Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2015, т. 41, № 9, с. 855–863

Уравнение Ландау–Лифшица

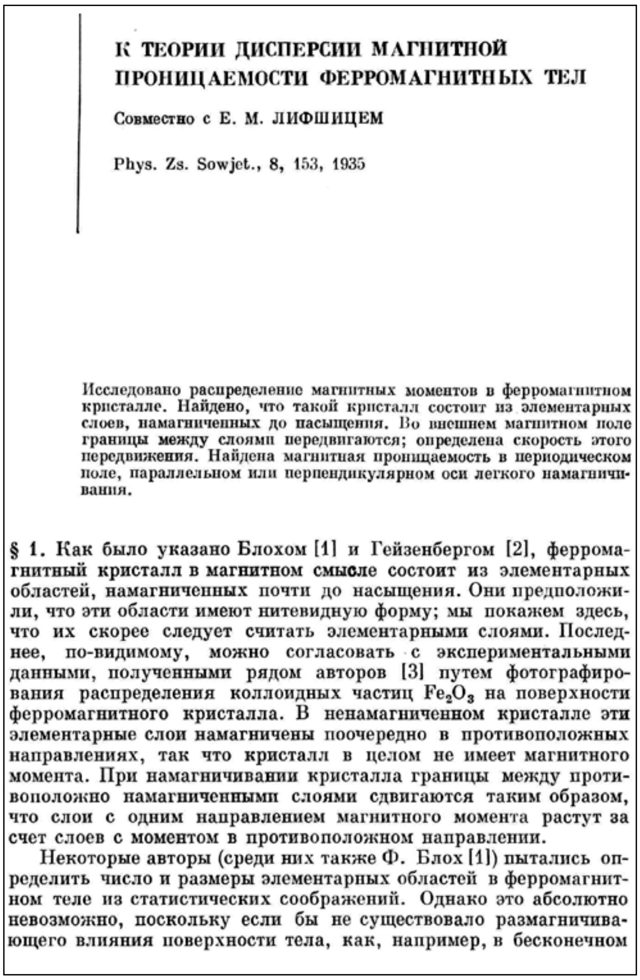
80 лет истории, успехи и перспективы

В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов

Восемьдесят лет назад вышла в свет работа Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица «К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел» (*Phys. Zs. Sowjetunion* **8**, 153 (1935)). Для современного читателя удобно пользоваться переводом этой работы в сборнике [1], и далее при цитировании номера страниц указываются по этому переводу. Отметим также удобный английский источник [2]. Развитие физики магнитных явлений показало, что содержащиеся в этой статье результаты оказались гораздо шире, чем было сформулировано в ее названии. В этой работе не только решены важные задачи физики магнетизма, актуальные для своего времени, но и фактически сформулирован новый (феноменологический) подход к физике упорядоченных спиновых систем. Основой этого подхода является уравнение динамики намагниченности, впервые записанное авторами статьи и получившее в мировой литературе название уравнения Ландау–Лифшица.

Настоящей статьей открывается специальный выпуск журнала Физика низких температур «80 лет уравнению Ландау–Лифшица», который будет представлен в номерах 9 и 10. В этой статье кратко обсуждается влияние указанной работы Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица и особенно сформулированного в ней уравнения Ландау–Лифшица на последующее развитие физики магнитных явлений. Мы не претендуем на полноту обсуждения темы: своей задачей мы считаем выявление наиболее важных тенденций и закономерностей.

Задача детального изложения истории развития физики магнетизма трудновыполнима и выходит за рамки нашей работы, детали можно найти в монографии [3]. Для цели нашей работы важно отметить, что к 1935 году в физике сильного магнетизма был получен ряд фундаментальных результатов (см. детальнее монографию [3]). В работах В. Гайзенберга (1928 г.) Я.Г. Дорфмана и Я.И. Френкеля (1928 г.) была вскрыта природа ферромагнитного упорядочения, т.е. показано, что оно обусловлено обменным взаимодействием электронов. Кроме того, гипотеза магнитных доменов, сформулированная в интуитивной форме в работе П. Вейсса (1908 г.) и объяснившая природу ненасыщенного состояния ферромагнетиков, к началу тридцатых годов была проверена экспериментально. Было обнаружено, что домены намагничены почти однородно и разделены друг от друга междоменными границами, и что ферромагнетик может намагничиваться путем смещения доменной стенки. Сикстус и Тонкс (1931 г.) исследовали динамику уединенной стенки в тонкой ферромагнитной проволоке под действием внешнего магнитного поля *H*, снимающего эквивалентность намагниченностей в доменах (продвигающего поля). Они обнаружили, что скорость стенки *v* линейно растет с ростом *H*, ввели понятие подвижности стенки как отношения ее скорости к величине *H* (см. детальнее обзорные работы [4,5]). Отметим только, что к середине 30-х годов теория статических и особенно динамических свойств магнетиков с доменами отсутствовала.



К ТЕОРИИ ДИСПЕРСИИ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТЕЛ

Совместно с Е. М. ЛИФШИЦЕМ

Phys. Zs. Sowjet., 8, 153, 1935

Исследовано распределение магнитных моментов в ферромагнитном кристалле. Найдено, что такой кристалл состоит из элементарных слоев, намагниченных до насыщения. Во внешнем магнитном поле границы между слоями передвигаются; определена скорость этого передвижения. Найдена магнитная проницаемость в периодическом поле, параллельном или перпендикулярном оси легкого намагничивания.

§ 1. Как было указано Блохом [1] и Гейзенбергом [2], ферромагнитный кристалл в магнитном смысле состоит из элементарных областей, намагниченных почти до насыщения. Они предположили, что эти области имеют нитевидную форму; мы покажем здесь, что их скорее следует считать элементарными слоями. Последнее, по-видимому, можно согласовать с экспериментальными данными, полученными рядом авторов [3] путем фотографирования распределения коллоидных частиц Fe_2O_3 на поверхности ферромагнитного кристалла. В ненамагниченном кристалле эти элементарные слои намагничены поочередно в противоположных направлениях, так что кристалл в целом не имеет магнитного момента. При намагничивании кристалла границы между противоположно намагниченными слоями сдвигаются таким образом, что слои с одним направлением магнитного момента растут за счет слоев с моментом в противоположном направлении.

