x)}$$

следует, что $|z^-(x_0)| = 1$, где $x_0 = \arccos(j_0/j_1)$. Тогда $|z^-(x)| < 1$ для $x < x_0^- < x_0$ и

$$I^-(x) = \frac{1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \ln \left[\frac{1 + z^-(x)}{1 - z^-(x)} \right]. \quad (36)$$

Подставляя пределы интегрирования в формулу (36), имеем

$$I^-(j_0, j_1) = \frac{1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \ln \frac{-(j_0 + j_1) \operatorname{tg}(x_0^-/2) + \sqrt{j_1^2 - j_0^2}}{(j_0 + j_1) \operatorname{tg}(x_0^-/2) + \sqrt{j_1^2 - j_0^2}}, \quad j_1 > j_0, \quad (37)$$

где мы учли, что $z^-(0) = 0$ и

$$z^-(x_0^-) = -(j_1 + j_0) \operatorname{tg}(x_0^-/2) / \sqrt{j_1^2 - j_0^2}, \quad j_1 > j_0.$$

Воспользуемся теперь формулами (33), (34) и (37) с тем, чтобы, подставив их в формулу (31), получить $E_p^r(j_0, j_1)$ с учетом того, что в интервале $1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0$ следует различать два случая: $j_0 > 0,5$ и $j_0 < 0,5$. Тогда, соответственно,

$$E_{p<}^r(1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0) = (1/\pi) \left\{ j_0 x_0^+ + \sqrt{j_1^2 - (1 - j_0)^2} - \frac{\ln \left[(1 - j_0) j_0 / j_1 + j_1 + \sqrt{j_1^2 - (1 - j_0)^2} \sqrt{j_1^2 - j_0^2} / j_1 \right]}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \right\} \quad (j_0 < 0,5), \quad (38)$$

$$E_{p>}^r(1 - j_0 < j_1 < 1 + j_0) = (1/\pi) \left\langle j_0 x_0^+ + \sqrt{j_1^2 - (1 - j_0)^2} - \frac{2}{\sqrt{j_0^2 - j_1^2}} \arctg \frac{(j_0 - j_1) \operatorname{tg}(x_0^+/2)}{\sqrt{j_0^2 - j_1^2}}, \frac{\ln \left[(1 - j_0) j_0 / j_1 + j_1 + \sqrt{j_1^2 - (1 - j_0)^2} \sqrt{j_1^2 - j_0^2} / j_1 \right]}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \right\rangle,$$

$$\left\langle \begin{matrix} j_1 < j_0, \\ j_1 > j_0, \end{matrix} \right\rangle \quad (j_0 > 0,5). \quad (39)$$

Рассматривая аналогично случай $j_1 > 1 + j_0$, имеем

$$E_p^r(j_1 > 1 + j_0) = (1/\pi) \left\{ \pi E_{p<}^r + j_0 x_0^- - \sqrt{j_1^2 - (1 + j_0)^2} - \frac{\ln \left[\frac{-(1 + j_0) j_0 / j_1 + j_1 - \sqrt{j_1^2 - (1 + j_0)^2} \sqrt{j_1^2 - j_0^2} / j_1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \right]}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \right\} \quad (40)$$

И, в последнюю очередь, вычислим E_p^r для $j_0 > 1$ в области значений $0 < j_1 < j_0 - 1$, так как рэчет-отклик в данном случае не равен нулю, тогда как для $j_0 < 1$ $E_p^r = 0$ в области $j_1 < 1 - j_0$ (см. формулу (31)). В этом случае формула (30) выглядит следующим образом:

$$E_p^\pm = \theta[\pm j_1 - (1 - j_0)] [(j_0 \pm j_1 \cos x) - 1 / (j_0 \pm j_1 \cos x)], \quad 0 < j_1 < j_0 - 1. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (26), получаем

$$E_p^r(j_0 > 1, 0 < j_1 < j_0 - 1) = j_0 - 2 / (\pi \sqrt{j_0^2 - j_1^2}) \times \left\{ \arctg \left[\frac{(j_0 - j_1)}{\sqrt{j_0^2 - j_1^2}} \right] + \arctg \left[\frac{(j_0 + j_1)}{\sqrt{j_0^2 - j_1^2}} \right] \right\}. \quad (42)$$

