Low Temperature Physics/Физика низких температур, 2015, т. 41, № 9, с. 917–937

Унитарная симметрия и обобщения уравнения Ландау–Лифшица на высокоспиновые магнетики

М.Ю. Ковалевский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина
E-mail: mikov51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 8 мая 2015 г., опубликована онлайн 24 июля 2015 г.

Дано описание динамики магнетиков с произвольным спином. Проанализирована связь чистых и смешанных квантовых состояний с магнитными степенями свободы. Получены нелинейные уравнения динамики нормальных и вырожденных неравновесных состояний высокоспиновых магнетиков. Детально рассмотрены подалгебры скобок Пуассона магнитных величин для спинов s = 1/2, 1, 3/2, при которых обменное взаимодействие обладает свойствами $SO(3)$, $SU(3)$, $SU(4)$, $SU(2) \times SU(2)$, $SO(4)$, $SO(5)$ симметрии. Получен явный вид поляризационной матрицы плотности для спин $s = 1$ и $s = 3/2$ магнетиков в чистых квантовых состояниях и установлена область допустимых значений магнитных степеней свободы для смешанных состояний.

Дано опис динаміки магнетиків з довільним спіном. Проаналізовано зв'язок чистих та змішаних квантових станів з магнітними ступенями свободи. Отримано нелінійні рівняння динаміки нормальних та вироджених нерівноважних станів високоспінових магнетиків. Детально розглянуто подалгебри дужок Пуассона магнітних величин для спінів s = 1/2; 1, 3/2, при яких обмінна взаємодія має властивості $SO(3)$, $SU(3)$, $SU(4)$, $SU(2) \times SU(2)$, $SO(4)$, $SO(5)$ симетрії. Отримано явний вигляд поляризаційної матриці щільності для спін $s = 1$ та $s = 3/2$ магнетиків в чистих квантових станах і встановлено область допущенних значень магнітних ступенів свободи для змішаних станів.

PACS: **75.10.–b** Общая теория и модели магнитного упорядочения.

Ключевые слова: спин, унитарная симметрия, динамика, скобки Пуассона.

Введение

Уравнение Ландау–Лифшица [1] описывает эволюцию магнитной среды с помощью вектора спина. Это уравнение хорошо обосновано и используется в исследовании динамических и статических свойств магнитных диэлектриков со спином s = 1/2. Десятилетие, предшествовавшее публикации работы [1], содержит революционные открытия квантовой механики, из которых упомянем только те, которые имеют непосредственное отношение к физике магнетизма. К ним относятся: спиновая гипотеза Гаудсмита и Уленбека, разработка матричной и волновой версий квантовой механики Гейзенбергом и Шредингером, открытие Дираком обменного магнитного взаимодействия, установление статистики Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна, введение спиновых волн Блохом и предсказание явления антиферромагнетизма Неелем. Представления о спине, как «новом» интеграле движения, оказало решающее воздействие на развитие физики магнитных материалов, позволило связать микроскопические магнитные характеристики частиц с их макроскопическим проявлением.

В настоящее время интенсивно исследуются квантовые системы, структурные элементы которых (частицы, кластеры, молекулы) обладают спином $s > 1/2$ (высокоспиновые магнетики). Интерес к этим объектам обусловлен надеждой получения новых магнитных состояний и физических свойств. Исследования высокоспиновых магнетиков актуальны благодаря теоретическим и экспериментальным работам по физике квазикристаллических структур, созданных на основе технологии оптических решеток [2,3]. Возможность регулирования геометрических параметров решетки и, тем самым, интенсивности межчастичного взаимодействия делает их привлекательными при изучении необычных свойств высокоспиновых магнетиков. Дополнительный стимул связан с бозе-эйнштейновской конденсацией нейтральных атомов с ненулевым спином [4–7]. Данные о квадрупольных магнитных состояниях [8–10] выявляют ограниченность применимости традиционной физики магнетизма в ее приложении к высокоспиновым системам и приводят к необходимости уточнения идеологии макроскопического описания таких магнетиков. Это направление также привлекательно благодаря работам по физике холодных ферми-газов [11–14]. Традиционная физика конденсированного состояния имеет дело с достаточно простыми группами симметрии, к которым относятся группы трансляций T или поворотов в пространстве $SO(3) \sim SU(2)$. Более сложные группы унитарной симметрии $SU(n)$ ($n > 2$) использовались в физике высоких энергий, теории поля для классификации адронов. В физике конденсированного состояния такие группы симметрии оказались необходимы в описании высокотемпературных сверхпроводников, магнетиков и низкоразмерных полупроводников [15–19]. Сообщения об экспериментальной реализации высокосимметричных состояний представлены в работах [20–22].

В исследовании высокоспиновых магнетиков имеются две существенно разные проблемы. Одна из них — создание достаточно устойчивых магнитных микроскопических структур со спиновым моментом $s > 1/2$. Другая проблема — создание и изучение среды с максимально возможной магнитной симметрией $SU(2s+1)$. Развитые в последние два десятилетия технологии оптических решеток являются удобным экспериментальным инструментом практической реализации последней задачи.

