

Скачок химического потенциала при испарении бозе-газа

Е.А. Бедрикова, А.В. Латышев

Московский государственный областной университет

ул. Радио, 10а, г. Москва, 105005, Россия

E-mail: bedrikova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26 марта 2013 г., после переработки 16 июля 2013 г.

Исследована зависимость коэффициента скачка химического потенциала от коэффициента испарения бинарной смеси для случая, когда испаряющимся компонентом является бозе-газ, концентрация которого предполагается много меньше концентрации несущего газа. На основании аналитического решения задачи получено выражение для скачка химического потенциала в случае, когда частота столкновений молекул бозе-газа постоянна.

Досліджено залежність коефіцієнта стрибка хімічного потенціалу від коефіцієнта випару бінарної суміші для випадку, коли компонентом, що випаровується, є бозе-газ, концентрація якого передбачається набагато менше концентрації несучого газу. На підставі аналітичного розв'язку задачі отримано вираз для стрибка хімічного потенціалу у випадку, коли частота зіткнень молекул бозе-газу постійна.

PACS: 05.20.Dd Кинетическая теория;
05.30.Jr Бозонные системы.

Ключевые слова: бозе-газ, испарение, скачок химического потенциала, скачок концентрации.

1. Введение

Задача об испарении с поверхности раздела конденсированная фаза–собственный пар в полупространство имеет давнюю историю (см., например, [1,2]). Эта задача является родственной задаче Смолуховского о температурном скачке в разреженном газе и часто решается в одной постановке с последней (см., например, [3]).

В большом потоке работ по этой проблеме (экспериментальных, численных, приближенных) выделим аналитические работы, посвященные точным решениям.

Слабое испарение одноатомных и молекулярных газов изучалось в работах [4–6]. Слабое испарение с произвольным коэффициентом испарения в газах с постоянной и переменной частотой столкновений исследовано в работах [7–9], причем в работах [8,9] изучалось испарение того компонента бинарной газовой смеси, концентрация которого значительно много меньше концентрации второго компонента.

В задачах, связанных с динамикой аэрозольных частиц [10], интерес к проблемам испарения связан с учетом влияния коэффициента испарения на термодиффузионные процессы в аэродисперсных системах [11].

Слабое испарение одноатомных ферми- и бозе-газов было исследовано в работах [12,13].

В настоящей работе рассмотрена разреженная бинарная газовая смесь, первым из компонентов которой является бозе-газ, вторым — любой газ, в том числе и квантовый. Бозе-газ испаряется с поверхности раздела конденсированная фаза–бинарная газовая смесь в полупространство. Считается, что концентрация бозе-газа много меньше концентрации второго газа. Вдали от поверхности раздела фаз задан градиент концентрации первого газа. Требуется построить функцию распределения первого компонента, а также найти его макропараметры: коэффициент диффузии, массовую скорость, величину скачка химического потенциала и концентрации.

Аналогичная задача об испарении ферми-газа в смесь газов рассмотрена в работе [14].

Классическая задача кинетической теории об изотермическом скольжении для ферми-газов с аккомодационными граничными условиями Черчиньяни решена в [15]. В [16] решена задача об изотермическом скольжении для бозе-газов с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости частиц.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается процесс испарения с плоской поверхности в бинарную газовую смесь. Предполагается, что концентрация испаряющегося компонента смеси n_1 много меньше концентрации неиспаряющегося компонента n_2 : $n_1 \ll n_2$ (случай разбавленной смеси). Отметим, что для большинства наиболее важных приложений это условие выполняется.

В квазиклассическом приближении уравнение Больцмана для бинарной газовой смеси имеет вид [17]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} = J_{ii} + J_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Здесь f_i — функция распределения i -го компонента смеси, J_{ii} и J_{ij} — интегралы столкновений молекул i -го компонента между собой и с молекулами j -го компонента соответственно. Отметим, что $J_{11} \sim n_1^2$, а $J_{12} \sim n_1 n_2$ (так как $f_i \sim n_i$). Величина $\varepsilon = n_1/n_2$ является малым параметром ($\varepsilon \ll 1$), ибо $n_1 \ll n_2$. Очевидно, что $|J_{11}|/|J_{12}| \sim \varepsilon$. Поэтому в первом приближении по ε величиной J_{11} можно пренебречь по сравнению с перекрестным интегралом столкновений J_{12} . Кроме того, в этом приближении по ε воздействием первого компонента на функцию распределения второго можно также пренебречь. Поэтому в условиях рассматриваемой задачи функцию распределения второго компонента газовой смеси можно считать равновесной со средней нулевой скоростью и постоянными температурой $T_2 = T$ и концентрацией n_2 . Температура второго компонента T в силу неравенства $n_1 \ll n_2$ является равновесной температурой системы.