Некоторые авторы (среди них также Ф. Блох [1]) пытались определить число и размеры элементарных областей в ферромагнитном теле из статистических соображений. Однако это абсолютно невозможно, поскольку если бы не существовало размагничивающего влияния поверхности тела, как, например, в бесконечном

На основе спинового обменного гамильтониана Гейзенберга Ф. Блох (1930 г.) предсказал специфические коллективные возбуждения ферромагнетика (магноны на современном языке). Для простейшей модели ферромагнетика (гейзенберговской цепочки со спином половина) Г. Бете (1931 г.) удалось построить полный набор возбужденных состояний, в том числе так называемые спиновые комплексы (на современном языке магнитные солитоны).

Определенные успехи были достигнуты и в термодинамике магнетиков. Знание спектра элементарных возбуждений магнетика (магнонов) позволило предсказать температурную зависимость намагниченности (закон Блоха $M(T) \propto T^{3/2}$ (1930 г.)). Л. Неелем (1932 г.) и Л.Д. Ландау (1933 г.) была предсказана возможность антиферромагнитного упорядочения. Л.Д. Ландау была построена термодинамическая теория магнетиков с таким упорядочением, основанная на введении вектора антиферромагнетизма $\mathbf{l}$.

Даже на фоне этих значительных успехов в физике магнетизма работа Ландау–Лифшица производит впечатление фундаментального исследования, полного не только новыми результатами, но и идеями и предсказаниями. Конкретизируем полученные в ней результаты.

1. Сформулировано уравнение движения намагниченности.

2. Построен квазиравновесный термодинамический потенциал ферромагнетика, проведено разделение в этом потенциале вклада от обменных и релятивистских слагаемых.

3. Показано, что релятивистская часть строится в соответствии с симметрией кристалла в парамагнитной фазе.

4. Впервые введены в квазиравновесном термодинамическом потенциале производные по координатам (в его обменном слагаемом).

5. Доказано, что термодинамически выгодно разбиение ферромагнитного кристалла на систему плоскопараллельных полосовых доменов; вычислены размеры доменов.

6. Найдена структура неподвижной и движущейся доменной границы; исследовано намагничивание магнетика за счет процессов смещения доменных границ и найдена подвижность границы.

7. Вычислена восприимчивость ферромагнетика в переменном поле; показано, что она может иметь резонансный характер, и определена частота собственных однородных колебаний намагниченности.

Подчеркнем, что результаты, отмеченные в двух последних пунктах и относящиеся к существенно различным динамические процессам, включают описание не только динамических, но и релаксационных характеристик процессов. Таким образом, в работе [1] впервые была сформулирована последовательная феноменологическая теория ферромагнетизма, и это обстоятельство определило, на наш взгляд, особую значимость работы Л. Ландау и Е. Лифшица в физике магнетизма.

Развитый в ней феноменологический, или макроскопический, подход базируется на понятии средней намагниченности единицы объема $\mathbf{s}$ (в нашей статье мы используем обозначения работы [1] и обозначаем намагниченность вектором $\mathbf{s}$, а не $\mathbf{M}$, как это принято в современной литературе, которая может зависеть от координаты и времени, и записи энергии ферромагнетика в виде функционала от $\mathbf{s}$. При записи магнитной энергии кристалла явно учитывалась иерархия взаимодействий в магнетике и их симметрия, в частности изотропный характер наиболее сильного — обменного — взаимодействия. Это позволяет считать, что плотность обменной энергии, связанной с неоднородностью вектора $\mathbf{s}$, может быть записана в изотропном виде

$$\frac{1}{2}\alpha[(\nabla s_x)^2+(\nabla s_y)^2+(\nabla s_z)^2]=\frac{1}{2}\alpha(\nabla \mathbf{s})^2,$$

и что длина вектора $\mathbf{s}$ остается постоянной по всему кристаллу и практически равна моменту насыщения (см. [1], стр.129). Помимо энергии неоднородности $\mathbf{s}$ вида $\alpha(\nabla\mathbf{s})^2/2$, эта плотность включает в себя слагаемые релятивистского происхождения: энергию магнитной анизотропии и взаимодействие намагниченности с магнитным полем. Важно отметить, что анализ последнего взаимодействия проводился самосогласованно: учитывался вклад размагничивающего поля, для вычисления которого использовались уравнения магнитостатики с необходимыми граничными условиями ([1], стр. 132).

В соответствии с феноменологическим подходом минимизация полной энергии образца ферромагнетика по виду функции $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ определяет распределение намагниченности и магнитного поля в образце. На этой основе в [1] найдена структура 180-градусной доменной стенки, вычислена ее энергия и рассчитаны параметры равновесной доменной структуры плоскопараллельной доменной пластины. Впервые показано, что доменная структура отвечает термодинамически равновесному состоянию ограниченных образцов ферромагнетиков. Развитый в [1] подход оказался весьма плодотворным, и впоследствии практически все работы по теории доменов выполнялись именно на его основе.

Центральной частью феноменологического описания является введение эффективного поля $\mathbf{f}$ как вариации энергии по $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{f}=\alpha\nabla^2\mathbf{s}+\beta s_z\mathbf{n}+\mathbf{H}. \qquad (1)$$

Условие минимума энергии ферромагнетика с учетом условия $\mathbf{s}^2=\mathrm{const}$ может быть записано в виде $\mathbf{f}\parallel\mathbf{s}$ ([1], стр. 137).