В традиционном теоретическом подходе предполагается, что различие значений спина структурных элементов среды проявляется только в численном изменении модуля этого вектора. Качественная картина описания состояния равновесия и динамики при изменении спина в соответствии с [1] остается неизменной. В развитии представлений современного макроскопического описания магнетиков со спином $s \geq 1$ следует учесть такие факторы. Так как явление магнетизма — квантовое, то установление термодинамики высокоспиновых магнетиков требует анализа связи магнитных степеней свободы и физических состояний. Каждое из чистых или смешанных квантовых состояний имеет свой набор динамических величин, которым необходимо придать соответствующий физический смысл. Смешанные состояния, в свою очередь, подразделяются на нормальные и вырожденные (состояния со спонтанно нарушенной симметрией). Другой фактор — это возможность $SU(2s+1)$ симметрии обменного взаимодействия, которая играет решающую роль в формировании состояния равновесия и структуре динамических уравнений высокоспиновых магнетиков. Третий важный момент — характер нарушенной симметрии в таких магнетиках, который определяется свойствами параметра порядка. В магнитных средах со спином $s = 1/2$ параметр порядка — векторная величина, которая меняет знак при операции обращения времени. Описание вырожденных состояний равновесия изучаемых магнетиков предполагает рассмотрение случаев векторного и тензорного параметров порядка с различными трансформационными свойствами по отношению к операции отражения времени. Для таких систем появляются параметры порядка, которые не изменяются в результате операции отражения времени и привносят новые физические свойства в изучаемые среды. Параметры порядка, или их определенные функции, являются дополнительными магнитными величинами, которые характеризуют термодинамику вырожденных состояний.

В работах [23–29] исследованы состояния равновесия магнетиков со спином $s = 1$ и рассмотрены модели гамильтонианов с обменной $SO(3)$ или $SU(3)$ симметрией. В таких магнетиках появляются новые состояния, к которым, в частности, относятся магнитные нематики. Неравновесные процессы в чистых квантовых состояниях магнетиков со спином $s = 1$ рассмотрены в [26,30,31]. В работах [32–35] построены динамические уравнения магнетиков соответствующие смешанным состояниям с $SU(3)$ симметрией. В состояниях со спонтанно нарушенной $SO(3)$ или $SU(3)$ симметрией динамика магнетиков со спином $s = 1$ рассмотрена в [36,37]. Анализ фазовых состояний в магнетиках со спином $s = 3/2$ проведен в работах [38–41]. Динамические свойства таких магнетиков с обменными гамильтонианами различной симметрии рассмотрены в [37,41].

Исследование высокоспиновых магнетиков показывает, что увеличение спинового момента приводит к новым фундаментальным отличиям таких магнетиков по сравнению с традиционными. К ним относятся:

— появление магнитных степеней свободы, инвариантных относительно обращения времени, характеризующих макроскопические состояния многочастичных систем;

— разнообразие свойств симметрии $SU(2s+1)$ нормальных состояний равновесия и свойств нарушения этой симметрии для вырожденных состояний равновесия;

— различие возможностей неравновесных процессов, связанное с подгруппами $SU(2s+1)$ симметрии;

— отличие наборов магнитных степеней свободы в чистых и смешанных квантовых состояниях, и тем самым, физики магнетиков со спином $s > 1/2$.

Цель настоящей работы показать, как основываясь на методах гамильтоновой механики, можно получить нелинейные уравнения динамики для широкого класса магнитных сред, частицы которых имеют спин s и обменный магнитный гамильтониан обладает $SU(2s+1)$ симметрией. Для простоты мы не учитываем влияние кристаллической решетки и рассматриваем магнетики как сплошную среду.

Структура статьи такова: в разд. 2 рассмотрены чистые и смешанные квантовые состояния магнетиков с произвольным спином s. Изучена динамика нормальных и вырожденных неравновесных состояний магнетиков в базисе Вейля. В разд. 3 исследованы свойства симметрии гамильтониана и сформулированы дифференциальные законы сохранения. Найдены плотности потоков динамических величин для нормальных и вырожденных состояний. Изучена динамика неравновесных процессов высокоспиновых магнетиков в базисе Рака. В разделах 4–6, используя унитарные группы симметрии, установлены нелинейные уравнения динамики магнетиков со спином s = 1/2; 1; 3/2 в различных фазовых состояниях. Представлен вид поляризационной матрицы плотности для магнетиков с вышеуказанными спинами и указана область изменения магнитных степеней свободы для чистых и смешанных квантовых состояний.

2. Магнитные степени свободы и квантовые состояния в базисе Вейля

2. 1. Чистые и смешанные состояния

Физические параметры, характеризующие магнитную систему, связывают с числом величин, которые описывают одночастичные спиновые состояния. Волновая функция чистых квантовых состояний частицы со спином s имеет вид $|\psi\rangle = \sum_{m=-s}^{s} A_m |s,m\rangle$. Здесь $|s,m\rangle$ — собственные функции операторов квадрата спина и проекции спина на ось квантования: $\hat{s}^2|s,m\rangle = s(s+1)|s,m\rangle$, $\hat{s}_z|s,m\rangle = m|s,m\rangle$. Суммирование идет по дискретной спиновой переменной, которая принимает $2s$+1 значение. Условие нормировки $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ и физическая эквивалентность состояний $|\psi\rangle$ и $|\psi\rangle_\theta \equiv e^{i\theta}|\psi\rangle$, где θ — произвольная фаза, ведут к числу действительных независимых параметров чистого состояния $N(s, pure) = 4s$.

Смешанные одночастичные состояния частицы со спином s описываются поляризационной матрицей плотности

$$\hat{\rho}(\mathbf{x},t) \equiv (2s+1)^{-1}\hat{I} + \hat{g}(\mathbf{x},t)\,, \qquad (2.1)$$

которая имеет размерность $(2s + 1)\times(2s+1)$. Для удобства и сокращения записи мы опускаем индексы у матричных элементов там, где это возможно. Здесь $\hat{I}$ — единичная матрица. Условие нормировки $\mathrm{tr}\hat{\rho} = \sum_{m=-s}^{s}\rho_{mm} = 1$ и эрмитовости этой матрицы приводят к числу действительных параметров $N(s, mixed) = 4s(s+1)$, которые в общем случае не являются независимыми. Локальные магнитные степени свободы $\hat{g}(\mathbf{x},t)$ в общем случае являются функциями координаты и времени. Условие нормировки требует бесследности этой матрицы $\mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x}) = 0$. Для упрощения записи мы опускаем далее временную зависимость в этих величинах. В чистых квантовых состояниях поляризационная матрица имеет вид $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ и удовлетворяет соотношению $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, что ведет к уменьшению числа независимых магнитных параметров. В смешанных квантовых состояниях справедливы неравенства $\mathrm{tr}\hat{\rho}^n < 1$, $n = 2, 3, ..., 2s+1$, которые задают область изменений магнитных степеней свободы. В изучении динамических процессов магнетиков со спином s мы полагаем, что такие сплошные среды находятся в смешанном квантовом состоянии и описываются определенным набором степеней свободы, скобки Пуассона которых образуют замкнутую алгебру.