Величину J_{12} можно аппроксимировать кинетической моделью типа Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [18,19]. Тогда кинетическое уравнение для первого компонента примет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nu(f_{\text{eq}} - f), \quad (1)$$

где

$$f_{\text{eq}} = \left[-1 + \exp \left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu(\mathbf{r})}{kT} \right) \right]^{-1}, \quad \mu(\mathbf{r}) < 0,$$

f_{eq} — равновесная бозевская функция распределения для первого компонента с равновесной температурой, k — постоянная Больцмана, ν — эффективная частота столкновений молекул первого компонента с молекулами второго, $\mu(\mathbf{r})$ — химический потенциал первого компонента, T — температура смеси, считающаяся постоянной.

Отметим, что статистика второго компонента несущественна. Из параметров, характеризующих второй компонент, лишь температура входит в уравнение (1). Выводимое ниже граничное условие также содержит

температуру второго компонента. Кроме того, в уравнение (1) входит и частота столкновений первого компонента со вторым. Таким образом, второй компонент оказывает влияние на весь процесс испарения, ибо его параметры ν и T , как увидим ниже, входят во все искомые величины.

Возьмем декартову систему координат с центром на поверхности, с которой происходит испарение. Ось x_1 проведем перпендикулярно поверхности. При испарении с поверхности вдали от поверхности существует постоянный градиент концентрации 1-го компонента

$$g_n = \left(\frac{dn}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty}.$$

$$\text{Здесь } n(x_1) = \int f(x_1, \mathbf{v}) d\Omega, \quad d\Omega = \frac{(2s+1)d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

$n(x_1)$ — концентрация (числовая плотность) первого компонента, \mathbf{p} — импульс и s — спин молекул первого компонента, \hbar — постоянная Планка.

Будем считать испарение слабым, т.е. предположим, что относительное изменение концентрации первого компонента на длине свободного пробега молекул l много меньше единицы: $|G_n| \ll 1$, $G_n = (l/n_s) |g_n|$, где n_s — концентрация насыщенного пара (газа) первого компонента на поверхности испарения, соответствующая температуре поверхности $T_s \equiv T$.

В этих условиях задача допускает линеаризацию. Предварительно перейдем к безразмерной скорости $\mathbf{C} = \mathbf{v}/v_T$, безразмерной координате $x = x_1/l$ и безразмерному химическому потенциалу $\alpha(x) = \mu(x)/(kT)$. Здесь $v_T = 1/\sqrt{\beta}$ — тепловая скорость первого компонента, $\beta = m/(2kT)$, $l = v_T \tau$ — средняя длина пробега молекул первого компонента с тепловой скоростью, $\tau = 1/\nu$ — среднее время между двумя последовательными столкновениями молекул первого компонента с молекулами второго. Теперь уравнение (1) можно записать в виде

$$C_x \frac{\partial f}{\partial x} = f_B(x, C) - f(x, C). \quad (2)$$

Здесь $f_B(x, C)$ — локально равновесная бозевская функция распределения:

$$f_B(x, C) = [-1 + \exp(C^2 - \alpha(x))]^{-1}.$$

Линеаризацию задачи проведем относительно абсолютного бозеана

$$f_B^s \equiv f_B^s(C, \alpha_s) = [-1 + \exp(C^2 - \alpha_s)]^{-1},$$

где α_s — значение безразмерного химического потенциала, соответствующее температуре поверхности $T \equiv T_s$ и концентрации насыщенного пара при этой температуре.