Рассмотрим кривые $E_p^r(j_0, j_1)$ на рис. 7, которые построены по формулам (38)–(40), (42) и соответствуют адиабатическим рэчет-откликам. При больших значениях j_1 все рэчет-отклики стремятся к j_0 , так как из уравнения (40) следует, что при $j_1 \gg 1 - j_0$ $E_p^r(j_1 + j_0) \cong \cong j_0 [1 - 4 / (3\pi j_1^3)]$. При малых значениях j_1 поведение $E_p^r(j_0, j_1)$ качественно различно в случаях $j_0 < 1$ и $j_0 > 1$. Если $j_0 < 1$, то величина $E_p^r(j_1 < 1 - j_0) = 0$ из-за наличия щели для ВАХ $E_p(j + j_0) > 0$ при

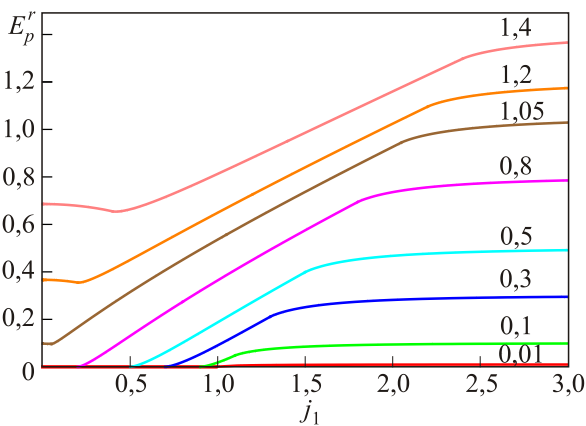


Рис. 7. (Онлайн в цвете) Рэчет-отклики $E_p^r(j_1)$ для набора значений $j_0 = 0,01, 0,1, 0,3, 0,5, 0,8, 1,05, 1,2$ и $1,4$ в адиабатическом режиме.

$j_1 < 1 - j_0$, (см. рис. 6) и только, начиная со значения $j_1 \geq 1 - j_0$, появляется $E_p^r \geq 0$. Величина порога $j_1 = 1 - j_0$ является убывающей функцией j_0 (см. рис. 7). Если же $j_0 > 1$, то щель ВАХ $E_p(j + j_0)$ (шириной $\Delta = 2$) теперь полностью находится в области отрицательных значений токов ($j < 0$) и уже $E_p(j = 0, j_0 > 1) \equiv \equiv E_0 > 0$. Тогда очевидно (из сравнения с $E_f^r = j_0$), что при $j_1 < j_0 - 1$ зависимость $E_p^r(j_0, j_1)$ с учетом выпуклости вверх ВАХ $E_p(j + j_0)$ будет убывающей функцией j_1 (из уравнения (42) следует, что при $j_1 \ll 1$ $E_p^r(0 < j_1 < j_0 - 1) \cong j_0 - 1 / j_0 - j_1^2 / (2j_0^3)$), а начиная со значения $j_1 = j_0 - 1$, соответствующего току излома $E_p^r(j_1 = j_0 - 1)$, реализуется рост $E_p^r(j_1 > j_0 - 1)$ за счет попадания отрицательных значений переменного тока $j_1 \cos \omega t$ в область щели исходной ВАХ (см. рис. 7 для $j_0 > 1$). Физическая причина вышеупомянутой разницы следует из того, что при $j_1 = 0$ и $j_0 > 1$ вихрь находится в состоянии с немного осциллирующей мгновенной скоростью dx/dt и, таким образом, электрическое поле E отлично от нуля, в то время как для $j_0 < 1$ вихрь локализуется на дне одной из ям ППП и $E = 0$.

Аналитические формулы (38) и (39) позволяют найти асимптотическое поведение $E_p^r(j_1 > 1 - j_0)$ при малых отклонениях x величины j_1 от порога $j_1 = 1 - j_0$ (т.е. для $j_1 = (1 - j_0) + x$). Например, из соотношения (38) следует, что $E_p^r(j_1 = 1 - j_0 + x) \cong [4\sqrt{2} / (3\pi\sqrt{1 - j_0})] x^{3/2}$, т.е. коэффициент при $x^{3/2}$ увеличивается с ростом j_0 (см. также рис. 7).