2.2. Динамика нормальных многоподрешеточных и вырожденных одноподрешеточных состояний высокоспиновых магнетиков

Формулировка гамильтонова подхода для описания неравновесных процессов в магнетиках предполагает наличие набора динамических переменных, которые характеризуют макроскопическое состояние системы. Для этих величин необходимо знать скобки Пуассона. Мы исходим из выражения для кинематической части лагранжиана вида [37] $L(\mathbf{x}) = b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\dot{a}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{tr}\,\hat{b}(\mathbf{x})\dot{\hat{a}}(\mathbf{x})$. Здесь $b_{\alpha\beta}$ и $a_{\alpha\beta}$ — эрмитовы $(2s+1)\times(2s+1)$ матрицы $(\hat{a} = \hat{a}^+,\ \hat{b} = \hat{b}^+)$. Матрицы $\hat{a}(\mathbf{x})$ и $\hat{b}(\mathbf{x})$ представляют собой канонически сопряженные величины, для которых справедливы скобки Пуассона:

$$\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), b_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = 0, \qquad \{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\ a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = 0,$$

$$\{b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), a_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = -\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,. \qquad (2.2)$$

Свяжем эти матрицы с физическими величинами теории магнетизма. С этой целью введем в рассмотрение матрицу

$$\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv i[\hat{b}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x})]\,. \qquad (2.3)$$

Квадратные скобки здесь и далее обозначают коммутатор двух матриц. Этим матрицам мы придаем смысл плотности генераторов $SU(2s+1)$ симметрии. Используя вид (2.3) и формулы (2.2), найдем алгебру скобок Пуассона в базисе Вейля для плотности генераторов $SU(2s+1)$ симметрии:

$$i\{g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = [g_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - g_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta}]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \qquad (2.4)$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Инварианты Казимира этой алгебры имеют вид

$$g_n(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{tr}\hat{g}^n(\mathbf{x})\,, \qquad \{g_n(\mathbf{x}), g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}')\} = 0\,, \qquad (2.5)$$

где $n = 2, 3, \ldots 2s+1.$ Наличие $2s$ инвариантов Казимира уменьшает число независимых магнитных степеней свободы до $2s(2s + 1)$. Только для магнетиков со спином $s = 1/2$ количество независимых параметров, характеризующих чистые и смешанные состояния, совпадают. Для магнетиков со спином $s \geq 1$ число параметров, характеризующих смешанное состояние, превышает количество параметров, соответствующих чистым состояниям, и требует коррекции теории. Рассмотрение смешанных состояний также позволяет учесть процессы релаксации в квантовых системах. Для смешанных состояний запишем неравенства, которым удовлетворяют инварианты Казимира:

$$\frac{1}{2s+1} + g_2 \leq 1, \quad \frac{1}{(2s+1)^2} + \frac{3g_2}{2s+1} + g_3 \leq 1,$$

$$\frac{1}{(2s+1)^3} + \frac{6g_2}{(2s+1)^2} + \frac{3g_3}{2s+1} + g_4 \leq 1, \ldots$$

Эти соотношения определяют области допустимых значений матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ в смешанных квантовых состояниях. Ограничение четвертым порядком вызвано тем, что мы в этой статье не рассматриваем магнетики со спином $s \geq 2$. Приведем выражения инвариантов Казимира в случае чистых состояний:

$$g_2(s) = \frac{2s}{2s+1}, \quad g_3(s) = \frac{2s(2s-1)}{(2s+1)^2},$$

$$g_4(s) = \frac{2s(4s^2 - 2s + 1)}{(2s+1)^3}, \ldots.$$

В нормальных многоподрешеточных состояниях и вырожденных одноподрешеточных состояниях гамильтониан является функционалом матрицы: $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}))$, а плотность обменной энергии есть функция матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ и ее градиента $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x}))$. Из принципа стационарного действия следуют уравнения гамильтоновой динамики для величин $\hat{g}(\mathbf{x})$: $\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = \{\hat{g}(\mathbf{x}), H(\hat{g})\}$. Используя (2.4), получим уравнение динамики высокоспиновых магнетиков

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g})}{\delta g(\mathbf{x})}\right], \tag{2.6}$$

которое обобщает уравнение Ландау–Лифшица на случай магнитной среды со спином s. Влияние величины спина проявляется в ранге этой матрицы и числе ее независимых матричных элементов. Из уравнения динамики (2.6), учитывая (2.1), следует уравнение движения для одночастичной матрицы плотности,

$$\dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{\rho}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{\rho})}{\delta\rho(\mathbf{x})}\right]. \tag{2.7}$$

Если элементарный структурный элемент магнетика имеет спин $s = 1/2$, то последнее уравнение совпадает с уравнением динамики одночастичной ферми-системы, (см., например, [42]). В общем случае для полуцелых значений спина уравнение (2.7) описывает динамику нормальной ферми-жидкости в одночастичном приближении. В случае целого спина это уравнение определяет динамику магнетиков в приближении нормальной бозе-жидкости.