Безразмерный химический потенциал будем линеаризовать относительно величины α_s , т.е. возьмем $\alpha(x) = \alpha_s + \delta\alpha(x)$. Линеаризуя локально равновесную бозевскую функцию распределения относительно f_B^s , получаем:

$$f_B(x, C) = f_B^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)\delta\alpha(x),$$

где $g(C, \alpha_s) = \exp(C^2 - \alpha_s)(-1 + \exp(C^2 - \alpha_s))^{-2}$.

Функцию распределения будем искать в виде

$$f(x, C) = f_B^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)h(x, C_x). \quad (3)$$

С помощью (3) уравнение (2), как и в [14], приводится к кинетическому уравнению:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{2f_0(\alpha_s)} \int_{-\infty}^{\infty} f_B(\mu', \alpha_s)h(x, \mu')d\mu', \quad \mu = C_x. \quad (4)$$

Здесь $f_n(\alpha_s) = \int_0^{\infty} f_B(x, \alpha_s)x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

При выводе уравнения (4) было найдено, что правая часть (4) — относительное отклонение безразмерного химического потенциала от его значения на стенке:

$$\delta\alpha(x) \equiv \alpha(x) - \alpha_s = \frac{1}{2f_0(\alpha_s)} \int_{-\infty}^{\infty} f_B(\mu', \alpha_s)h(x, \mu')d\mu'. \quad (5)$$

Рассмотрим граничное условие на поверхности испарения для молекул первого компонента, учитывая влияние свойств поверхности путем введения коэффициента испарения q (см. [1,2]):

$$f(0, C) = q f_B^s(C, \alpha_s) + (1-q)f_B^0(C, \alpha_0), \quad C_x > 0, \quad (6)$$

где $f_B^0(C, \alpha_0) = [-1 + \exp(C^2 - \alpha_0)]^{-1}$.

Величина α_0 определяется из условия непротекания для молекул, отразившихся от поверхности без конденсации на ней (вероятность такого процесса равна $1-q$),

$$(1-q) \int C_x [f_B^0(C, \alpha_0)\theta(C_x) + f(0, C)\theta(-C_x)]d\Omega = 0,$$

где $\theta(x)$ — функция Хэвисайда, $\theta(x) = 1, x > 0$; $\theta(x) = 0, x < 0$.

Условие непротекания преобразуем, учитывая определение функции Хэвисайда, к виду

$$\int_{C_x > 0} C_x f_B^0(C, \alpha_0)d^3C + \int_{C_x < 0} C_x f(0, C)d^3C = 0. \quad (7)$$

Граничное условие на стенке для функции $h(x, C_x)$ выведем из условия (7). Подставим в (7) функцию (3), учитывая условие (6), а также результат следующей линеаризации: $f_B^0(C, \alpha_0) = f_B^s(C, \alpha_s) + g(C, \alpha_s)(\alpha_0 - \alpha_s)$. В результате подстановки получаем граничное условие на стенке:

$$h(0, \mu) = (1-q)(\alpha_0 - \alpha_s), \quad \mu > 0. \quad (8)$$

Вдали от поверхности — вне слоя Кнудсена толщиной порядка длины свободного пробега молекул — функция $h(x, C_x)$ имеет вид

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + o(1), \quad C_x = \mu, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

где $h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu)$,

G_α — градиент безразмерного химического потенциала, заданный вдали от стенки:

$$G_\alpha = \left(\frac{d\alpha(x)}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty},$$

A_α — скачок химического потенциала — неизвестная величина, которая находится из решения задачи.

Подставляя (9) в выражение безразмерного химического потенциала (5), получаем асимптотическое распределение этого потенциала: $\delta\alpha_{as}(x) = A_\alpha + G_\alpha x, x \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что $A_\alpha = \delta\alpha_{as}(0) = \alpha_{as}(0) - \alpha_s$, т.е. скачок химического потенциала определяется как разность между экстраполированным значением химического потенциала на стенке и его значением непосредственно у стенки.

