

О соотношении между фонон-ротонным спектром и спектром одночастичных возбуждений в жидкости с конденсатом Бозе–Эйнштейна

В.Б. Бобров^{1,2}, А.Г. Загородний³, С.А. Тригер¹

¹Объединенный институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, 13, г. Москва, 125412, Россия

E-mail: vic5907@mail.ru;

satron@mail.ru

²Национальный исследовательский университет «МЭИ»

ул. Красноказарменная, 14, г. Москва, 111250, Россия

³Институт теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова НАН Украины

ул. Метрологическая, 14-б, г. Киев, 03680, Украина

E-mail: azagorodny@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 14 апреля 2015 г., опубликована онлайн 23 июня 2015 г.

Проведен анализ существующих теоретических представлений о соотношении между спектром коллективных возбуждений плотности и спектром одночастичных возбуждений в жидкости с конденсатом Бозе–Эйнштейна. С использованием имеющихся экспериментальных результатов рассмотрен вопрос о фонон-ротонном спектре коллективных возбуждений в различных жидкостях и его связи с конденсатом Бозе–Эйнштейна.

Проведено аналіз існуючих теоретичних уявлень про співвідношення між спектром колективних збуджень щільності та спектром одночасткових збуджень в рідині з конденсатом Бозе–Ейнштейна. З використанням наявних експериментальних результатів розглянуто питання про фонон-ротонний спектр колективних збуджень в різних рідинах та його зв'язок з конденсатом Бозе–Ейнштейна.

PACS: 03.75.Kk Динамические свойства конденсатов; коллективные и гидродинамические возбуждения, сверхтекучий поток;

05.30.Jr Бозонные системы;

67.25.dt Звук и возбуждения;

67.25.D– Сверхтекучая фаза.

Ключевые слова: сверхтекучий ⁴He, конденсат Бозе–Эйнштейна, коллективные возбуждения, одночастичные возбуждения.

1. Введение

Понятие о квазичастицах как квантованных коллективных возбуждениях впервые ввел Ландау в своей феноменологической теории сверхтекучести для жидкого гелия ⁴He [1]. Для объяснения имеющихся экспериментальных данных по теплоемкости и второму звуку в сверхтекучем гелии Ландау предсказал так называемый фонон-ротонный энергетический спектр таких возбуждений, как зависимость энергии возбуждений от их импульса $\hbar q$: $E_{\text{ph-r}}(q) = \hbar\omega_{\text{ph-r}}(q)$ [2]. В свою очередь Козн и Фейнман [3] предложили экспериментальный

способ для определения спектра коллективных возбуждений по значениям максимумов $E_{\text{max}}(q) = \hbar\omega_{\text{max}}(q)$ в динамическом структурном факторе жидкости $S(q, \omega)$. При этом значения функции $S(q, \omega)$ в зависимости от величин импульса $\hbar q$ и энергии $E = \hbar\omega$ могут быть найдены экспериментально по сечению неупругого рассеяния нейтронов и рентгеновских лучей в жидкости.

Ротонная часть спектра в сверхтекучем гелии была впервые экспериментально обнаружена в работе [4], а полностью дисперсионная кривая для фонон-ротонного спектра экспериментально определена в работах [5,6]. Для значений волнового вектора q , меньших $0,6 \text{ \AA}^{-1}$,

дисперсионная кривая подобна фононной ($\omega_{\text{ph-r}}(q) \sim q$) и определяется скоростью, близкой к термодинамической скорости звука. Далее имеет место аномальная дисперсия, а энергия возбуждений достигает максимума (около 14 К) при волновом векторе $q_M = 1,13 \text{ \AA}^{-1}$. Этот максимум принято называть «максонем». Минимум дисперсионной кривой в сверхтекучем гелии достигается при значении волнового вектора $q_r = 1,93 \text{ \AA}^{-1}$ и соответствует энергии $\Delta = 8,62 \text{ К}$ при давлении насыщенного пара. Дисперсионную кривую около минимума называют «ротонной» областью спектра (см. подробнее [7,8]).

Таким образом, фонон-ротонный спектр полностью определяется поведением динамического структурного фактора, величина которого равна (см., например, [9])

$$S(q, \omega) \equiv \frac{1}{V} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(t) \hat{\rho}_{-\mathbf{q}}(0) \rangle dt, \quad (1)$$

где угловые скобки обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса для системы, находящейся в объеме V , $\hat{\rho}_{\mathbf{q}}(t)$ — фурье-образ оператора плотности числа частиц в представлении Гейзенберга с точным гамильтонианом рассматриваемой системы:

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}, \quad (2)$$

$\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом $\hbar\mathbf{p}$, которые удовлетворяют известным соотношениям коммутации. Здесь и далее спиновые индексы опущены.