Выделим в матрице $\hat{g}$ симметричную и антисимметричную части: $\hat{g} \equiv \hat{g}^{(s)} + i\hat{g}^{(a)}$, где $g^{(s)}_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha})/2$ и $g^{(a)}_{\alpha\beta} = -i(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha})/2$ — действительные матрицы. Для них легко найти скобки Пуассона

$$\{g^{(a)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g^{(a)}_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = \delta(x - x')[\delta_{\alpha\rho}g^{(a)}_{\beta\gamma}(\mathbf{x}) + \delta_{\beta\gamma}g^{(a)}_{\alpha\rho}(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\gamma}g^{(a)}_{\rho\beta}(\mathbf{x}) + \delta_{\beta\rho}g^{(a)}_{\gamma\alpha}(\mathbf{x})]/2,$$

$$\{g^{(s)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g^{(s)}_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = -\delta(x - x')[\delta_{\alpha\rho}g^{(a)}_{\beta\gamma}(\mathbf{x}) + \delta_{\beta\gamma}g^{(a)}_{\alpha\rho}(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\gamma}g^{(a)}_{\beta\rho}(\mathbf{x}) + \delta_{\beta\rho}g^{(a)}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x})]/2,$$

$$\{g^{(a)}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g^{(s)}_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = \delta(x - x')[-\delta_{\alpha\rho}g^{(s)}_{\beta\gamma}(\mathbf{x}) + \delta_{\beta\gamma}g^{(s)}_{\alpha\rho}(\mathbf{x}) - \delta_{\alpha\gamma}g^{(s)}_{\beta\rho}(\mathbf{x}) + \delta_{\beta\rho}g^{(s)}_{\gamma\alpha}(\mathbf{x})]/2.$$

Алгебра скобок Пуассона антисимметричных матриц замкнутая. Если гамильтониан зависит только от этих матриц $H = H(g^{(a)})$, то приходим к уравнению динамики

$$\dot{\hat{g}}^{(a)}(\mathbf{x}) = \left[\hat{g}^{(a)}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g}^{(a)})}{\delta g^{(a)}(\mathbf{x})}\right]. \tag{2.8}$$

Это уравнение является содержательным для магнетиков со спином $s \geq 1$.

2.3. Динамика вырожденных состояний в многоподрешеточных высокоспиновых магнетиках

Рассмотрим другой важный класс магнитных состояний — это состояния со спонтанно нарушенной симметрией. Такие состояния равновесия обладают меньшей симметрией по сравнению с симметрией гамильтониана. В одноподрешеточных магнетиках роли параметра порядка и аддитивных интегралов движения играет одна и та же величина — матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$. Равновесные средние физических величин следует понимать в смысле квазисредних. Поэтому функциональная гипотеза $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}))$ остается справедливой и для вырожденных состояний. Уравнения динамики (2.6) описывают не только динамику парамагнетиков с $SU(2s+1)$ симметрией, но и динамические процессы в вырожденном одноподрешеточном магнетике с набором магнитных степеней свободы, задаваемых матрицей $\hat{g}(\mathbf{x})$. В случае двух или более подрешеток набор магнитных степеней свободы расширяется и состоит из эрмитовых матриц двух типов: $\hat{g}(\mathbf{x})$ и $\hat{a}(\mathbf{x})$. Последняя матрица имеет физический смысл параметра порядка вырожденных состояний высокоспиновых магнетиков. Формулы (2.2), (2.3) позволяют найти скобки Пуассона матриц $\hat{a}(\mathbf{x})$ и $\hat{g}(\mathbf{x})$

$$i\{a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = [a_{\gamma\beta}(\mathbf{x})\delta_{\alpha\rho} - a_{\alpha\rho}(\mathbf{x})\delta_{\gamma\beta}]\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{2.9}$$

Заметим, что в силу (2.9) $\{\mathrm{tr}\hat{a}(\mathbf{x}), g_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = 0$, поэтому, в виду линейности правой части (2.9), можно положить $\mathrm{tr}\hat{a} = 0$. Нетрудно показать, что расширенная алгебра скобок Пуассона (2.2), (2.4), (2.9) имеет инварианты Казимира:

$$a_n(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{tr}\hat{a}^n(\mathbf{x}), \qquad \{a_n(\mathbf{x}), \hat{g}(\mathbf{x}')\} = 0,$$
$$\{a_n(\mathbf{x}),\ \hat{a}(\mathbf{x}')\} = 0. \tag{2.10}$$

Гамильтониан состояний со спонтанно нарушенной симметрией является функционалом двух матриц $H = H(\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}))$. Для вырожденных состояний плотность энергии $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x}), \hat{a}(\mathbf{x}), \nabla\hat{a}(\mathbf{x}))$ — функция обеих матриц и их градиентов. Уравнения движения в этом случае высокоспиновых магнетиков в силу (2.2), (2.4), (2.9) приобретают вид

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{g}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right] + i\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta a(\mathbf{x})}\right],$$
$$\dot{\hat{a}}(\mathbf{x}) = i\left[\hat{a}(\mathbf{x}), \frac{\delta\hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g(\mathbf{x})}\right].$$

3. Неравновесные процессы в магнетиках с произвольным спином структурного элемента среды

3. 1. Законы сохранения. Симметрия и модели гамильтониана

Основные взаимодействия в магнитных системах носят обменный характер. Магнитный гамильтониан $H = \mathcal{H} + V \equiv \int d^3x e(\mathbf{x})$ включает в себя сильные обменные взаимодействия $\mathcal{H}$ и слабые, менее симметричные релятивистские взаимодействия V. Симметрия обменного гамильтониана и состояния равновесия среды позволяют установить набор термодинамических параметров, характеризующих макроскопические магнитные состояния. Слабые магнитные взаимодействия далее мы не учитываем, $H \approx \mathcal{H}$.