Величину $\alpha_0 - \alpha_s$ найдем из условия непротекания (7). Из этого условия после некоторых вычислений, как и в [14], получаем:

$$\alpha_0 - \alpha_s = \frac{4g_4(\alpha_s)}{3g_3(\alpha_s)} \frac{G_\alpha}{q}. \quad (10)$$

Здесь $g_{n+2}(\alpha_s) = \int_0^{\infty} x^{n+2} g(x, \alpha_s) dx, \quad n = 0, 1, 2,$

в частности,

$$g_3(\alpha_s) = -\frac{1}{2} \ln(1 - e^{-\alpha_s}), \quad g_4(\alpha_s) = \frac{3}{4} l(\alpha_s),$$

$$l(\alpha_s) = -\int_0^{\infty} \ln(1 - e^{-\alpha_s - x^2}) dx, \quad g_2(\alpha_s) = \frac{f_0(\alpha_s)}{2}.$$

Теперь с учетом (10) и последних равенств заключаем, что граничное условие (8) выведено полностью:

$$h(0, \mu) = B G_\alpha, \quad \mu > 0, \quad \text{где } B = -\frac{1-q}{q} \frac{2l(\alpha_s)}{\ln(1 - e^{-\alpha_s})}. \quad (11)$$

Итак, граничная задача состоит в нахождении такого решения уравнения (4), которое удовлетворяет гра-

ничным условиям (11) и (9). Далее величину α_s будем везде обозначать через α .

3. Коэффициент диффузии и массовая скорость

Функция

$$f_{as}(x, \mathbf{C}) = f_B^s(C, \alpha) + g(C, \alpha)h_{as}(x, C_x),$$

где $h_{as}(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu)$ называется функцией распределения Чепмена–Энскога [18, 19].

С помощью функции $h_{as}(x, \mu)$ вычислим коэффициент диффузии D_{12} . Диффузионный поток \mathbf{i} возникает в результате наличия в газе градиента плотности $\nabla\rho$, поэтому при малых $\nabla\rho$ имеем: $\mathbf{i} = -D_{12}\nabla\rho$ [20]. Отсюда, согласно постановке задачи,

$$D_{12} = -\frac{i_x}{\rho'_{x1}} = -\frac{m \int f_{as} v_x d\Omega}{m \int (f_{as})'_{x1} d\Omega}.$$

Безразмерную координату x заменим здесь на размерную x_1 и перейдем к интегрированию по безразмерной скорости. В результате имеем:

$$D_{12} = \frac{4kT}{3mv} \frac{g_4(\alpha)}{f_0(\alpha)}.$$

Отметим, что при $\alpha \rightarrow -\infty$ этот результат переходит в классический [2]. В самом деле, используя асимптотику $g_4(\alpha) = (3\sqrt{\pi}/8)e^\alpha$, $f_0(\alpha) = (\sqrt{\pi}/2)e^\alpha$, $\alpha \rightarrow -\infty$, получаем известный результат: $D_{12} = kT/(mv)$. В таком подходе коэффициент диффузии D_{12} рассматривается в качестве эмпирической величины. Например, для смеси газов ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ при температуре 2 К имеем [21] $D_{12} \approx 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$.

Найдем массовую скорость испаряющегося компонента бинарного газа в направлении оси x . По определению, массовая скорость в направлении оси x равна:

$$U_x = \frac{1}{n} \int f v_x d\Omega, \quad n = \int f d\Omega.$$

Вставим это выражение в определение коэффициента диффузии. Получаем, что

$$D_{12} = -\frac{\int f_{as} v_x d\Omega}{n} \frac{n}{\int (f_{as})'_{x1} d\Omega} = U_x \frac{n}{\int (f_{as})'_{x1} d\Omega}.$$

Отсюда нетрудно видеть, что

$$D_{12} = U_x n [v\sqrt{\beta} \int g(C, \alpha) d\Omega]^{-1} G_\alpha^{-1},$$

или, переходя к безразмерной массовой скорости $W_x = \sqrt{\beta} U_x$, имеем:

$$D_{12} = \frac{W_x}{G_\alpha} \frac{2kT}{vm} \frac{\pi^2 n}{(2s+1)k_T^3 g_2(\alpha)},$$

где $k_T = mv_T/\hbar$ — тепловое волновое число.