Эффективное поле (1) действует на намагниченность ферромагнетика так же, как внешнее магнитное поле на изолированный спин. Запись эффективного поля, зависящего от состояния всех спинов, естественным образом учитывает коллективные эффекты в системе. Такая трактовка эффективного поля позволяет записать уравнение движения намагниченности ферромагнетика. Это уравнение, записанное в [1] (стр. 137, формула (21)) в виде

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = [\mathbf{f}, \mathbf{s}] + \lambda \left[\mathbf{f} - \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{s})\mathbf{s}}{s^2} \right], \qquad (2)$$

где обозначено $\mu_0 = e/mc$; $\hbar\mu_0$ — удвоенный магнетон Бора, получило в мировой литературе название «уравнение Ландау–Лифшица». В течение многих лет оно использовалось огромным числом авторов и сыграло колоссальную роль в физике магнетизма.

Обсудим смысл его слагаемых. Первое записано по аналогии с уравнением движения свободного спинового момента во внешнем магнитном поле. Идея о том, что основная часть взаимодействия частиц может быть учтена путем введения эффективного поля как функционала состояния системы, оказалась весьма плодотворной. В дальнейшем эта идея неоднократно использовалась в квантовой физике конденсированного состояния. Наиболее яркое применение — созданная Л.Д. Ландау теория ферми-жидкости (1956 г.).

Второе слагаемое уравнения (2) введено авторами для описания релаксации намагниченности к своему равновесному направлению, которому с учетом принятого соотношения $|\mathbf{s}| = 1$ отвечает условие $\mathbf{s} \parallel \mathbf{f}$. Как подчеркивалось авторами [1], релаксационное слагаемое в (2) обусловлено исключительно релятивистскими взаимодействиями.

На основе уравнения (2) были поставлены и решены две наиболее важные задачи динамической теории магнетизма.

Во-первых, в работе [1] была найдена восприимчивость ферромагнетика в поперечном переменном поле. Это типичная задача линейного отклика, ее анализ позволил предсказать наличие собственной частоты однородных колебаний намагниченности и выразить через константу λ декремент затухания этих колебаний. Наличие собственных колебаний спиновой системы (спиновых волн) ранее было предсказано Ф. Блохом (1930 г.). Однако подход, предложенный Ландау и Лифшицем, был более удобным для дальнейших обобщений: он позволил учесть магнитную анизотропию (произвольного вида) и влияние размагничивающего поля. Особенно важно, что он допускал описание, хотя бы на качественном уровне, релаксации спиновых колебаний и ширину резонанса. В дальнейшем этот подход получил широкое развитие для анализа линейного отклика ферромагнетика и эффектов нелинейности.

Во-вторых, уравнение Ландау–Лифшица было использовано в [1] для описания движения доменной границы. Доменная граница — существенно нелинейное образование, в котором отклонения намагниченности от равновесного направления не малы (порядка намагниченности насыщения) и локализованы в конечной области пространства. Иными словами, движущаяся доменная граница представляет собой нелинейную локализованную волну намагниченности (магнитный солитон на современном языке). Учет релаксации в (2) позволил исследовать вынужденное движение солитона под действием внешнего поля и определить подвижность солитона. В дальнейшем уравнение Ландау–Лифшица оказалось важнейшим аппаратом для анализа магнитных солитонов.

Таким образом, формулировка уравнения (2) существенно повлияла на развитие теории как линейной или слабонелинейной, так и существенно нелинейной динамики магнетиков. Обсудим кратко дальнейшее развитие методов и идей работы [1].

В [1] были исследованы только однородные линейные колебания намагниченности, т.е. спиновые волны с $\mathbf{k} = 0$. В работе Е.М. Лифшица [6] на основе уравнения (2) исследован спектр спиновых волн с $\mathbf{k} \neq 0$. Получен квадратичный закон дисперсии $\omega(k) \propto k^2$. Этот результат согласуется с полученным ранее Ф. Блохом, но допускает ряд нетривиальных обобщений.

К ним относятся, прежде всего, учет нелокального магнитодипольного взаимодействия. Напомним, что необходимые формулы — вид эффективного поля с учетом размагничивающего поля $\mathbf{H}$ и уравнения магнитостатики, определяющие связь $\mathbf{H}$ и намагниченности, — содержались уже в [1]. Ч. Киттелем на основе уравнения (2) был исследован однородный ферромагнитный резонанс в конечных образцах ферромагнетика [7]. Оказалось, что учет дипольного взаимодействия приводит к зависимости частоты резонанса от формы образца, что позволило описать известные эксперименты. С. Херрингом и Ч. Киттелем [8] был изучен спектр спиновых волн с учетом размагничивающего поля. Ими показано, что в этом случае частота спиновой волны зависит не только от величины вектора $\mathbf{k}$, но и от его направления относительно равновесной намагниченности. Отметим, что учет магнитного дипольного взаимодействия в спектре спиновых волн был выполнен Гольдштейном и Примаковым [9] в микроскопической модели ферромагнетика.

Для дальнейшего экспериментального и теоретического анализа спиновых волн важную роль сыграла работа Г. Сула [10]. В ней на основе уравнения Ландау–Лифшица исследовано нелинейное возбуждение спиновых волн с $\mathbf{k} \neq 0$. В [9] и последующих за ней работах Е. Шлемана с соавторами [11] и Ф. Моргентеллера [12] была предсказана возможность возбуждения коротковолновых спиновых волн (параллельная накачка) и предложены методы определения их затухания. В частности, оказалось, что можно возбуждать спиновые волны со значением $\mathbf{k}$ до 10^6 см$^{-1}$ и измерять зависимость их затухания γ от волнового вектора $\mathbf{k}$ в интервале от 0 до 10^6 см$^{-1}$.