Рассмотрение динамических процессов в сплошных средах требует формулировки законов сохранения в дифференциальной форме. Магнетикам со спином $s = 1/2$ отвечает $SO(3)$ симметрия обменного гамильтониана $\{S_\alpha, H\} = 0$. Набор интегралов движения γ_a состоит из гамильтониана и спинового момента $\gamma_a = H$, $S_\alpha = \int d^3x\zeta_a(\mathbf{x})$. Здесь $\zeta_a(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x}), s_\alpha(\mathbf{x})$ — плотности аддитивных интегралов движения, (a = 0, α). Используя представление плотности потоков аддитивных интегралов движения работы [45], получим уравнения динамики, отражающие законы сохранения в дифференциальной форме: для плотности энергии

$$\dot{e}(\mathbf{x}) = -\nabla_k q_k(\mathbf{x}),$$
$$q_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\{e(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\}, \tag{3.1}$$

где $q_k(\mathbf{x})$ — плотность потока энергии. Аналогичное уравнение для плотности генератора $SO(3)$ симметрии имеет вид

$$j_{\alpha k}(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\{s_\alpha(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'), e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\}, \tag{3.2}$$

здесь $j_\alpha^k(\mathbf{x})$ — плотность потока спина. При получении последнего равенства учтена $SO(3)$ симметрия плотности обменной магнитной энергии

$$\{S_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0. \tag{3.3}$$

В случае произвольного спина s и $SU(2s+1)$ симметрии гамильтониана $\{G_{\alpha\beta}, H\} = 0$ набор интегралов движения состоит их гамильтониана и матрицы $G_{\alpha\beta}$ ранга $2s+1$: $\gamma_a = H$, $G_{\alpha\beta} = \int d^3x\zeta_a(\mathbf{x})$. Для вывода уравнений динамики плотностей аддитивных интегралов движения $\zeta_a(\mathbf{x}) = e(\mathbf{x})$, $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, $(a = 0, \alpha\beta)$, необходимо учесть симметрию плотности энергии обменного взаимодействия:

$$\{G_{\alpha\beta}, e(\mathbf{x})\} = 0. \tag{3.4}$$

Учитывая это соотношение и используя представление потоков работы [45], получим дифференциальный закон сохранения:

$$\dot{\hat{g}}(\mathbf{x}) = -\nabla_k \hat{j}_k(\mathbf{x}), \tag{3.5}$$
$$\hat{j}_k(\mathbf{x}) = \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\lambda\{\hat{g}(\mathbf{x}+\lambda\mathbf{x}'),\ e(\mathbf{x}-(1-\lambda)\mathbf{x}')\}.$$

Здесь $\hat{j}_k(\mathbf{x})$ — плотность потока, соответствующая сохраняющейся величине $\hat{G}$. Уравнение движения для плотности энергии в дифференциальной форме и выражение для плотности ее потока в (3.1) не изменяются. Помимо свойств симметрии (3.3) или (3.4), плотность обменной магнитной энергии трансляционно-инвариантна и инвариантна относительно поворотов в конфигурационном пространстве:

$$\{P_k, e(\mathbf{x})\} = \nabla_k e(\mathbf{x}),\ \{L_i, e(\mathbf{x})\} = \varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l e(\mathbf{x}) .$$

Импульс и момент импульса магнитной системы в терминах канонических величин определены равенствами: $P_k = \int d^3x \pi_k(\mathbf{x})$, $L_k = \varepsilon_{kij} \int d^3x x_i \pi_j(\mathbf{x})$. Здесь соотношением $\pi_k(\mathbf{x}) \equiv -\mathrm{tr}\hat{b}(\mathbf{x}) \nabla_k \hat{a}(\mathbf{x})$ введена плотность импульса магнонов.

«Нормальное» состояние изучаемой магнитной среды характеризуется плотностью обменной энергии, которая является функцией матрицы $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, ее градиента и плотности энтропии: $e(\mathbf{x}) = e(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla_k \hat{g}(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}))$. Основное термодинамическое соотношение имеет вид

$$de = \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial g} d\hat{g} + \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} d\nabla_k \hat{g} + \frac{\partial e}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Здесь σ — плотность энтропии. Из формул (3.1) (3.5) и (2.4), легко выразить плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах гамильтониана

$$\hat{j}_k = i\left[\hat{g}, \frac{\partial \hat{e}(\hat{g})}{\partial \nabla_k g}\right], q_k = \mathrm{tr}\frac{\delta \hat{H}(\hat{g})}{\delta g}\hat{j}_k . \qquad (3.6)$$

Для вырожденных состояний второе начало термодинамики имеет вид

$$de = \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial g} d\hat{g} + \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k g} d\nabla_k \hat{g} +$$

$$+ \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial a} d\hat{a} + \mathrm{tr}\frac{\partial \hat{e}}{\partial \nabla_k a} d\nabla_k \hat{a} + \frac{\partial e}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Аналогичным образом получим плотности потоков аддитивных интегралов движения в этом случае

$$\hat{j}_k = i\left[\hat{g}, \frac{\partial \hat{e}(\hat{g},\hat{a})}{\partial \nabla_k g}\right] + i\left[\hat{a}, \frac{\partial \hat{e}(\hat{g},\hat{a})}{\partial \nabla_k a}\right],$$

$$q_k = i\mathrm{tr}\frac{\delta \hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta a}\left[\hat{a}, \frac{\partial \hat{e}(\hat{g},\hat{a})}{\partial \nabla_k g}\right] + \mathrm{tr}\frac{\delta \hat{H}(\hat{g},\hat{a})}{\delta g}\hat{j}_k . \quad (3.7)$$

Динамические уравнения (3.1), (3.5), (3.6) описывают неравновесные процессы в нормальных состояниях высокоспиновых магнетиков с $SU(2s + 1)$ симметрией гамильтониана. Аналогичная динамика вырожденных неравновесных состояний определяется уравнениями (3.1), (3.5), (3.7).