Числовая плотность в линейном приближении равна:

$$n = \int f_B(C, \alpha) d\Omega = \frac{(2s+1)k_T^3}{2\pi^2} f_2(\alpha).$$

Таким образом, коэффициент диффузии равен:

$$D_{12} = \frac{W_x}{G_\alpha} \frac{2kT}{vm} \frac{f_2(\alpha)}{g_2(\alpha)},$$

откуда массовая скорость равна:

$$W_x = \frac{vm}{2kT} D_{12} \frac{f_0(\alpha)}{l(\alpha)} G_\alpha.$$

4. Функция распределения

Решение уравнения (4) будем искать в виде

$$h_\eta(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu),$$

$$\frac{1}{2f_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} f_B(\mu, \alpha) \Phi(\eta, \mu) d\mu = 1,$$

где η — спектральный параметр, или параметр разделения.

С помощью этих равенств из уравнения (4) получаем характеристическое уравнение $(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta$. При $\eta \in (-\infty, \infty)$ находим собственные функции характеристического уравнения:

$$\Phi(\eta, \mu) = \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{2f_0(\alpha)}{f_B(\eta, \alpha)} \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu).$$

Здесь символ Px^{-1} означает главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\lambda(z)$ — дисперсионная функция задачи,

$$\lambda(\eta) = 1 + \frac{\eta}{2f_0(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_B(\mu, \alpha) d\mu}{\mu - \eta}.$$

Решение уравнений (4), (9) и (11) будем искать в виде разложения

$$h(x, \mu) = A_\alpha + G_\alpha(x - \mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu) A(\eta) d\eta,$$

где $A(\eta)$ — неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра), а A_α — неизвестная постоянная (коэффициент дискретного спектра).

Так же, как и в [14] найдем функцию распределения испаряющегося компонента:

$$\frac{h(x, \mu)}{G_\alpha} = C(\alpha, q) + x - \mu + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\sin \zeta(\eta) d\eta}{X(\eta)(\eta - \mu)} + \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\cos \zeta(\mu)}{X(\mu)} \theta(\mu),$$

где $X(z) = \frac{1}{z} \exp V(z)$, $V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta(\tau, \alpha) d\tau}{\tau - z}$,

$$\zeta(\tau, \alpha) = \arctg \frac{2f_0(\alpha)\lambda(\tau)}{\pi \tau f_B(\tau, \alpha)} - \pi.$$

Отсюда, используя методы контурного интегрирования [3], на границе $x = 0$ получаем:

$$\frac{h(0, \mu)}{G_\alpha} = -\frac{1-q}{q} \frac{2l(\alpha_s)}{\ln(1-e^{\alpha_s})} - \frac{\cos \zeta(\mu)}{X(\mu)} [1 - \theta(\mu)], \quad -\infty < \mu < +\infty.$$

Из последней формулы видно, что при $\mu > 0$ функция распределения отраженных от стенки молекул в точности удовлетворяет граничному условию (11).

Кроме того, как и в [14], найдем, что коэффициенты A_α и G_α связаны линейным соотношением:

$$A_\alpha = C(\alpha, q)G_\alpha, \quad \text{где } C(\alpha, q) = V_1(\alpha) + B,$$

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta(\tau, \alpha) d\tau. \quad (12)$$

в котором функция $C(\alpha, q)$ — коэффициент скачка химвотенциала.

5. Скачок и профиль химвотенциала

Из равенства (12) находим коэффициент скачка безразмерного химвотенциала

$$C(\alpha, q) = V_1(\alpha) - \frac{1-q}{q} \frac{2l(\alpha)}{\ln(1-e^\alpha)}. \quad (13)$$

Переходя в (12) к размерным величинам, получаем величину скачка химического потенциала бозе-газа

$$\delta\mu(0) = C(\alpha, q)l \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty}.$$

Частоту столкновений ν выразим, используя коэффициент диффузии. Тогда скачок химического потенциала (в размерных величинах) вычисляется по формуле:

$$\delta\mu(0) = K(\alpha, q) \sqrt{\frac{m}{2kT}} D_{12} \left(\frac{d\mu(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1=+\infty},$$

где $K(\alpha, q)$ — коэффициент скачка химического потенциала, причем

$$K(\alpha, q) = \frac{2f_0(\alpha)}{l(\alpha)} \left[V_1(\alpha) - \frac{1-q}{q} \frac{2l(\alpha)}{\ln(1-e^\alpha)} \right].$$

Отметим, что в пределе большой температуры, когда квантовыми свойствами газа можно пренебречь, полученный результат (13) переходит в ранее известный для классического газа результат для скачка концентрации [8]: $C(-\infty, q) = 1,0162 + \sqrt{\pi}(1/q - 1)$.