Это обстоятельство стимулировало подробные исследования закономерностей затухания спиновых волн, в частности теоретическое изучение зависимости γ от температуры и волнового вектора. Как правило, эти исследования основывались на микроскопическом подходе. Пионерская работа в этом направлении была выполнена А.И. Ахиезером [13]. Согласно этой работе, затухание спиновых волн определяется их взаимодействием между собой и с фононами. Дальнейшему развитию этой проблемы посвящено множество работ (Ф. Дайсон [14], В.Н. Кащеев и М.А. Кривоглаз [15] и др., см. подробнее монографии [16,17]). На основе микроскопического анализа было выяснено, что в процесс затухания спиновых волн вносит вклад как релятивистское, так и обменное взаимодействие. Вклад последнего в декремент затухания магнонов содержит дополнительный малый множитель вида $(a\mathbf{k})^2$ и мал при малом квазиимпульсе магнона, однако пропорционален обменному интегралу. Поэтому для коротковолновых спиновых волн ($|a\mathbf{k}| > \sqrt{J/\beta} >> 1$) этот вклад может быть основным. С учетом этого обстоятельства В.Г. Барьяхтаром [18–22] было проведено обобщение релаксационного слагаемого в уравнении Ландау–Лифшица. Было показано, что релаксационные слагаемые обменной природы характеризуются большей релаксационной константой λ_{ex}, но содержат, в отличие от релятивистских слагаемых, пространственные производные эффективного поля $\mathbf{f}$ [18]. Была установлена связь между симметрией магнетика и структурой релаксационных слагаемых [19–22]. Это рассмотрение позволило описать затухание магнонов в широком интервале изменения квазиимпульса и согласовать данные микроскопического расчета и феноменологического подхода, (см. [23] и обзоры [24,25]).

Исследование релаксационных явлений в магнетиках, особенно металлических, продолжается [26–28] и играет большую роль для развития современных направлений в физике магнетизма и ее приложения в технике.

Развивался также общий феноменологический подход к магнитным системам. А.И. Ахиезером, В.Г. Барьяхтаром и С.В. Пелетминским [29] впервые была получена формула для потоков энергии и импульса поля намагниченности ферромагнетика и выведена общая система уравнений, описывающих динамику намагниченности с учетом процессов теплопроводности и взаимодействия спиновой системы с решеткой. При этом естественным образом возникало изменение длины вектора намагниченности. В этой же работе впервые сформулировано условие для определения величины намагниченности в основном состоянии и записан релаксационный член в уравнении Л. Ландау–Е. Лифшица с двумя релаксационными константами, описывающими не только поперечную, но и продольную релаксацию. Продольный вклад был записан по аналогии с известным уравнением Блоха, которое применялось для описания парамагнитного резонанса, но соответствующая константа для магнетиков определялась микроскопически [16].

В методическом аспекте существенными оказались: запись уравнения Ландау–Лифшица в угловых переменных для вектора намагниченности [30], формулировка лагранжева формализма [31–33] для поля намагниченности.

Нетривиальные результаты были получены также при обобщении феноменологического подхода на случай более общих магнитных структур — антиферромагнетиков и ферритов. Феноменологическое описание таких магнетиков базируется на введенном Л.Д. Ландау (1933 г.) векторе антиферромагнетизма $\mathbf{l}$. Трансформационные свойства этого вектора и последовательный симметрийный анализ магнитных структур с $\mathbf{l} \neq 0$ был проведен И.Е. Дзялошинским [34]. Благодаря этому анализу автор построил теорию так называемого слабого ферромагнетизма — явления, связанного со слабой неколлинеарностью магнитных подрешеток и неполной компенсацией их намагниченностей. М.И. Кагановым, В.М Цукерником [35] и Е.А. Туровым, Ю.П. Ирхиным [36] на основе системы уравнений Ландау–Лифшица для каждой из подрешеток были изучены спектры спиновых волн в антиферромагнетике. И.В. Барьяхтар и Б.А. Иванов [37] на основе уравнений Ландау–Лифшица для намагниченностей подрешеток получили эффективное уравнение, описывающее динамику антиферромагнетика в терминах нормированного (единичного) вектора $\mathbf{l}$. А.Ф. Андреев и В.И. Марченко [38] получили это уравнение без использования модели подрешеток на основе анализа динамической симметрии антиферромагнетика. В этой работе, а также в ряде работ других авторов (Б. Гальперин, П. Хоэнберг (1969), Д.В. Волков с соавторами (1971, 1980), И.Е. Дзялошинский с соавторами (1976, 1978), Ю.М. Гуфан (1971) и др. (см. библиографию в [39]), развивался общий феноменологический подход к описанию динамики широкого класса магнитных систем, включающего неколлинеарные многоподрешеточные и аморфные магнетики. В этих работах было установлено интересное свойство спиновой динамики в АФМ, так называемое «обменное усиление» всех их динамических параметров. Обменное усиление приводит к огромным значениям скорости движения доменных стенок (десятки километров в секунду) и большим значениям частот магнитного резонанса, которые находятся в области от сотен гигагерц до терагерц, (см. обзоры [4,5] и работу [40]).

Весьма успешным оказалось применение уравнения Ландау–Лифшица для анализа существенно нелинейной динамики магнетиков, в частности магнитных солитонов, в обзорах [41,42] и фундаментальной монографии [43]. Напомним, что в работе [1] исследовалось движение доменной границы в пределе малых скоростей. Л.Р. Уокером (1963 г., не опубликовано, см., например, [41,42]) это решение было обобщено на случай не малых значений скорости и показано, что скорость поступательного движения доменной границы не может превышать так называемого уокеровского предела.

На основе динамических уравнений для вектора антиферромагнетизма $\mathbf{l}$ авторами совместно с А.Л. Сукстанским (1980) исследовалось движение доменной границы в слабых ферромагнетиках с немалой скоростью, в том числе сверхзвуковая динамика. Было показано, что предельная скорость стенки значительно выше, чем в ферромагнетиках. Теория хорошо согласуется с экспериментами группы М.В. Четкина, в которых для ортоферритов наблюдалось движение стенок со скоростью до 20 км/с [4,5].