5. Заключение

Исследована точно решаемая двумерная модельная структура, демонстрирующая адиабатический рэчет-эффект в сверхпроводящей пленке с симметричным пилообразным потенциалом пиннинга вихрей в присутствии постоянного тока и анизотропной вязкости. Благодаря простоте потенциала пиннинга и рассмотрению динамики вихря при нулевой температуре получены простые точные аналитические формулы для зависимостей адиабатического ($\omega \rightarrow 0$) рэчет-эффекта от величины постоянного и переменного тока $j = j_0 + j_1 \cos \omega t$, а также угла α между направлением коллинеарных токов \mathbf{j}_0 и $\mathbf{j}_1(t)$ по отношению к каналам одноосного периодического потенциала пиннинга и величины анизотропии вязкости γ . Нелинейное (по току j) резистивное поведение анизотропно двигающихся вихрей обусловлено как анизотропией пиннинга, так и анизотропией вязкости. Конкуренция этих двух анизотропий различного типа приводит к тому,

что угол β между направлением средней скорости вихрей и силой Лоренца существенно зависит как от величин j_0 и j_1 , так и параметров α и γ . Если под влиянием одного из внешних динамических параметров j_0 , j_1 , α и γ интенсивность указанной эффективной анизотропии (характеризуемой углом β) уменьшается, то это ведет к эффективной изотропизации вихревой динамики.

Физически очевидно, что токи j_0 , j_1 угол α и величина γ качественно по-разному влияют на соответствующий переход от анизотропной динамики вихрей к изотропной. С ростом величины тока j_0 при $\alpha = \text{const}$ растет сила Лоренца F_L , так что для $j_0 \geq j_{c1}, j_{c2}$ величина этих барьеров исчезает. Здесь $j_{c1,2}$ — токи кроссовера для переходов вихря через правосторонний и левосторонний барьеры пиннинга. Величины $j_{c1,2}$ зависят от угла α благодаря тому, что преодоление барьера определяется не величиной F_L , а лишь ее поперечной компонентой $F_L \cos \alpha$ так, что $j_{c1,2}(\alpha) = j_{c1,2}(0)/\cos \alpha$ растет с ростом α . Хотя общие формулы для рэчет-откликов (см. уравнения (23)) зависят как от угла α , так и параметра анизотропии γ , в формулах для адиабатического отклика для простоты мы считали $\alpha = 0$ и $\gamma = 1$. Асимптотический анализ полученных в этом случае формул приведен в конце предыдущего раздела.

В заключение сравним результаты настоящей работы с результатами двух уже ранее упоминавшихся работ [3,10], полученными в рамках аналогичной по физике, но уже стохастической модели для произвольных значений температуры T и величин плотности постоянного [3,10] и переменного [10] тока произвольной частоты (однако при $\gamma = 1$). Хотя в работе [3] использовался тот же пилообразный потенциал в рамках 2D подхода, что и в настоящей работе, и благодаря этому при произвольных температурах удалось получить точное аналитическое решение уравнения Фоккера–Планка только на постоянном токе, использованный подход не позволял исследовать рэчет-задачу на переменном токе. Результаты настоящей работы позволили аналитически исследовать 2D рэчет-отклики на переменном токе (за счет $T = 0$ и ограничения адиабатикой) и сравнить их в этом случае с 1D откликами работы [10], в которой для гармонического потенциала пиннинга было найдено более общее и формально точное решение рассмотренной задачи в виде матричных цепных дробей. Здесь также можно отметить, что в недавно опубликованной работе [20], выполненной в рамках подхода статьи [10], исследовался также более сложный случай исходно-асимметричного ППП. Реализация формул, представленных в работах [10] и [20] в виде цепных дробей, сводится, однако, к построению графиков рэчет-откликов как функций одной или, в лучшем случае, двух переменных при фиксации остальных переменных и параметров. Рассмотренная в данной работе задача благодаря простому, исходно-симметричному потенциалу пиннинга, нулевой темпе-

ратуре и $\omega \rightarrow 0$ позволила получить ответы в виде достаточно простых по структуре и имеющих наглядные физические асимптотики формул, использующих лишь элементарные функции и, как следствие, простую физическую интерпретацию. Обобщение этих результатов на случай исходно-асимметричного ППП работы [3], не является тривиальным.

Из нашей работы, в которой по сравнению с работами [3] и [10] учтена анизотропия, следует, что качественно она оказывает простое влияние на величины продольных и поперечных откликов (см. формулы (24), из которых вытекает, что $\rho_{||,\perp}^a \sim \gamma$, а $\rho_{||,\perp}^b \sim \gamma^{-1}$). Сравнение же адиабатики в нашей работе и статье [10], в которых ППП различны, показывает, что соответствующие рэчет-отклики, являющиеся, согласно формулам (25) и (26), интегральными характеристиками ППП, практически не зависят от формы ППП (сравни рис. 7 настоящей работы и рис. 3(а) в работе [10]).