Рассмотрим нормальные неравновесные состояния с $SU(2s + 1)$ симметрией. Зависимость обменного гамильтонана от эрмитовой матрицы моделируем в виде

$$e = e_0 + e_n,\quad e_0 = J\mathrm{tr}\hat{g}^2/2 = Jg_2/2,\quad e_n = \bar{J}\mathrm{tr}(\nabla\hat{g})^2/2 > 0, \qquad (3.8)$$

здесь e_0 — однородная часть обменной энергии, которую мы выбираем в виде определенной функции инварианта Казимира g_2, J — постоянная однородного обмена. Для простоты мы не рассматриваем влияние других инвариантов $g_3, .., g_{2s+1}$. Слагаемое e_n представляет собой вклад неоднородной магнитной энергии и оно существенно в описании эволюции магнитной среды, $\bar{J}$ — постоянная неоднородного обмена. Обменное взаимодействие, совместно с релятивистскими взаимодействиями, определяет равновесные значения матрицы $\hat{g}$ из условия $\delta\hat{H}/\delta g = 0$. Принимая во внимание (3.6), (3.8), получим уравнение

$$\dot{\hat{g}} = -i\bar{J}[\hat{g}, \Delta\hat{g}] .$$

Это уравнение является $SU(2s + 1)$ симметричным обобщением нелинейного уравнения (4.5), справедливого для магнетиков со спином $s = 1/2$.

Рассмотрим вырожденные состояния. В этом случае плотность энергии мы также выбираем в виде функции инвариантов Казимира (2.5) алгебры (2.4), соответствующей нормальным состояниям, и инвариантов Казимира (2.11) расширенной алгебры (2.4), (2.10). Для простоты используются только инварианты Казимира, которые квадратичны по матрицам $\hat{g}, \hat{a}$:

$$e_0 = J\mathrm{tr}\hat{g}^2/2 + A\mathrm{tr}\hat{a}^2/2 = Jg_2/2 + Aa_2/2 ,$$

$$e_n = \bar{J}\mathrm{tr}(\nabla\hat{g})^2/2 + B\mathrm{tr}(\nabla\hat{a})^2/2 . \qquad (3.9)$$

Нелинейные уравнения динамики вырожденных состояний, учитывая (3.9), принимают вид

$$\dot{\hat{g}} = -i\bar{J}[\hat{g}, \Delta\hat{g}] - iB[\hat{a}, \Delta\hat{a}],\quad \dot{\hat{a}} = i[\hat{a}, J\hat{g} - \bar{J}\Delta\hat{g}].$$

Если значение спина достаточно велико и $SU(2s+1)$ симметрия гамильтониана высокая, то полученные матричные уравнения в общем случае сложны для анализа. Ниже мы подробнее рассмотрим значения спина s = 1/2; 1; 3/2, изучим подалгебры скобок Пуассона и получим нелинейные уравнения динамики высокоспиновых магнетиков в этих более простых случаях.

3.2. Динамика квантовых состояний высокоспиновых магнетиков в базисе Рака

Анализ динамических процессов изучаемых высокоспиновых систем можно также осуществить, используя другой базис алгебры Ли группы $SU(2s + 1)$. С этой целью рассмотрим разложение поляризационной матрицы плотности (2.1) по поляризационным операторам [43], или другим матричным функциям, которые имеют смысл магнитных степеней свободы. Разложение бесследной эрмитовой матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ на неприводимые тензорные операторы имеет вид $\hat{g}(\mathbf{x}) \equiv g_a(\mathbf{x})\hat{\lambda}_a/2$, здесь индекс a пробегает значения a = 1, 2, …, $(2s+1)^2 - 1$. Величины $g_a(\mathbf{x})$ носят название мультипольных тензорных параметров. Эту же величину также называют вектором Блоха или вектором когерентности. Эрмитовы и бесследные матрицы $\hat{\lambda}_a$ являются генераторами группы $SU(2s+1)$. Они обладают свойствами

$$\mathrm{tr}\hat{\lambda}_a\hat{\lambda}_b = 2\delta_{ab}, \quad \hat{\lambda}_a\hat{\lambda}_b = \frac{2\delta_{ab}}{2s+1}\hat{I} + z_{abc}\hat{\lambda}_c,$$

$$z_{abc} \equiv d_{abc} + if_{abc}.$$

Здесь d_{abc} является полностью симметричным тензором при перестановке любых двух индексов. Этот тензор можно выразить в терминах неприводимых матриц: $\mathrm{tr}\{\hat{\lambda}_a,\hat{\lambda}_b\}\hat{\lambda}_c/4 = d_{abc}$. Операция $\{..,..\}$ обозначает антикоммутатор двух матриц. Величина f_{adc} представляет собой полностью антисимметричный тензор по отношению к перестановке любых двух индексов, $f_{abc} = -f_{bac}$ и может быть представлена в виде $-i\mathrm{tr}[\hat{\lambda}_a,\hat{\lambda}_b]\hat{\lambda}_c/4 = f_{abc}$. Из (2.6), учитывая соотношение

$$g_a(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{\lambda}_a, \tag{3.10}$$

получим уравнение динамики для вектора Блоха $g_a(\mathbf{x})$:

$$\dot{g}_a(\mathbf{x}) = 2f_{abc}\frac{\delta H(g)}{\delta g_b(\mathbf{x})}g_c(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Этот вид уравнения является обобщением уравнения Ландау–Лифшица на случай произвольного спина в базисе Рака. Динамическими переменными являются компоненты вектора Блоха, сопряженные к неприводимым тензорным операторам. В общем случае эти величины не являются независимыми. Используя определение (2.5) и явный вид инвариантов Казимира в чистом состоянии, приведенный в разд. 2.2, получим, учитывая (3.10), инвариантные полиномиальные конструкции, построенные в терминах вектора Блоха:

$$g_a^2 = \frac{4s}{2s+1}, \quad g_a g_b g_c d_{abc} = \frac{8s(2s-1)}{(2s+1)^2},$$

$$g_a g_b g_c g_d d_{abe} d_{cde} = \frac{16s(2s-1)^2}{(2s+1)^3}, \quad \ldots$$

Приведенных соотношений связи достаточно для рассмотрения магнетиков со спином $s < 2$.