Одномерные нелинейные волны намагниченности иного типа, чем доменные границы, были найдены И.А. Ахиезером и А.Е. Боровиком [44]. Этим волнам (локализованным солитонам намагниченности) отвечают одинаковые значения намагниченности справа и слева от волны. В дальнейшем были построены двухпараметрические локализованные солитоны как в одномерной модели, так и в реальном трехмерном случае (см. [41,42]). Такие солитоны можно представить как связанные состояния большого числа магнонов (магнонные капли), они являются квазиклассическим аналогом спиновых комплексов Бете. При этом снова наблюдается уже отмеченная выше тенденция: квазиклассический феноменологический анализ на основе уравнения Ландау–Лифшица значительно проще квантового, а результаты анализа в ряде случаев практически совпадают.

В восьмидесятые годы выяснился еще ряд замечательных и достаточно неожиданных математических свойств уравнения Ландау–Лифшица. Показано, что в одномерном случае, когда $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x,t)$, для достаточно общей модели двухосного ферромагнетика это уравнение является точно интегрируемым методом обратной задачи теории рассеяния, см. детали в обзорах [41–43]. Более того, это уравнение является наиболее общим одномерным интегрируемым уравнением. В частности, типичные интегрируемые уравнения, такие как уравнение синус-Гордон или нелинейное уравнение Шредингера, могут быть получены как частный случай уравнения Ландау–Лифшица. Для решения этой задачи потребовалось развитие ряда новых математических представлений, которые мы не имеем возможности прокомментировать даже бегло, см. [43].

Отметим еще одну математическую особенность уравнения Ландау–Лифшица, обусловленную как геометрическими свойствами переменной $\mathbf{s}(\mathbf{r},t)$, так и характером ее динамики. Магнитные солитоны могут характеризоваться нетривиальными топологическими свойствами, отвечающими отображению координатного пространства $\{\mathbf{r}\}$ на сферу $\mathbf{s}^2 = 1$. Оказалось, что для одномерных топологических солитонов возникает периодическая зависимость энергии от импульса [41,42]. Неодномерные солитоны, в которых намагниченность зависит от двух или трех пространственных переменных, также проявляют особенности динамики, тесно связанные с их топологическими свойствами. Двумерные топологические солитоны, для которых $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x, y, t)$, характеризуются весьма нетривиальной динамикой: движение солитона является гироскопическим и напоминает движение заряженной частицы при наличии силы Лоренца. При этом значение гироскопической константы полностью определяется топологическим инвариантом двумерного солитона, а именно, степенью отображения плоскости x, y на сферу $\mathbf{s}^2 = 1$. Это свойство, впервые установленное Малоземовым, Слончевским [45] и Тилем [46] для конкретных примеров, существенно для описания практически важного явления, динамики цилиндрических магнитных доменов, см. монографию [47]. Гироскопическая динамика характерна и для двумерных солитонов другого типа, так называемых магнитных вихрей. Для неподвижных трехмерных топологических солитонов с нетривиальным индексом Хопфа (который определяет степень отображения трехмерного пространства с отождествленными бесконечно удаленными точками на сферу $\mathbf{s}^2 = 1$) отличен от нуля момент импульса [48] и импульс [49] солитона, что способствует стабилизации таких солитонов.

Описанные выше результаты отражают влияние уравнения Ландау–Лифшица на развитие науки примерно за полвека (в 1985 году была проведена конференция, посвященная 50-й годовщине этого замечательного уравнения, см. [50]). Дальнейшее развитие физики еще в большей степени показало важность идей и методов, сформулированных в работе [1].

На рубеже XX и XXI столетий сформировались новые направления физики магнетизма, для которых характерны исследования в экстремальных пространственных и временных масштабах, *наномагнетизм* и *фемтомагнетизм* соответственно. Обсудим, как уравнение Ландау–Лифшица повлияло на развитие этих направлений. Мы не претендуем на сколько-нибудь полный обзор работ, посвященный анализу этих вопросов (это практически невозможно). Однако современные тенденции физики магнетизма существенно отражены в работах, вошедших в данные выпуски, что облегчает нашу задачу.

Развитие наномагнетизма базируется на развитии нанотехнологий и включает систематическое изучение и внедрение в практику искусственных магнитных материалов с субмикронными масштабами неоднородностей [50–52]. К таким материалам относятся магнитные структуры с чередованием нанослоев различных магнетиков или чередованием магнитных и немагнитных слоев; малые частицы различной формы и их упорядоченные массивы, одномерные или двумерные; магнитные сверхрешетки и другие системы.

Для наночастиц, особенно часто используемых магнитомягких частиц, принципиально важно влияние размагничивающих полей и границ частицы. Ясно, что наиболее адекватным подходом для их описания является уравнение Ландау–Лифшица. Для этих систем в полной мере проявляется тот факт, что закон дисперсии спиновых волн характеризуется большим разнообразием свойств и его можно изменять путем изменения внешних параметров. Дополнительная возможность регулировать характер магнонных мод связана с использованием магнитных сверхструктур (магнонных кристаллов), см., например, работу [54] и литературу в ней. Использование магнонных мод магнитных наноструктур открывает возможность создания новых типов компактных твердотельных приборов хранения и обработки информации. Эта область физики магнетизма получила название *магноника*, см. [55,56].

В последние годы обнаружены принципиально новые эффекты в термодинамике магнонного газа. Использование параллельной накачки для увеличения плотности магнонов позволяет создать бозе–эйнштейновский конденсат магнонов [57]. Это направление интенсивно развивается [58].

Среди многих новых результатов, полученных в рамках уравнения (2), отметим то, что основное состояние наномагнетиков может содержать топологически нетривиальные неоднородные состояния. Наиболее известный пример: тонкие круговые или эллиптические частицы содержат магнитные вихри [51,52]. Такие вихревые состояния энергетически выгодны, поскольку им отвечает замыкание магнитного потока внутри частицы. По существу, они представляют собой аналог равновесной доменной структуры, впервые описанной теоретически в работе [1]. Интерес к магнитным вихрям не ослабевает много лет [59,60]. Спектр магнонов на фоне топологического солитона обладает рядом особенностей [61]. В магнитных наноструктурах существуют специфические дискретные солитонные состояния, аналоги которых для стандартных кристаллических магнетиков отсутствуют [62]. Для анализа солитонных состояний разработаны весьма эффективные численные методы анализа уравнения Ландау–Лифшица [63]. Эти методы позволяют описывать как статические, так и динамические свойства наномагнетиков, в том числе с учетом тепловых флуктуаций [59]. Развиваются также новые многомасштабные численные подходы, позволяющие переходить от микромагнитного к атомному масштабу [64].