Приложение

$$I(x) = \int \frac{dx}{j_0 + j_1 \cos x} = \frac{2}{\sqrt{j_0^2 - j_1^2}} \arctg \frac{(j_0 - j_1) \text{tg}(x/2)}{\sqrt{j_0^2 - j_1^2}},$$

если $j_1^2 < j_0^2$. (П.1)

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right|, \text{ где } z(x) = \frac{(j_1 - j_0) \text{tg}(x/2)}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}},$$

если $j_1^2 > j_0^2$, (П.2)

причем во втором случае, в зависимости от величины $|z|$, есть два варианта

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \text{ для } |z| < 1$$

и $I(x) = \frac{1}{\sqrt{j_1^2 - j_0^2}} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \text{ для } |z| > 1.$ (П.3)

Формулы (П.1)–(П.3) могут быть проверены прямым дифференцированием и справедливы при любых значениях j_0 и j_1 .

1. В.О. Шкловський, О.В. Добровольський, *Пінінг і динаміка вихорів у надпровідниках*, ХНУ В.Н. Каразіна, Харків (2007).
2. T.A. Friedmann, M.W. Rabin, J. Giapintzakis, J.P. Rice, and D.M. Ginsberg, *Phys. Rev. B* **42**, 6217 (1990).
3. V.A. Shklovskij and V.V. Sosedkin, *Phys. Rev. B* **80**, 214526 (2009).
4. P. Reimann and P. Hanggi, *Appl. Phys. A* **75**, 169 (2002).
5. B.L.T. Plourde, *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **19**, 3698 (2009).
6. P. Hanggi and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 387 (2009).

7. C.S. Lee, B. Janko, I. Derenyi, and A.L. Barabasi, *Nature (London)* **400**, 337 (1999).
8. J.E. Villegas, E.M. Gonzalez, M.P. Gonzalez, J.V. Anguita, and J.L. Vicent, *Phys. Rev. B* **71**, 024519 (2005).
9. R. Wordenweber, P. Dymashevski, and V.R. Misko, *Phys. Rev. B* **69**, 184504 (2004).
10. V.A. Shklovskij and O.V. Dobrovolskiy, *Phys. Rev. B* **84**, 054515 (2011).
11. I. Zapata, R. Bartussek, F. Sols, and P. Hanggi, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2292 (1996).
12. J.F. Wambaugh, C. Reichhardt, C.J. Olson, F. Marchesoni, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5106 (1999).
13. C.J. Olson, C. Reichhardt, B. Janko, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 177002 (2001).
14. C.C. de Souza Silva, J. Van de Vondel, B.Y. Zhu, M. Morelle, and V.V. Moshchalkov, *Phys. Rev. B* **73**, 014507 (2006).
15. D. Perez de Lara, L. Dinis, E.M. Gonzalez, J.M.R. Parrondo, J.V. Anguita, and J.L. Vicent, *Phys. Condens. Matter* **21**, 254204 (2009).
16. B.B. Jin, B.Y. Zhu, R. Wordenweber, C.C. de Souza Silva, P.H. Wu, and V.V. Moshchalkov, *Phys. Rev. B* **81**, 174505 (2010).
17. В.В. Шмидт, *Введение в физику сверхпроводников*, Наука, Москва (1982).
18. В.А. Шкловский, Хоп Данг Тхи Бик, *ФНТ* **35**, 469 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 365 (2009)].
19. В.А. Шкловский, Хоп Данг Тхи Бик, *ФНТ* **36**, 89 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 71 (2010)].
20. V.A. Shklovskij, V.V. Sosedkin, and O.V. Dobrovolskiy, *J. Phys.: Condens. Matter* **26**, 025703 (2014).

The guided vortex motion and the ratchet effect in an anisotropic superconductor with a periodic pinning potential

V.A. Shklovskij and Jin-Taek Seo

The two-dimensional adiabatic ratchet dynamics of Abrikosov vortices in a symmetric periodic pinning potential is considered in the presence of a dc and ac transport currents and anisotropy of the viscous vortex motion at zero temperature. Exact analytical expressions for two anisotropic nonlinear current-voltage responses along and across the transport current direction are derived and analyzed in the framework of the washboard pinning potential model. The physical origin of these voltages that are odd with respect to the current direction reversal is caused by the interplay between the vortex guiding effect, which is even with respect to the magnetic field reversal, and the ratchet asymmetry owing to the tilt of the pinning potential by the dc component of the transport current.

PACS: 74.25.Uv Vortex phases (includes vortex lattices, vortex liquids, and vortex glasses);
 74.25.Wx Vortex pinning (includes mechanisms and flux creep);
 74.25.Sv Critical currents.

Keywords: ratchet effect, anisotropy of viscosity, periodic pinning potential, two-dimensional dynamic of vortices.