Уравнение (3.11) также сразу получается в гамильтоновом формализме. Для этого достаточно использовать соотношение (3.10) и скобку Пуассона (2.4). Для мультипольных тензорных параметров получим скобку Пуассона:

$$\{g_a(\mathbf{x}), g_b(\mathbf{x}')\} = 2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')f_{abc}g_c(\mathbf{x}). \tag{3.12}$$

Свойство $SU(n)$ симметрии записывается в виде

$$\{G_a, e(\mathbf{x})\} = 0 = f_{abc}\left(\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial g_b(\mathbf{x})}g_c(\mathbf{x}) + g_c(\mathbf{x})\nabla_k\frac{\partial e(\mathbf{x})}{\partial\nabla_k g_b(\mathbf{x})}\right).$$

С учетом этой симметрии получим уравнение динамики в дифференциальной форме:

$$\dot{g}_a(\mathbf{x}) = -\nabla_k g_{ak}(\mathbf{x}).$$

Здесь выражение для плотности потока среднего значения неприводимого тензорного оператора имеет вид

$$g_{ak} = 2f_{abc}\frac{\partial e(g)}{\delta\nabla_k g_b}g_c.$$

Используя модельный вид плотности обменной неоднородной энергии $e = J(\nabla_k g_a)^2/2$, получим уравнение

$$\dot{g}_a = -2f_{abc}g_c\Delta g_b. \tag{3.13}$$

Линеаризуя это уравнение около состояния с равновесным значением магнитных степеней свободы g_a^0 и переходя к фурье-представлению, получим дисперсионное уравнение $\det D_{ab}(k,\omega) = 0$, где $D_{ab}(k,\omega) = i\omega\delta_{ab} + 2Jk^2 f_{abc}g_c^0$. Поиск решений линеаризованной версии уравнения для $4s(s+1)$ компонентного вектора (3.10) иногда удобнее по сравнению с использованием матричного уравнения (2.7). В отсутствие пространственных неоднородностей уравнение (3.11) описывает общее движение в пространстве тензорных параметров, и является унитарным «вращением» блоховского вектора [44]. Приведенные формы записи уравнений динамики (2.6) и (3.11) отвечают двум различным базисам алгебры Ли группы $SU(2s+1)$. Матричная запись уравнения (2.6) получена в базисе Вейля, а векторное уравнение (3.11) использует базис Рака [44]. Соотношение (3.10) устанавливает взаимосвязь этих базисов. В работе [35] использован базис Рака при изучении динамики спин $s = 1$ магнетиков.

Уравнениям, описывающим динамику вырожденных состояний (см. разд. 2.3), также можно придать вид аналогичный (3.11). Для величин $g_a(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{\lambda}_a$ и $a_a(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{a}(\mathbf{x})\hat{\lambda}_a$ получим уравнения движения:

$$\dot{g}_d(\mathbf{x}) = f_{dbc}\left(\frac{\delta H(\mathbf{g},\mathbf{a})}{\delta g_b(\mathbf{x})}g_c(\mathbf{x}) + \frac{\delta H(\mathbf{g},\mathbf{a})}{\delta a_b(\mathbf{x})}a_c(\mathbf{x})\right),$$

$$\dot{a}_d(\mathbf{x}) = f_{dbc}\frac{\delta H(\mathbf{g},\mathbf{a})}{\delta g_b(\mathbf{x})}a_c(\mathbf{x}).$$

Дальнейшее изложение статьи использует оба представления алгебры Ли группы $SU(2s+1)$ в формулировке динамических уравнений.

4. Магнетики со спином $s = 1/2$

4.1. Поляризационная матрица и уравнение Ландау–Лифшица

Для магнетиков со спином $s = 1/2$ матрица $\hat{g}(\mathbf{x})$ имеет размерность 2×2. Представим ее в виде разложения по матрицам Паули $\hat{\sigma}_\alpha$

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = s_\alpha(\mathbf{x})\hat{\sigma}_\alpha \equiv \begin{pmatrix} s_z(\mathbf{x}) & s_x(\mathbf{x}) - is_y(\mathbf{x}) \\ s_x(\mathbf{x}) + is_y(\mathbf{x}) & -s_z(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $s_\alpha(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha$ — среднее значение спинового момента, оператор спина определяется соотношением $\hat{s}_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha/2$. Поляризационная матрица плотности

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) \equiv \hat{I}/2 + \hat{g}(\mathbf{x})$$

описывает квантовые состояния магнетиков в одночастичном приближении, $\hat{I}$ — единичная 2×2 матрица. Условие $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2 \le 1$ задает область изменения вектора спина. В чистом состоянии $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2 = \mathrm{tr}\hat{\rho} = 1$, откуда $s = 1/2$, направление вектора спина произвольное. Для смешанных состояний $\mathrm{tr}\hat{\rho}^2 < \mathrm{tr}\hat{\rho}$, поэтому $0 \le s < 1/2$. Для магнетиков со спином $s = 1/2$ спиновый вектор полностью определяет магнитные степени свободы среды. В силу (2.4), (4.1) найдем скобку Пуассона для вектора спина