Для тонких слоев магнетиков, толщина которых сравнима в длиной пробега электрона в магнетике, возникают интересные эффекты, пренебрежимо малые для массивных образцов. Слончевский [65] и Берже [66] показали, что возможно эффективное управление намагниченностью такого слоя при пропускании через него электрического тока, в котором спины электронов поляризованы. При этом спиновый момент электронов передает магнитному слою дополнительный крутящий момент. Эффекты передачи спинового момента (spin transfer torque) могут приводить к нестабильности начального магнитного состояния (эффект «антизатухания» (antidumping)), что позволяет переключать намагниченность малых магнитных частиц, передвигать доменные стенки в магнитных нанопроводах, возбуждать спиновые колебания в малых магнитных частицах и их массивах. Все эти возможности не только интересны с точки зрения фундаментальной физики, но и являются основой новой области прикладной физики магнетизма, так называемой *спинтроники* (spintronics) [67,68]. Теоретическое описание эффектов передачи спинового момента требует учета взаимодействия спиновых и зарядовых степеней свободы для неравновесной системы электронов в неоднородной системе, что представляет собой непростую теоретическую проблему [69]. Однако оказалось, что учет эффектов передачи спинового момента может быть проведен в рамках уравнения Ландау–Лифшица. В частности, воздействие спинового тока на намагниченность в рамках уравнения Ландау–Лифшица описывается просто добавлением дополнительного слагаемого достаточно простой формы в правую часть уравнения (2). В частности, для практически интересного случая тока, протекающего перпендикулярно тонкой пленке магнетика, это слагаемое равно $A[\mathbf{e}-\mathbf{s}(\mathbf{es})]$, где единичный вектор $\mathbf{e}$ определяет направление поляризации спинов электронов, коэффициент A пропорционален величине тока и степени поляризации электронов и обратно пропорционален толщине пленки. На основе такого уравнения возможно описание широкого класса явлений, в том числе возбуждения немалых колебаний магнитного момента частиц, а также магнитного вихря в частице или пары вихрь–антивихрь в тонкой магнитной пленке [70]. Это дает еще один пример того, что уравнение Ландау–Лифшица обладает большой общностью и может быть применено для описания значительно более широкого класса явлений, чем было отмечено 80 лет назад в работе [1]. Весьма актуально также применение идей и методов спинтроники для антиферромагнетиков [40], что позволяет (за счет обменного усиления характерных частот антиферромагнетиков) создать приборы спинтроники, работающие в области терагерц.

В последние годы сформировалась новая и перспективная область физики магнетизма, получившая название *фемтомагнетизм*, которая базируется на возможности манипулирования намагниченностью магнетиков с помощью лазеров с длиной импульса 100 фемтосекунд и даже короче [71]. Такая возможность открывает перспективу сверхбыстрой магнитной записи и обработки информации и создания чисто оптических систем памяти. Здесь можно выделить два основных направления.

Одно связано с применением прозрачных магнетиков, в которых поглощение света мало и тепловым эффектом импульса света можно пренебречь. В отсутствие поглощения фотонов воздействие импульса на спиновую подсистему сводится к импульсному стимулированному рамановскому рассеянию [72]. Использование этого нетеплового механизма в рамках чисто оптической схемы «накачка–измерение» (pump-probe) позволило возбуждать спиновые колебания в ферромагнетиках и антиферромагнетиках [73,74]. Важно, что эти эффекты могут быть представлены как действие некоторого эффективного поля и описаны на основе уравнения Ландау–Лифшица с дополнительными слагаемыми [75]. Эти поля могут быть ассоциированы с вкладами различных магнитооптических эффектов, таких как эффект Фарадея или эффект Коттона–Мутона (Фойгта). Такой феноменологический подход в конечном итоге базирующийся на уравнении Ландау–Лифшица, значительно упрощает теоретическое описание проблемы и не имеет альтернативы для анализа нелинейных режимов спиновой динамики, возбуждении неоднородных мод спиновой динамики, солитонов и т.д.

Для металлических магнетиков значительная часть энергии светового импульса передается электронной подсистеме, температура которой повышается и на короткое время может стать выше точки Кюри. Фактически, развитие фемтомагнетизма началось с работы [76], в которой наблюдалось быстрое (за время короче пикосекунды) уменьшение намагниченности никеля после воздействия импульса длительностью 100 фемтосекунд и последующая релаксация намагниченности с характерным временем порядка пикосекунд. Далее были обнаружены неожиданные и достаточно необычные эффекты. Для ферримагнитного сплава редкоземельных и переходных металлов GdFeCo действие фемтосекундного импульса на первом этапе так же, как и для никеля, приводило к редукции спина (здесь намагниченностей обоих подрешеток), однако последующая эволюция оказалось принципиально иной. Вместо простой релаксации к начальному значению, примерно за такое же время (порядка нескольких пикосекунд) обе намагниченности изменяли знак, т.е. наблюдалось «переключение» суммарного магнитного момента [77]. В процессе этой пикосекундной эволюции возникало заведомо невыгодное состояние с параллельными моментами подрешеток. Эти эффекты были описаны на основе численного моделирования на атомном уровне, при котором моделировалось также изменение температуры системы [77,78]. Впоследствии подобные эффекты наблюдались для различных материалов, в том числе наноструктурированных [79]. Для всех них существенную роль играет изменение модуля вектора намагниченности, т.е. продольная эволюция спинов.