Из спектрального представления для динамического структурного фактора следует [9]

$$S(q, \omega) = -\frac{2\hbar}{1 - \exp(-\hbar\omega/T)} \text{Im} \chi(q, \omega),$$

$$S(q, -\omega) = S(q, \omega) \exp(-\hbar\omega/T). \quad (3)$$

Здесь T — температура рассматриваемой системы в энергетических единицах, $\chi(q, \omega)$ — функция отклика «плотность–плотность»

$$\chi(q, \omega) = \langle\langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}} | \hat{\rho}_{-\mathbf{q}} \rangle\rangle_{\omega}, \quad (4)$$

$$\langle\langle \hat{A} | \hat{A}^+ \rangle\rangle_{\omega} \equiv -\frac{i}{\hbar V} \int_0^{\infty} \exp[i(\omega + i0)t] \langle [\hat{A}(t), \hat{A}^+(0)] \rangle dt. \quad (5)$$

Соотношения (1), (4), (5) следует понимать в термодинамическом пределе

$$\langle \hat{N} \rangle \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad \bar{n} = \langle \hat{N} \rangle / V = \text{const}, \quad (6)$$

где $\langle \hat{N} \rangle$ — среднее полное число частиц в рассматриваемой системе, которая занимает объем V и характеризуется заданной средней плотностью числа частиц \bar{n} , $\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}$ — оператор полного числа частиц.

Из определения (4) следует, что функция отклика $\chi(q, \omega)$ является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексных значений ω . Кроме того, как следует из теории линейного отклика (см, например, [9]), функция отклика «плотность–плотность» описывает поведение средней неоднородной плотности в пространстве и времени при воздействии на рассматриваемую систему слабого скалярного поля. Поэтому особенности (полюсы) функции отклика $\chi(q, \omega)$ в нижней полуплоскости комплексных значений ω

$$z_{\chi}(q) = \text{Re} z_{\chi}(q) - i \text{Im} z_{\chi}(q), \quad \text{Im} z_{\chi}(q) > 0 \quad (7)$$

и определяют спектр коллективных возбуждений, которые будем далее называть коллективными возбуждениями плотности, при очевидном условии

$$\text{Im} z_{\chi}(q) / \text{Re} z_{\chi}(q) \ll 1. \quad (8)$$

Согласно проведенному выше обсуждению, можно считать

$$\text{Re} z_{\chi}(q) = \omega_{\text{ph-r}}(q) \approx \omega_{\text{max}}(q). \quad (9)$$

Таким образом, для теоретического определения спектра коллективных возбуждений плотности необходимо вычислить функцию отклика «плотность–плотность» для квантовой жидкости. Но регулярная процедура для прямого вычисления функций отклика отсутствует. Однако функция отклика $\chi(q, \omega)$ совпадает с соответствующей температурной функцией Грина на мнимой оси комплексных значений ω в точках $\hbar\omega_n = 2\pi i n T$, n — натуральное число (см., например, [10]). Для температурных функций Грина существует хорошо разработанная диаграммная техника теории возмущений по межчастичному взаимодействию, основанная на методах квантовой теории поля [9, 10]. В результате процедура вычисления функции отклика $\chi(q, \omega)$ сводится к задаче построения аналитического продолжения соответствующей температурной функции Грина с дискретного множества точек на мнимой оси на всю верхнюю полуплоскость комплексных значений ω [11, 12]. Хотя такая задача и не имеет решения в общем виде, в различных конкретных случаях аналитическое продолжение может быть проведено. Например, можно ввести неприводимые функции в диаграммной технике теории возмущений. Они определяются как сумма диаграмм, которые не могут быть разделены на две части по одной линии взаимодействия (см., например, [7]). В частности, для функции отклика $\chi(q, \omega)$ можно записать

$$\chi = \bar{\chi} + \bar{\chi}v(q)\bar{\chi} + \bar{\chi}v(q)\bar{\chi}v(q)\bar{\chi} + \dots, \quad (10)$$

где $\bar{\chi}$ — неприводимая часть функции отклика χ , $v(q)$ — фурье-образ парного потенциала взаимодействия атомов в жидкости. Из соотношения (10) непосредственно следует

$$\chi(q, \omega) = \bar{\chi}(q, \omega) / \epsilon(q, \omega). \quad (11)$$

Знаменателем в (11) является так называемая диэлектрическая функция

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - v(q)\bar{\chi}(q, \omega). \quad (12)$$

Соотношения (10)–(12) справедливы как для нормальных систем, так и для систем с конденсатом Бозе–Эйнштейна (БЕС) [7]. В результате, согласно (3), (11), (12),

$$S(q, \omega) = -\frac{2\hbar}{1 - \exp(-\hbar\omega/T)} \frac{1}{v(q)} \text{Im} \frac{1}{\epsilon(q, \omega)}. \quad (13)$$

Таким образом, для вычисления динамического структурного фактора $S(q, \omega)$ достаточно определить диэлектрическую функцию $\epsilon(q, \omega)$. Спектр коллективных возбуждений плотности может быть найден из решения дисперсионного уравнения (см. (7)–(9))

$$\epsilon(q, \omega) = 0. \quad (14)$$

Для хорошо определенных коллективных возбуждений плотности, которые могут быть истолкованы как квазичастицы и приводят к «острым» пикам в динамическом структурном факторе $S(q, \omega)$, дисперсионное уравнение (14) принимает вид

$$\text{Re } \epsilon(q, \omega_{\text{ph}-r}) = 0, \quad \text{Im } \epsilon(q, \omega_{\text{ph}-r}) \ll 1. \quad (15)$$