Распределение химвотенциала в полупространстве $x \geq 0$ (называемое профилем химвотенциала) дается равенством (5). Подставляя полученное разложение функции распределения в (5), находим, что профиль химвотенциала строится по формуле

$$\frac{a(x)}{G_\alpha} = C(\alpha, q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \zeta(\eta) d\eta. \quad (14)$$

6. Скачок и профиль концентрации

Профиль концентрации газа $n(x)$ в полупространстве $x \geq 0$ дается равенством $n(x) = n_s + n(x)$, где

$$n_s = \int f_B(C, \alpha) d\Omega, \quad n(x) = \int h(x, C_x) g(C, \alpha) d\Omega.$$

Нетрудно вычислить, что $n_s = n_0 l(\alpha)$, где

$$n_0 = \frac{2\pi(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3 (\sqrt{\beta})^3},$$

а отклонение концентрации газа от концентрации насыщенного пара следующее:

$$n(x) = P_n(x)G_n, \quad (15)$$

где коэффициент профиля концентрации $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \left[C(\alpha, q) + x + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta} - V(\eta)\right) \sin \zeta(\eta) d\eta \right] g_2(\alpha),$$

G_n — величина градиента концентрации (по безразмерной координате), $G_n = (dn/dx)_{x=+\infty}$.

Из равенств (14) и (15) вытекает, что профили химпотенциала и концентрации пропорциональны с точностью до соответствующих градиентов. Кроме того, нетрудно видеть, что градиенты химпотенциала и концентрации пропорциональны с коэффициентом n_0 : $G_n = n_0 G_\alpha$. Последнее равенство означает, что градиент химического потенциала — градиент логарифма концентрации: $G_\alpha = (d \ln n / dx)_{x \rightarrow +\infty}$.

Нетрудно найти, что связь между отклонениями концентрации и химпотенциала от соответствующих значений у стенки $n(x) = n_0 g_2(\alpha) a(x)$. Отсюда при $x = 0$ находим величину скачка концентрации:

$$n_{\text{as}}(0) = n_0 g_2(\alpha) a_{\text{as}}(0) = C(\alpha, q) g_2(\alpha) G_n = C_n(\alpha, q) G_n,$$

где $C_n(\alpha, q) = C(\alpha, q) g_2(\alpha)$ — коэффициент скачка концентрации.

7. Обсуждение результатов

Анализ графиков на рис. 1 показывает, что значения коэффициента скачка химпотенциала тем больше различаются, чем меньше значения коэффициента испарения. При стремлении q к единице эти различия сглаживаются. Значения коэффициента для ферми-газа меньше соответствующих значений коэффициента для бозе-газа во всем диапазоне значений коэффициента испарения при любом фиксированном значении безразмерного химпотенциала. Этот факт можно показать и аналитически, если сравнить найденный в настоящей работе коэффициент для бозе-газа с соответствующим коэффициентом для ферми-газа из работы [14].

На рис. 2 видно, что уже при $\alpha \leq -1$ значения коэффициента переходят на свою асимптотику, т.е. квантовые свойства бозе-газа влияют на величину коэффициента скачка химпотенциала на сравнительно узком

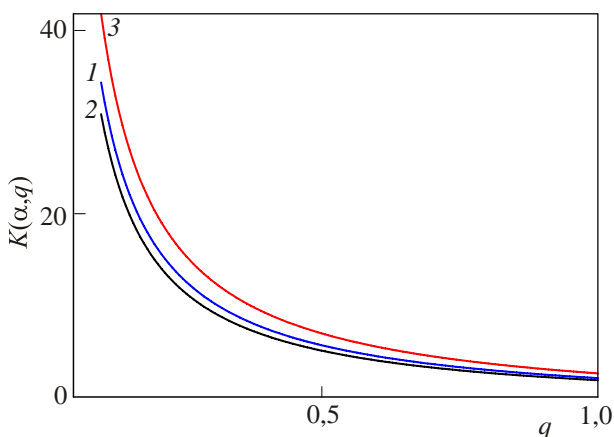


Рис. 1. Зависимость коэффициента скачка безразмерного химпотенциала от величины коэффициента аккомодации q , кривые 1 и 3 соответствуют значениям безразмерного химпотенциала $\alpha = -0,5$ и $\alpha = -3$, кривая 2 отвечает случаю ферми-газа при $\alpha = -0,5$.