Таким образом, возникает вопрос о эволюции сильно неравновесных состояний намагниченности, с учетом возможности неоднородности материала. Для анализа подобных задач было бы полезно применение простого феноменологического уравнения, но простейшее релаксационное слагаемое вида (2) сохраняет модуль намагниченности. Заметим, что продольная эволюция спинов естественным образом возникает при использовании обобщенного релаксационного слагаемого, построенного с последовательным учетом динамической симметрии обменного взаимодействия [18,19,21,22]. Обменное взаимодействие не может приводить к релаксации полного спина системы, и эволюция модуля намагниченности простого ферромагнетика сводится к диффузионному процессу. Однако для магнетика с двумя подрешетками ситуация иная, и возможна однородная эволюция намагниченностей подрешеток $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ за «обменные» времена при сохранении полного спина $\mathbf{s} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. Чисто обменная эволюция быстро приводит систему в состояние частичного равновесия, которому отвечают значения спинов, отличающиеся от начальных, при том же значении полного спина. Дальнейшая эволюция происходит за счет более медленной релятивистской релаксации. Эти представления были использованы в работах [80,81] для описания экспериментов по сверхбыстрой переориентации спинов ферримагнитного GdFeCo. Уравнение Ландау–Лифшица с учетом как обычных релятивистских, так и обменных слагаемых позволяет описать спиновую динамику в наноструктурах [82] Таким образом, вопрос о характере релаксации неравновесных состояний для наноструктур приобретает особую актуальность, см. обзоры [23,83]

Нетривиальные особенности уравнения Ландау–Лифшица и важность результатов, полученных на его основе, уже надежно апробированы временем. Краткий ретроспективный анализ, проведенный в настоящей работе, не претендует на полноту. Мы четко осознаем, что нашей квалификации недостаточно для полного освещения всех разделов физики, фундаментальной и прикладной; математической физики и математики, в развитие которых работа Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица внесла огромный вклад. Нам остается лишь выразить уверенность в том, что значение этой работы не исчерпано и сейчас, и еще многие поколения исследователей будут обращаться к идеям и представлениям, развитым в этой замечательной работе 80 лет назад.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *К теории магнитной проницаемости ферромагнитных тел*, см. Л.Д. Ландау, Собрание трудов (в двух томах), Наука, Москва (1972), т. I, с.128.
2. Collected papers of L.D. Landau, Edited and with introduction by D. Ter Haar, Pergamon (1965), p. 101.
3. С.В. Вонсовский, *Магнетизм*, Наука, Москва (1971).
4. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, М.В. Четкин, *УФН* **146**, 417 (1985).

5. V.G. Bar'yakhtar, M.V. Chetkin, B.A. Ivanov, and S.N. Gadetskii, *Dynamics of Topological Magnetic Solitons. Experiment and Theory*, Springer Tracts in Modern Physics, Springer-Verlag (1994), v. 129.
6. Е.М. Лифшиц, *ЖЭТФ* **15**, 1 (1945).
7. C. Kittel, *Phys. Rev*. **71**, 270 (1947).
8. C. Herring and C. Kittel, *Phys. Rev*. **81**, 869 (1951).
9. H. Holstein and H. Primakoff, *Phys. Rev*. 5**8**, 1098 (1940).
10. H. Suhl, *J. Phys. Chem. Solids* **1**, 209 (1957).
11. E. Schlomann, J. Green, and V. Milano, *J. Appl. Phys*. **31**, S386 (1960).
12. F. Morgenthaler, *J. Appl. Phys*. **31**, S95 (1960).
13. A.I. Akhiezer, *J. Phys*. **10**, 217 (1946).
14. F. Dyson, *Phys. Rev*. **102**, 1217 (1956).
15. В.Н. Кащеев, М.А. Кривоглаз, *ФТТ* **3**, 1541 (1961).
16. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В Пелетминский. *Спиновые волны*, Наука, Москва (1967).
17. В.Г. Барьяхтар, В.Н. Криворучко, Д.А. Яблонский. *Функции Грина в теории магнетизма*, Наукова думка, Киев (1984).
18. В.Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **87**, 1501 (1984).
19. В.Г. Барьяхтар, *ФНТ* **11**, 1198 (1985) [*Sov. J. Low. Temp. Phys*. **11**, 662 (1985)].
20. В.Г. Барьяхтар, *ФТТ* **29**, 1317 (1987).
21. В.Г. Барьяхтар, *ЖЭТФ* **94**, 196 (1988).
22. V.G. Baryakhtar, *Physica B* **159**, 20 (1989).
23. V.N. Krivoruchko, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 864 (2015).
24. В.Г. Барьяхтар, А.Г. Данилевич, *ФНТ* **39**, 1279 (2013) [*Low Temp. Phys*. **39**, 993 (2013)].
25. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, В.Н. Криворучко, А.Г. Данилевич, *Современные проблемы динамики намагниченности: от основ до сверхбыстрой релаксации*, Химджест, Киев (2013).
26. J. Kuneš and V. Kambersky, *Phys. Rev. B* **65**, 212411 (2002).
27. Y. Tserkovnyak, E.M. Hankiewicz, and G. Vignale, *Phys. Rev. B* **79**, 094415 (2009).
28. O. Sukhostavets, J.M. Gonzalez, and K.Y. Guslienko, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 989 (2015).
29. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский, *ЖЭТФ* **58**, 228 (1958).
30. Г.В. Скроцкий, Л.В. Курбатов, *Феноменологическая теория ферромагнитного резонанса*, в кн. *Ферромагнитный резонанс*, под ред. С.В. Вонсовского, Физматгиз, Москва (1961), с. 25.
31. T.L. Gilbert, *Phys. Rev*. **100**, 1243 (1955).
32. Л.Б. Власов, Л.Г. Оноприенко, *ФММ* **15**, 47 (1963).
33. В.М. Цукерник, *ФТТ* **10**, 1006 (1968).
34. И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **32**, 1547 (1957).
35. М.И. Каганов, В.М. Цукерник, *ЖЭТФ* **34**, 106 (1958).
36. Е.А. Туров, Ю.П. Ирхин, *Изв. АН СССР*, сер. физ. **22**, 1168 (1958).
37. И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *ФНТ* **5**, 759 (1979) [*Sov. J. Low Temp. Phys*. **5**, 361 (1979)].
38. А.Ф. Андреев, В.И Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
39. Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва (2001).
40. Е.В. Гомонай, В.М. Локтев, *ФНТ* **41**, 898 (2015).
41. A.M. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Physica D* **3**, 363 (1981).
42. A.M. Kosevich, B.A. Ivanov, and A.S. Kovalev, *Phys. Rep*. **194**, 117 (1990).
43. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, УроРАН, Екатеринбург (2009).
44. И.А. Ахиезер, А.Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 508 (1967).
45. A.P. Malozemoff and J.C. Slonczewski, *IEEE Trans. Magn*. MAG-**11**, 1091 (1975).
46. A.A. Thiele, *Phys. Rev. Lett*. **30**, 230 (1973).
47. А. Малоземов, Дж. Слонзевски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, Мир, Москва (1982).
48. I.E. Dzyloshinskii and B.A. Ivanov, *JETP Lett.* **29**, 540 (1979).
49. N.R. Cooper, *Phys. Rev. Lett*. **82**, 1554 (1999).
50. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *Уравнение Ландау–Лифшица*, в: *Современные проблемы теории магнетизма*: Сборник научных трудов, Наукова Думка, Киев (1986), с. 3.
51. R. Skomski, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, R841 (2003).
52. *Advanced Magnetic Nanostructures*, D.J. Sellmyer and R. Skomski (eds.), Springer, New York (2006).
53. J. Stöhr and H. Siegmann, *Magnetism: From Fundamentals to Nanoscale Dynamics, Springer Series in Solid-State Sciences*, (2006), vol. 152.
54. J. Rychly, P. Gruszecki, M. Mruczkiewicz, J.W. Kłos, S. Mamica, and M. Krawczyk, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 959 (2015).
55. V.V. Kruglyak, S.O. Demokritov, and D. Grundler, *J. Phys. D* **43**, 264001 (2010).
56. C.S. Davies and V.V. Kruglyak, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 976 (2015).
57. S.O. Demokritov, V.E. Demidov, O. Dzyapko, G.A. Melkov, A.A. Serga, B. Hillebrands, and A.N. Slavin, *Nature* **443**, 430 (2006).
58. D.A. Bozhko, P. Clausen, A.V. Chumak, B. Hillebrands, and A.A. Serga, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 1024 (2015).
59. G.M. Wysin, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 1009 (2015).
60. A.B. Bogatyrev and K.L. Metlov *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 984 (2015).
61. S. Schroeter and M. Garst, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 1043 (2015).
62. R.L. Pylypchuk and Ya. Zolotaryuk, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 942 (2015).
63. S. Mamica, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 1030 (2015).
64. M.O.A Ellis, R.F.L. Evans, T.A. Ostler, J. Barker, U. Atxitia, O. Chubykalo-Fesenko, and R.W. Chantrell, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 908 (2015).
65. J.C. Slonczewski, *J. Magn. Magn. Mater*. **159**, L1 (1996).
66. L. Berger, *Phys. Rev. B* **54**, 9353 (1996).
67. S.D. Bader and S.S.P. Parkin, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys*. **1**, 71 (2010).
68. D.C. Ralph, M.D. Stiles, *J. Magn. Magn. Mater*. **320**, 1190 (2008).