Обратимся теперь к вопросу о соотношении между величиной $E_{\text{max}}(q) = \hbar\omega_{\text{max}}(q)$ (или спектром коллективных возбуждений плотности), определяемой по максимумам динамического структурного фактора $S(q, \omega)$, и энергетическим спектром квазичастиц. В рамках статистической теории систем многих тождественных частиц (фермионов или бозонов) понятие о квазичастицах связано с особенностями (полюсами) одночастичной функции Грина $G(q, \omega) = \langle\langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \rangle\rangle_{\omega}$. В этом случае описание квазичастиц, которые будем называть одночастичными возбуждениями, существенно зависит от того, являются ли исходные частицы фермионами или бозонами (см., например, [9, 10]). В то же время, согласно проведенному выше рассмотрению, максимумы в динамическом структурном факторе $S(q, \omega)$ непосредственно связаны с особенностями (полюсами) функции отклика «плотность–плотность» $\chi(q, \omega)$. Соответствующие коллективные возбуждения плотности относятся к возбуждениям «бозонного типа» независимо от того, бозонами или фермионами являются исходные реальные частицы в рассматриваемой системе (см. (3)). Это обусловлено тем, что одновременные операторы плотности коммутируют друг с другом, что, в частности, приводит к определению температурной функции Грина «плотность–плотность» только на четных мнимых «частотах». Типичный пример коллективных возбуждений плотности — фононы и плазмоны [13]. Необходимо отметить, что рассмотрение коллективных

возбуждений плотности подобно элементарным частицам с введением соответствующих операторов рождения и уничтожения, как это иногда делается, является приближенным, хотя и полезным приемом. При его реализации в рассмотрение вводятся операторы рождения и уничтожения соответствующих коллективных возбуждений, которые удовлетворяют бозонным соотношениям коммутации. Дальнейшее развитие этого подхода связано с методом коллективных переменных, который был предложен Боголюбовым и Зубаревым [14] для описания сверхтекучего гелия ^4He (см. подробнее [15–18] и цитированную там литературу).

При этом число коллективных возбуждений зависит от термодинамических параметров рассматриваемой системы, что соответствует химическому потенциалу, тождественно равному нулю при любых термодинамических параметрах системы (см., например, [19]). Но для одночастичных возбуждений химический потенциал μ определяется по заданному числу исходных частиц (по крайней мере в нерелятивистском приближении).

Таким образом, в общем случае коллективные возбуждения плотности и одночастичные возбуждения не связаны друг с другом непосредственно. Однако совпадение в описании коллективных возбуждений плотности и одночастичных возбуждений возможно, но только при рассмотрении систем, состоящих из исходных бозонов. При этом для решения проблемы, связанной с различиями между химическими потенциалами для коллективных возбуждений плотности и одночастичных возбуждений, можем себе представить ситуацию, когда энергетический спектр одночастичных возбуждений $E_{SP}(q)$, который в общем случае зависит от термодинамических параметров системы, связан с химическим потенциалом рассматриваемой системы соотношением

$$E_{SP}(q \rightarrow 0) = \mu. \quad (16)$$

Это условие выполняется не только для идеального газа бозонов [15], но и для системы взаимодействующих бозонов при температурах, которые меньше температуры перехода T_{BEC} в состояние с БЕС [20]. Только в этом случае спектр для одночастичных возбуждений, понимаемый как

$$\hbar\omega_{SP}(q) = E_{SP}(q) - E_{SP}(q \rightarrow 0), \quad (17)$$

может соответствовать фонон-ротонному спектру коллективных возбуждений плотности, который наблюдается экспериментально. Иными словами, совпадение энергетических спектров коллективных возбуждений плотности и одночастичных возбуждений возможно только в системе бозонов при наличии БЕС.

2. Недиагональный дальний порядок и конденсат Бозе–Эйнштейна

Пенроуз и Онсагер [21,22], развивая идеи Боголюбова [23], предположили, что математическим определением существования ВЕС в системе взаимодействующих бозонов является наличие так называемого недиагонального дальнего порядка (off-diagonal long-range order (ODLRO)) в редуцированной матрице плотности

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = n_0 \neq 0, \quad (18)$$

где n_0 — плотность числа частиц в ВЕС. Термин ODLRO впервые введен Янгом [24]. Редуцированная матрица плотности $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в формализме вторичного квантования имеет вид

$$\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle. \quad (19)$$

Здесь $\hat{\Psi}^+(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ — соответственно полевые операторы рождения и уничтожения для рассматриваемой системы исходных частиц

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}), \\ \hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношение (18) обобщает критерий существования ВЕС в бозе-газе, который был предложен ранее Боголюбовым [23]. Обратим внимание на возможность обобщения понятия ВЕС на основе рассмотрения двухчастичной матрицы плотности [24] (в применении к сверхтекучему гелию ^4He см. подробнее [25,26]).

В современной терминологии процедура усреднения $\langle \dots \rangle$ при наличии ВЕС в рассматриваемой системе подразумевает учет так называемой нарушенной симметрии, так что

$$\langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) \rangle \equiv \Phi^*(\mathbf{r}) \neq 0, \quad \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \Phi(\mathbf{r}) \neq 0, \quad (21)$$

где функция $\Phi(\mathbf{r})$ может быть интерпретирована как «волновая функция конденсата», имеющая амплитуду и фазу [9]. Если рассматривается однородный случай, в ВЕС находятся только атомы с нулевым импульсом. Как следует из (20), (21), это означает, что $\langle \hat{a}_{\mathbf{p}} \rangle = 0$ для $\mathbf{p} \neq 0$ и $\langle \hat{a}_0 \rangle = \sqrt{\langle \hat{N}_0 \rangle}$, где $\langle \hat{N}_0 \rangle \equiv \langle \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \rangle = n_0 V$. В этом случае без ограничения общности можем считать, что фаза однородного ВЕС равна нулю.