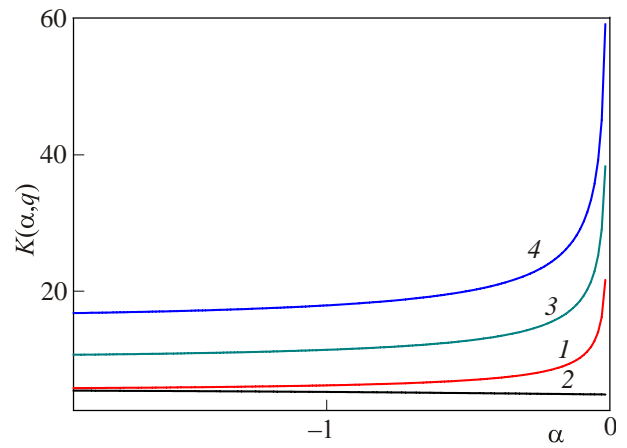


Рис. 2. Зависимость коэффициента скачка безразмерного химического потенциала от величины α при значениях коэффициента испарения q : 0,5 (1), 0,3 (3), 0,2 (4). Кривая 2 отвечает случаю ферми-газа при $q = 0,5$.

интервале значений безразмерного химпотенциала ($-1 < \alpha < 0$). Значения коэффициента для ферми-газа во всем диапазоне значений α меньше соответствующих значений коэффициента для бозе-газа. Значения коэффициента $K(\alpha, q)$ тем больше, чем меньше значения коэффициента испарения.

Поведение коэффициента скачка концентрации из соотношения (16) показана на рис. 3 и 4. На рис. 3 видно, что значения коэффициента концентрации тем больше, чем больше значения безразмерного химпотенциала. При этом значения коэффициента для бозе-газа больше соответствующих значений коэффициента для ферми-газа во всем диапазоне значений коэффициента испарения при любом фиксированном значении безразмерного химпотенциала.

Рисунок 4 показывает, что при $\alpha < -1$ все зависимости коэффициента выходят на свою асимптотику при всех значениях коэффициента испарения. И в этом

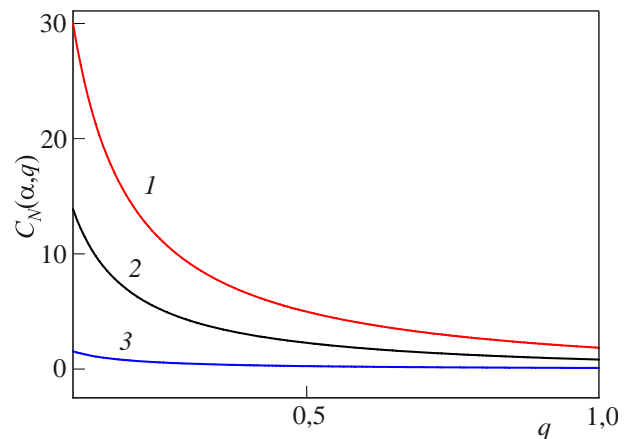


Рис. 3. Зависимость коэффициента скачка концентрации от величины коэффициента испарения q при $\alpha = -0,5$ (1) и -3 (3). Кривая 2 отвечает случаю ферми-газа при $\alpha = -0,5$.