69. В.И. Корнеев, Н.Е. Кулагин, А.Ф. Попков, К.С. Сукманова, *ФНТ* **41**, 887 (2015).
70. C.E. Zaspel and V.E. Kireev, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 1001 (2015).
71. G. Zhang, W. Hubner, E. Beaurepaire, and J.-Y. Bigot, *Laser-induced Ultrafast Demagnetization: Femtomagnetism, a New Frontier?*” in “*Spin Dynamics in Confined Magnetic Structures*”, *Topics in Applied Physics*, B. Hillebrands and K. Ounadjela (eds.), Springer, Berlin, (2002), Vol. 83, p. 245.
72. A.K. Zvezdin, and V.A. Kotov, *Modern Magnetooptics and Magnetooptical Materials*, IOP (1997).
73. A. Kirilyuk, A.V. Kimel, and Th. Rasing, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2731 (2010)
74. Б.А. Иванов, *ФНТ* **40**, 119 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 91 (2014)].
75. А.В. Кимель, А.К. Звездин, *ФНТ* **41**, 879 (2015)
76. E. Beaurepaire, J.-C. Merle, A. Daunois, and J.-Y.Bigot, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4250 (1996).
77. I. Radu, K. Vahaplar, C. Stamm, T. Kachel, N. Pontius, H.A. Dürr, T.A. Ostler, J. Barker, R.F.L. Evans, R.W. Chantrell, A. Tsukamoto, A. Itoh, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A.V. Kimel, *Nature* (*London*) **472**, 205 (2011).
78. T.A. Ostler, J. Barker, R.F.L. Evans, R. Chantrell, U. Atxitia, O. Chubykalo-Fesenko, S. ElMoussaoui, L. Le Guyader, E. Mengotti, L.J. Heyderman, F. Nolting, A. Tsukamoto, A. Itoh, D.V. Afanasiev, B.A. Ivanov, A.M. Kalashnikova, K. Vahaplar, J. Mentink, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A.V. Kimel, *Nature Commun.* **3**, 666 (2012).
79. A. Kirilyuk, A.V. Kimel, and T. Rasing, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 026501 (2013).
80. J.H. Mentink, J. Hellsvik, D.V. Afanasiev, B.A. Ivanov, A. Kirilyuk, A.V. Kimel, O. Eriksson, M.I. Katsnelson, and Th. Rasing, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 057202 (2012).
81. В.Г. Барьяхтар, В.И. Бутрим, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **98**, 327 (2013).
82. I.A. Yastremsky, P. M. Oppeneer, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **90**, 024409 (2014).
83. P. Nieves, U. Atxitia, R.W. Chantrell, and O. Chubykalo-Fesenko, *Fiz. Nizk. Temp.* **41**, 949 (2015).