При рассмотрении жидкости с ВЕС полевые операторы с учетом (21) представляют в виде

$$\hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) \rangle + \hat{\phi}^+(\mathbf{r}), \quad \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle + \hat{\phi}(\mathbf{r}), \quad (22)$$

где операторы $\hat{\phi}^+$ и $\hat{\phi}$ относятся только к атомам вне конденсата («надконденсатные» частицы). В этом случае, как впервые показал Беляев [27], равновесные свойства квантовой жидкости с ВЕС полностью определяются одночастичными функциями Грина, которые могут быть определены в виде обобщенной 2×2 матрицы

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(q, \omega) &\equiv \begin{pmatrix} G_{11}(q, \omega) & G_{21}(q, \omega) \\ G_{12}(q, \omega) & G_{22}(q, \omega) \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} \langle \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{\mathbf{q}}^+ \rangle \rangle_{\omega} & \langle \langle \hat{a}_{-\mathbf{q}}^+ | \hat{a}_{\mathbf{q}}^+ \rangle \rangle_{\omega} \\ \langle \langle \hat{a}_{\mathbf{q}} | \hat{a}_{-\mathbf{q}} \rangle \rangle_{\omega} & \langle \langle \hat{a}_{-\mathbf{q}}^+ | \hat{a}_{-\mathbf{q}} \rangle \rangle_{\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения движения для функций Грина $G_{\alpha\beta}$ удобно представить в виде уравнения Дайсона с введением матрицы собственно-энергетических функций $\Sigma_{\alpha\beta}$

$$G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}^{(0)} + G_{\alpha\gamma}^{(0)} \Sigma_{\gamma\nu} G_{\nu\beta}, \quad (24)$$

где одночастичные функции Грина для невзаимодействующих частиц равны

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(q, \omega) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{i\hbar(\omega + i0) - (\varepsilon_q - \mu)}, \quad (25)$$

$\varepsilon_q = \hbar^2 q^2 / 2m$, m — масса атома. В (24) и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Собственно-энергетические функции $\Sigma_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношениям симметрии. В частности, справедливы равенства $\Sigma_{11}(q, \omega) = \Sigma_{22}(q, -\omega)$ и $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$. При этом, как было показано Гугенгольцем и Пайнсом [28], химический потенциал μ для жидкости с ВЕС удовлетворяет равенству (см. (16))

$$\mu = \Sigma_{11}(q \rightarrow 0, \omega = 0) - \Sigma_{21}(q \rightarrow 0, \omega = 0). \quad (26)$$

Из (24) непосредственно следует (см., например, [9]), что полюсы функций Грина $G_{\alpha\beta}$ определяются нулями функции

$$D(q, \omega) \equiv [\hbar\omega - (\varepsilon_q - \mu + \Sigma_{11})][\hbar\omega + (\varepsilon_q - \mu + \Sigma_{22})] + \Sigma_{12}^2, \quad (27)$$

т.е. энергетический спектр $\hbar\omega_{SP}(q)$ для одночастичных возбуждений определяется уравнением (см. (17))

$$D(q, \omega) = 0. \quad (28)$$

Из соотношений (26)–(28) следует, что полюсы функций Грина $G_{\alpha\beta}$ не могут иметь «щели» в длинноволновом пределе $q \rightarrow 0$ [29].

Чтобы установить связь между уравнением (14), определяющим спектр коллективных возбуждений плотности, и уравнением (28), определяющим спектр одночастичных возбуждений, необходимо выяснить, к каким последствиям приводит наличие ВЕС (20), (21) при непосредственном вычислении функции отклика

$\chi(q, \omega)$ (4), (5). С учетом (20)–(22) оператор $\hat{\rho}_{\mathbf{q}}$ (2) можно представить как

$$\hat{\rho}_{\mathbf{q}} = \sqrt{\langle \hat{N}_0 \rangle} \hat{A}_{\mathbf{q}} + \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(n)}, \quad (29)$$

$$\hat{A}_{\mathbf{q}} = \hat{a}_{\mathbf{q}} + \hat{a}_{-\mathbf{q}}^+, \quad \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(n)} = \sum_{\mathbf{p} \neq 0, \mathbf{p} \neq \mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (29) описывает флуктуации плотности, связанные с атомами в конденсате, а второе слагаемое (оператор флуктуаций «нормальной» плотности) связано только с надконденсатными атомами. Таким образом, функция отклика «плотность–плотность» χ может быть записана как сумма «конденсатной» и «нормальной» функций отклика [29]

$$\chi = \chi^{(c)} + \chi^{(n)}, \quad (31)$$

$$\chi^{(c)} = \Lambda_{\alpha} G_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta}, \quad \chi^{(n)} = \left\langle \left\langle \hat{\rho}_{\mathbf{q}}^{(n)} \mid \hat{\rho}_{-\mathbf{q}}^{(n)} \right\rangle \right\rangle_{\omega}, \quad (32)$$

где вершинная функция Λ_{α} , связанная с нарушенной симметрией, исчезает, если $n_0 = 0$. При температурах $T > T_{BEC}$ в (31) имеется только «нормальная» функция отклика.