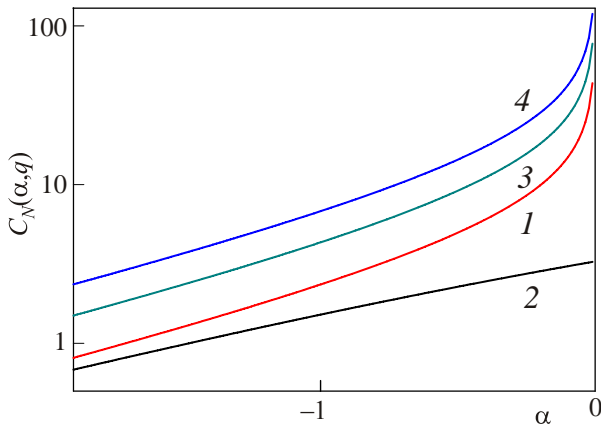


Рис. 4. Зависимость коэффициента скачка концентрации от величины α при коэффициенте испарения q : 0,5 (1), 0,3 (3), 0,2 (4). Кривая 2 отвечает случаю ферми-газа при $q = 0,5$. Логарифмический масштаб по вертикальной оси.

случае квантовые эффекты сказываются в узком диапазоне значений $-1 < \alpha < 0$. При этом значения коэффициента для ферми-газа во всем диапазоне α меньше соответствующих значений коэффициента для бозе-газа.

При постоянной концентрации газа с понижением температуры химический потенциал растет [22], причем $\alpha \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$. Поэтому построенные для больших значений α графики соответствуют меньшей эффективной температуре газа.

В работе аналитически решена задача об испарении одного из компонентов бинарного газа. Этим компонентом является бозе-газ. Исследована зависимость коэффициента скачка химпотенциала от коэффициента испарения и величины химпотенциала. На основании аналитического решения задачи получено явное представление функции распределения, выражения для скачка химпотенциала и распределения химпотенциала в полупространстве. Показано также, что скачок концентрации бозе-газа и его распределение в полупространстве пропорциональны скачку и распределению химпотенциала.

1. А.В. Козырев, А.Г. Ситников, *УФН* **171**, 765 (2001).
2. Д. Хирс, Г. Паунд, *Испарение и конденсация*, Металлургия, Москва (1966).
3. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Граничные задачи для молекулярных газов*, Изд-во МГОУ, Москва (2005).
4. Е.Б. Долгошеина, А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Известия РАН. Сер. МЖГ* **6**, 143 (1993).
5. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Известия РАН. Сер. МЖГ* **3**, 140 (1996).
6. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ЖЭТФ* **114**, 956 (1998).
7. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ИФЖ* **37**, 542 (2000).

8. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Письма в ЖТФ* **30**, 12 (2004).
9. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ИФЖ* **80**, 121 (2007).
10. M.M.R. Williams and S.K. Loyalka, *Aerosol Science: Theory and Practice: with Special Applications to the Nuclear Industry*, Pergamon Press, Oxford (1991).
11. Е.Р. Шукин, Ю.И. Яламов, З.Л. Шулиманова, *Избранные вопросы физики аэрозолей*, Изд-во Моск. пед. ун-та, Москва (1992).
12. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ТМФ* **134**, 310 (2003).
13. А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *Матем. моделирование* **5**, 80 (2003).
14. А.А. Костиков, А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ЖТФ* **79**, вып. 4, 1 (2008).
15. А.А. Костиков, А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ФНТ* **34**, 914 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 723 (2008)].
16. А.Ю. Квашнин, А.В. Латышев, А.А. Юшканов, *ФНТ* **36**, 413 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 325 (2010)].
17. В.П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, Москва (1971).
18. К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, Москва (1978).
19. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
20. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
21. И.С. Григорьев, Е.З. Мейлихов, *Физические величины. Справочник*, Энергоатомиздат, Москва (1991).
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976), ч. 1.

Chemical potential jump during evaporation of a quantum Bose gas

E.A. Bedrikova and A.V. Latyshev

The dependence of chemical potential jump coefficient on evaporation coefficient is analyzed for the case where the evaporating component is a Bose gas. The evaporating component concentration is assumed to be much lower than that of the carrier gas. An expression for the chemical potential jump is derived from the analytical solution of the problem for the case where the collision frequency of molecules of the evaporating component is constant.

PACS: 05.20.Dd Kinetic theory;
05.30.Jp Boson systems.

Keywords: Bose gas, evaporation, chemical potential jump, concentration jump.