Впервые подробное исследование функции отклика «плотность–плотность» в форме (31) с использованием хорошо разработанной диаграммной техники было проведено Гаворе и Нозьером [30]. Они провели анализ диаграмм ряда теории возмущений для двухчастичных функций Грина K_2 , которые однозначно определяют функции отклика «плотность–плотность». Этот анализ затем был воспроизведен в рамках диэлектрического формализма [31,32] (см. подробнее [7] и цитированную там литературу). В результате, согласно сценарию Гаворе и Нозьера [30], полюсы функций $G_{\alpha\beta}$ и χ определяются нулями одной и той же функции, которая однозначно связана с $\epsilon(q, \omega)$ (14) и $D(q, \omega)$ (28). При этом в отсутствие нарушенной симметрии ($\Lambda_{\alpha} = 0$) полюсы функций $G_{\alpha\beta}$ и χ не связаны между собой.

3. Соотношение между спектрами коллективных и одночастичных возбуждений при наличии ВЕС

На первый взгляд, представленные выше результаты являются вполне общими и применимы как для газов, так и для жидкостей с ВЕС. Однако Кита [33] обратил внимание, что анализ структуры рядов теории возмущений, выполненный Гаворе и Нозьером [30], проведен раздельно для функций Грина $G_{\alpha\beta}$ и K_2 . Такой анализ может страдать неоднозначностью определения собственно-энергетических и вершинных функций при учете эффектов взаимодействия для систем с ВЕС. Другими словами, подобный анализ следует проводить в рамках формализма, допускающего единое

рассмотрение как одночастичных, так и двухчастичных функций Грина.

Для нормальных систем соответствующий формализм, основанный на процедуре функционального дифференцирования по отношению к некоторому заданному внешнему полю, был разработан Мартином и Швингером [34] и Беймом и Кадановым [35]. Такое рассмотрение позволяет получить формально точное выражение для двухчастичной функции Грина при однозначно определенных собственно-энергетических и вершинных функциях, а также вычислить двухчастичную функцию Грина с учетом аппроксимации Бейма [36]. Обобщение этого формализма для рассмотрения систем с ВЕС было дано Китой [37]. На этой основе в [33] было установлено, что полюсы функции отклика χ , строго говоря, не совпадают с полюсами одночастичных функций Грина $G_{\alpha\beta}$ в противоречии с утверждением Гаворе и Нозьера [30]. Причина такого расхождения, по-видимому, связана с проблемой однозначности определения собственно-энергетической функции как функционала одночастичных функций Грина, а также ее диаграммного представления [33].

В создавшейся ситуации необходимо выяснить, как рассмотренные выше теоретические результаты соотносятся с имеющимися экспериментальными данными для динамического структурного фактора $S(q, \omega)$.

Прежде всего необходимо отметить, что, согласно (11)–(13), максимумы в функции $S(q, \omega)$ могут быть связаны как с коллективными возбуждениями плотности при выполнении условий (16), так и с максимумами функции $\text{Im } \epsilon(q, \omega)$, для которой справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Im } \epsilon(q, \omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im } \epsilon(q, \omega) = 0, \quad \text{Im } \epsilon(q, \omega) \geq 0. \quad (33)$$

При этом максимумы функции $S(q, \omega)$, которые обусловлены коллективными возбуждениями плотности (16), характеризуются резкими («острыми») пиками, в отличие от случаев, которые характеризуются максимумами $\text{Im } \epsilon(q, \omega)$ (см., например, [38,39]). Кроме того, по мере увеличения значений волновых векторов q , как и при увеличении температуры, максимумы функции $S(q, \omega)$ становятся более «размытыми». В то же время фоновая часть спектра коллективных возбуждений плотности практически не изменяется с повышением температуры и характерна не только для жидкого гелия (как в сверхтекучей фазе, так и в нормальной фазе), но и для любых жидкостей, включая жидкие металлы (см. [40,41] и цитированную там литературу).

В рамках подхода Гаворе и Нозьера [30] и соответствующего диэлектрического формализма [31,32] фононы ($0,1 \text{ \AA}^{-1} \leq q \leq 0,7 \text{ \AA}^{-1}$) и ротоны ($q \sim 1,9 \text{ \AA}^{-1}$) представляют собой две различные области спектра

коллективных возбуждений в сверхтекучей фазе жидкого ${}^4\text{He}$, которые объединяются в единую ветвь благодаря наличию ВЕС. В этом сценарии длинноволновые фононы интерпретируются как нулевой звук в коллективных возбуждениях плотности, в то время как максон-ротонная часть спектра при больших волновых векторах интерпретируется как одночастичные возбуждения. В промежуточной области волновых векторов ($0,7 \text{ \AA}^{-1} \leq q \leq 1,2 \text{ \AA}^{-1}$) наблюдаются обе ветви возбуждений (фононы высоких энергий и одночастичные возбуждения (максоны)). В рамках этого сценария наличие острого максон-ротонного пика в динамическом структурном факторе $S(q, \omega)$ при $0,7 \text{ \AA}^{-1} \leq q \leq 1,2 \text{ \AA}^{-1}$ ниже температуры перехода $T_{\text{ВЕС}}$ является прямым следствием нарушенной симметрии и ассоциируется с ВЕС в сверхтекучей фазе жидкого ${}^4\text{He}$ (см. подробнее [7] и цитированную там литературу).

Однако недавно в экспериментах по неупругому рассеянию нейтронов фонон-ротонный спектр коллективных возбуждений плотности был обнаружен для двумерного слоя жидкого ${}^3\text{He}$ в нормальном состоянии при температурах ниже 100 мК [42]. Удовлетворительная интерпретация измеренного спектра возбуждений была дана в рамках динамической теории многих тел [43]. Тем самым, сценарий Гаворе и Нозьера не реализуется, так как в рассматриваемом жидком ${}^3\text{He}$, который является нормальной ферми-жидкостью, отсутствует ВЕС. Это означает, что спектры коллективных возбуждений плотности и одночастичных возбуждений не могут совпадать и в сверхтекучей фазе жидкого ${}^4\text{He}$.

Если судить о спектре коллективных возбуждений плотности только по положениям максимумов в динамическом структурном факторе, не учитывая того, насколько «острые» соответствующие пики в $S(q, \omega)$, то к настоящему времени имеются экспериментальные данные по фонон-ротонному спектру коллективных возбуждений плотности для многих жидкостей, обладающих различными физическими свойствами. В частности, для проводящих жидкостей (жидких металлов) соответствующие экспериментальные данные приведены в обзорах [44,45] (см. также [46]). На аналогию между спектрами коллективных возбуждений в сверхтекучем гелии и жидких металлах было указано в работе [47]. Аналогичный спектр возбуждений получен для ртути в окрестности перехода металл–неметалл [48,49].

Кроме того, еще в 1961 году Хеншоу и Вудс [6] сообщили об экспериментальном наблюдении фонон-ротонного спектра в нормальном жидком ${}^4\text{He}$ и установили температурную зависимость величины ротонного минимума Δ . В экспериментальной работе [50] указано на аналогию спектра возбуждений в сверхтекучем гелии и нормальных жидкостях. Соответствующие экспериментальные данные получены, в частности, для молекулярного параводорода [51] и неона [52] (см. подробнее [41]).

Эти экспериментальные данные убедительно показывают, что фонон-ротонный спектр, определяемый по положениям максимумов в функции $S(q, \omega)$, характерен не только для сверхтекучего ${}^4\text{He}$, но является универсальной характеристикой жидкого состояния. Отличительной особенностью сверхтекучего ${}^4\text{He}$ вплоть до температур около 1 К является то, что максимумы в $S(q, \omega)$ хорошо определены (не размыты), как, впрочем, и в двумерном жидком ${}^3\text{He}$ при еще более низких температурах. Это позволяет интерпретировать положение соответствующих максимумов как спектр коллективных возбуждений плотности. С повышением температуры максимумы в функции $S(q, \omega)$ достаточно сильно размываются в области волновых векторов, отвечающих максон-ротонной части спектра. Поэтому эти максимумы уже не характеризуют спектр коллективных возбуждений плотности. Подобная интерпретация соответствует представлениям о квазичастицах, которые были введены Ландау [1]. При этом Ландау не применял представление о квазичастицах для описания перехода из сверхтекучего в нормальное состояние.

Таким образом, приходим к выводу, что отличительной особенностью сверхтекучего ${}^4\text{He}$ при температурах, меньших $T_{\text{ВЕС}}$, и двумерного жидкого ${}^3\text{He}$ при очень низких температурах является то, что в этих условиях максимумы в функции $S(q, \omega)$ хорошо определены. Поэтому их положения могут быть интерпретированы как фонон-ротонный спектр коллективных возбуждений плотности.

Остается убедиться в том, что такая интерпретация не противоречит самой теории сверхтекучести Ландау, в том числе критерию сверхтекучести. В связи с этим обратим внимание, что Ландау в своей первой работе [1] предполагал существование двух типов элементарных возбуждений в сверхтекучем гелии: фононов, связанных с потенциальным движением жидкости, и ротоннов, связанных с вихревым движением жидкости (см. подробное описание в [53–55]). Однако в рамках такой модели ему не удалось дать количественное описание экспериментальных данных по скорости второго звука, которая была с большой точностью измерена Пешковым [56]. Поэтому Ландау в своей следующей работе [2] ограничился рассмотрением только одного типа возбуждений с фонон-ротонным энергетическим спектром. При этом ротонный участок спектра уже не должен ассоциироваться с вихревым движением [57].

В свою очередь, после ключевой работы Онсагера [58], Фейнман [59] выдвинул предположение, что квант действия должен входить в феноменологическую теорию Ландау через условия квантования циркуляции скорости сверхтекучей компоненты. Соответствующие условия постулируются. Вайнен [60] получил первое экспериментальное подтверждение того, что циркуляция сверхтекучей компоненты квантована. Позднее эти результаты были подтверждены фунда-

ментальными экспериментами Рейфилда и Рейфа [61] (см. также [62]).

Таким образом, первоначальная мысль Ландау о ротонах, связанных с вихревым движением, превратилась в идею квантованных вихрей, а сами ротоны стали частью спектра, описывающего потенциальное движение сверхтекучего гелия. При этом наблюдаемая в сверхтекучем гелии критическая скорость $V_{cr}^{(exp)}$ может быть на один-два порядка меньше, чем критическая скорость $V_{cr}^{(ph-r)} \approx 60$ м/с, связанная с ротонной щелью. Поэтому описание механизма срыва сверхтекучести в рамках критерия Ландау не может быть связано с ротонами (см. подробнее [63]).

В результате в настоящее время срыв сверхтекучести при движении сверхтекучего гелия в капиллярах связывают с процессами рождения протяженных квантовых вихрей Онсагера–Фейнмана или замкнутых вихревых нитей (петель, колец), что, в частности, позволяет описать экспериментальную зависимость критической скорости, при которой происходит срыв сверхтекучести в зависимости от размеров отверстия в капилляре [64–66]. Таким образом, коллективные возбуждения плотности с фонон-ротонным спектром не имеют непосредственного отношения к явлению сверхтекучести.

Это соответствует утверждению Пайнса о том, что наличие фонон-ротонного спектра коллективных возбуждений в жидком ^4He , как и нулевой звук в жидком ^3He , по-видимому, связано с сильным взаимодействием в жидкости, а не квантовой статистикой [67] (см. также [68]). В этой связи обратим внимание, что Ландау [1] не связывал сверхтекучую компоненту с ВЕС (см. подробнее [69]).

4. Заключение

Полагая, что сверхтекучий ^4He является жидкостью с ВЕС, приходим к выводу, что спектр коллективных возбуждений не совпадает со спектром одночастичных возбуждений в жидкости с ВЕС. При этом отличительной особенностью сверхтекучей фазы жидкого ^4He при температурах $T < T_{BEC}$ и двумерного нормального жидкого ^3He при очень низких температурах является наличие коллективных возбуждений с фонон-ротонным спектром. Однако такие коллективные возбуждения плотности не имеют непосредственного отношения к явлению сверхтекучести. Более того, фонон-ротонный спектр, определяемый по положениям максимумов в динамическом структурном факторе, является универсальным свойством жидкостей, хотя и не может быть интерпретирован в общем случае как спектр коллективных возбуждений плотности.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-19-01492).

1. Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941) [L.D. Landau, *J. Phys. USSR* **5**, 71 (1941)].
2. L.D. Landau, *J. Phys. USSR* **11**, 91 (1947).
3. M. Cohen and R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **107**, 13 (1957).
4. H. Palevsky, K. Otnes, K.E. Larsson, R. Pauli, and R. Stedman, *Phys. Rev.* **108**, 1346 (1957).
5. J.L. Yarnell, G.P. Arnold, P.J. Bendt, and E.C. Kerr, *Phys. Rev.* **113**, 1379 (1959).
6. D.G. Henshaw and A.D.B. Woods, *Phys. Rev.* **121**, 1266 (1961).
7. A. Griffin, *Excitations in a Bose-Condensed Liquid*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
8. H.R. Glyde, *Excitations in Liquid and Solid Helium*, Clarendon Press, Oxford (1994).
9. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика*, часть 2, Наука, Москва (1978) [E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Statistical Physics, Part 2*, Pergamon, Oxford (1980)].
10. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, Москва (1962) [A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, and I.E. Dzialoshinskii, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics*, Pergamon, Oxford (1965)].
11. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **36**, 900 (1959) [A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, and I.E. Dzialoshinskii, *Sov. Phys. JETP* **9**, 636 (1959)].
12. Е.С. Фрадкин, *ЖЭТФ* **36**, 1286 (1959) [E.S. Fradkin, *Sov. Phys. JETP* **9**, 912 (1959)].
13. Н.Б. Брандт, В.А. Кульбачинский, *Квазичастицы в физике конденсированного состояния*, Физматлит, Москва (2005).
14. Н.Н. Боголюбов, Д.Н. Зубарев, *ЖЭТФ* **28**, 129 (1955) [N.N. Bogolyubov and D.N. Zubarev, *Sov. Phys. JETP* **1**, 83 (1955)].
15. M. Tomchenko, *J. Molec. Liq.* **127**, 160 (2006).
16. И.А. Вакарчук, *ТМФ* **154**, 9 (2008) [I.A. Vakarchuk, *Theor. Math. Phys.* **154**, 6 (2008)].
17. I.O. Vakarchuk and R.O. Prytula, *Ukr. J. Phys.* **54**, 686 (2009).
18. I.O. Vakarchuk, V.S. Pastukhov, and R.O. Prytula, *ФНТ* **39**, 958 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 741 (2013)].
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, часть 1, Наука, Москва (1976) [L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics, Part 1*, Butterworth-Heinemann, Oxford (1980)].
20. S.A. Trigger and P.P.J.M. Schram, *Physica B* **228**, 107 (1996).
21. O. Penrose, *Philos. Mag.* **42**, 1373 (1951).
22. O. Penrose and L. Onsager, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
23. Н.Н. Боголюбов, *Известия АН СССР*, сер. физ. **11**, 77 (1947) [N.N. Bogolyubov, *J. Phys. USSR* **11**, 23 (1947)].
24. C.N. Yang, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 694 (1962).
25. Е.А. Пашитский, S.V. Mashkevich, and S.I. Vilchynskyy, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 075301 (2002).
26. М. Томченко, *ФНТ* **32**, 53 (2006) [*Low Temp. Phys.* **32**, 38 (2006)].

27. С.Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417 (1958) [S.T. Beliaev, *Sov. Phys. JETP* **7**, 289 (1958)].
28. N. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
29. P. Nozieres and D. Pines, *Theory of Quantum Liquids*, vol. II: *Superfluid Bose Liquids*, Addison-Wesley, Redwood City (1964).
30. J. Gavoret and P. Nozieres, *Ann. Phys.* **28**, 349 (1964).
31. P. Szepefalusy and I. Kondor, *Ann. Phys.* **82**, 1 (1974).
32. V.K. Wong and H. Gould, *Ann. Phys.* **83**, 252 (1974).
33. T. Kita, *Phys. Rev. B* **81**, 214513 (2010).
34. P.C. Martin and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **115**, 1342 (1959).
35. G. Baym and L. Kadanoff, *Phys. Rev.* **124**, 287 (1961).
36. G. Baym, *Phys. Rev.* **127**, 1391 (1962).
37. T. Kita, *Phys. Rev. B* **80**, 214502 (2009).
38. В.Б. Бобров, Ю.П. Власов, С.А. Триггер, *ЖЭТФ* **102**, 107 (1992) [*JETP* **75**, 56 (1992)].
39. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and Yu.P. Vlasov, *Physica B* **203**, 95 (1994).
40. *Physics of Simple Liquids*, H.N.V. Temperley, J.S. Rowlinson, and G.S. Rushbrooke (eds.), North-Holland Publ., Amsterdam (1968).
41. V.B. Bobrov, S.A. Trigger, and D.I. Litinski, in *Physics of Extreme States of Matter*, ИИТ, Moscow (2014), p. 154.
42. H. Godfrin, M. Meschke, H.-J. Lauter, A. Sultan, H.M. Böhm, E. Krotscheck, and M. Panholzer, *Nature* **483**, 576 (2012).
43. H.M. Böhm, R. Holler, E. Krotscheck, and M. Panholzer, *Phys. Rev. B* **22**, 224505 (2010).
44. T. Scopigno, G. Ruocco, and F. Sette, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 881 (2005).
45. W.-C. Pilgrim and C. Morket, *J. Phys.: Condens. Matter* **18**, R585 (2006).
46. A.H. Said, H. Sinn, A. Alatas, C.A. Burns, D.L. Price, M.L. Saboungi, and W. Schirmacher, *Phys. Rev. B* **74**, 172202 (2006).
47. A.M. Belyayev, V.B. Bobrov, and S.A. Trigger, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 9965 (1989).
48. D. Ishikawa, M. Inui, K. Matsuda, K. Tamura, S. Tsutsui, and A.Q.R. Baron, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 097801 (2004).
49. K. Tamura, M. Inui, K. Matsuda, and D. Ishikawa, *J. Non-Crystall. Solids* **353**, 3348 (2007).
50. K.S. Pedersen and K. Carneiro, *Phys. Rev. B* **22**, 191 (1980).
51. F.J. Bermejo, B. Fak, S.M. Bennington, R. Fernandez-Perea, C. Cabrillo, J. Dawidowski, M.T. Fernandez-Diaz, and P. Verkerk, *Phys. Rev. B* **60**, 15154 (1999).
52. A. Cunsolo, G. Pratesi, R. Verbeni, D. Colognesi, C. Masciovecchio, G. Monaco, G. Ruocco, and F. Sette, *J. Chem. Phys.* **114**, 2259 (2001).
53. Э.А. Пашицкий, *ФНТ* **25**, 115 (1999) [*Low Temp. Phys.* **25**, 81 (1999)].
54. S. Balibar, *J. Low Temp. Phys.* **146**, 441 (2007).
55. A. Griffin, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 164 (2009).
56. V.P. Peshkov, *J. Phys. USSR* **10**, 389 (1946).
57. L.P. Pitaevskii, *J. Low Temp. Phys.* **87**, 127 (1992).
58. L. Onsager, *Nuovo Cim.* **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
59. R.P. Feynman, in: *Progress in Low Temperature Physics*, C.J. Gorter (ed.), North-Holland, Amsterdam (1955), vol. 1, p. 17.
60. W.F. Vinen, *Nature* **181**, 1524 (1958).
61. G.W. Rayfield and F. Reif, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 305 (1963).
62. G.P. Bewley, D.P. Lathrop, and K.R. Sreenivasan, *Nature* **441**, 588 (2006).
63. В.Б. Бобров, С.А. Триггер, *Краткие сообщения по физике ФИАН* №6, 48 (2013) [*Bull. Lebedev Phys. Institute* **40**, 168 (2013)].
64. S.J. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1974).
65. R.J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1991).
66. M.S. Paoletti and D.P. Lathrop, *Annu. Rev. Condens Matter Phys.* **2**, 213 (2011).
67. D. Pines, *Physics Today* **34**, 106 (1981).
68. P. Nozieres, *J. Low Temp. Phys.* **137**, 45 (2004).
69. Е.М. Лифшиц, *УФН* **34**, 512 (1948).

To the relation between phonon–roton spectrum and single-particle excitations spectrum in liquids with Bose–Einstein condensate

V.B. Bobrov, A.G. Zagorodny, and S.A. Trigger

Analysis of the existing theoretical conceptions of the spectrum of collective density excitations and the spectrum of single-particle excitations is performed for liquids with the Bose–Einstein condensate. Using experimental data, the problem of relation between the collective phonon–roton excitations in various liquids and the Bose–Einstein condensate is discussed.

PACS: 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow;
 05.30.Jp Boson systems;
 67.25.dt Sound and excitations;
 67.25.D– Superfluid phase.

Keywords: superfluid ^4He , Bose–Einstein condensate, collective excitations, single-particle excitations.