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), s_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x}). \tag{4.2}$$

В одноподрешеточном случае гамильтониан является функцией спинового вектора $H = H(\mathbf{s}(\mathbf{x}))$. Согласно (4.2) приходим к уравнению динамики Ландау и Лифшица [1]:

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta H(\mathbf{s})}{\delta s_\beta}s_\gamma\,.$$

Если справедливо свойство $SO(3)$ симметрии плотности обменной энергии (3.3), то из (3.2) следует уравнение

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}\,, \qquad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma\,. \tag{4.3}$$

Дальнейшая конкретизация динамического уравнения связана с выбором модели гамильтониана как функционала вектора спина. Для магнетиков со спином $s = 1/2$ обычно используется гамильтониан Гейзенберга

$$H = \int d^3x e(\mathbf{x}) = -\int d^3x d^3x' J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|) s_\alpha(\mathbf{x}) s_\alpha(\mathbf{x}')\,,$$

где $J(|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)$ — обменный интеграл магнитного взаимодействия. С точностью до членов квадратичных по пространственным градиентам плотности спина приведем выражение плотности магнитной энергии, соответствующее этому гамильтониану

$$e(\mathbf{x}) = -Js_\alpha(\mathbf{x})s_\alpha(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\bar{J}\nabla_k s_\alpha(\mathbf{x})\nabla_k s_\alpha(\mathbf{x})\,, \tag{4.4}$$

где постоянные величины $J \equiv \int d^3x J(|\mathbf{x}|)$, $\bar{J} \equiv \int d^3x x^2 J(|\mathbf{x}|)/3 > 0$ — эффективные обменные интегралы взаимодействия. Первое и второе слагаемые в (4.4) учитывают соответственно однородное и неоднородное обменные взаимодействия. Функциональный вид однородной части энергии определяется инвариантом Казимира s_α^2 алгебры (4.2). Уравнение (4.3) с учетом (4.4) преобразуется к виду

$$\dot{s}_\alpha = -\bar{J}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta s_\beta s_\gamma\,. \tag{4.5}$$

Анализ нелинейных решений этого уравнения осуществлялся для одномерного случая, в частности, в работах [46–50]. Для пространственных размерностей d = 2, 3 решения этих уравнений и их анализ проводили в работах [50–55].

4.2. Вырожденные состояния

Антиферромагнетик. Рассмотрим магнетики, в которых спонтанно нарушена $SO(3)$ симметрия. Такое нарушение симметрии может быть одноосным и двухосным. Одноосное спонтанное нарушение симметрии реализуется в антиферромагнетиках и магнитной A-фазе сверхтекучего ^{3}He [56,57]. Эти состояния дополнительно характеризуются вектором спиновой анизотропии (вектор антиферромагнетизма) $n_\alpha(\mathbf{x})$, который можно выразить в терминах матрицы параметра порядка $\hat{a}(\mathbf{x})$. Алгебра скобок Пуассона состоит из формулы (4.2) и соотношений

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x})\,, \{n_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\} = 0\,. \tag{4.6}$$

Она содержит два инварианта Казимира — **sn** и n^2. Обычно полагают $n^2 = 1$. Плотность энергии $e = e(\mathbf{s}, \nabla\mathbf{s}, \mathbf{n}, \nabla\mathbf{n})$ является функционалом плотности спина и единичного вектора спиновой анизотропии. Согласно формулам (4.2), (4.6), приходим к уравнениям динамики

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta n_\beta}n_\gamma\right), \qquad \dot{n}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\beta}n_\gamma\,.$$

Первое из этих уравнений, учитывая свойство $SO(3)$ симметрии (3.2), приобретет вид

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}\,, \quad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma + \frac{\partial e}{\partial\nabla_k n_\beta}n_\gamma\right).$$

Микроскопическая теория, которая дает вид обменной магнитной энергии антиферромагнетика даже для систем со спином s = 1/2, к настоящему времени отсутствует. Поэтому здесь и далее конкретизацию нелинейных уравнений мы осуществляем, используя модельные представления о виде обменной магнитной энергии. Мы представляем эту величину в виде суммы двух слагаемых: $e = e_0 + e_n$. Первое из них есть плотность однородной части обменной энергии. Эта величина представляет собой функцию инвариантов Казимира $(\mathbf{sn})$, s^2, и обладает $SO(3)$ симметрией: $e_0 = Js^2/2 + A(\mathbf{sn})^2/2$, J, A — постоянные однородного обмена.

Неоднородную обменную энергию выберем в виде $e_n = B\mathrm{tr}(\nabla_k \mathbf{n})^2/2$, здесь $B>0$ — постоянная неоднородного обмена. В результате нелинейные уравнения динамики приобретут вид

$$\dot{s}_\alpha = -B\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta n_\beta n_\gamma\,, \quad \dot{n}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma (Js_\beta - B\Delta n_\beta)\,.$$

Магнетик с полным нарушением симметрии. Рассмотрим двухосное нарушение симметрии, которое реализуется в спиновых стеклах и сверхтекучей B-фазе ^{3}He [57]. В магнитной системе имеет место полное спонтанное нарушение $SO(3)$ симметрии состояния равновесия. Набор магнитных степеней свободы состоит из плотности спина s и ортогональной матрицы поворота $\hat{R}$. Алгебра скобок Пуассона включает соотношение (4.2) и равенства [58]

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), R_{\beta\lambda}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}R_{\gamma\lambda}(\mathbf{x})\,,$$

$$\{R_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}), R_{\beta\rho}(\mathbf{x}')\} = 0\,. \qquad (4.7)$$

Формулы (4.2), (4.7) приводят к уравнениям динамики

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta R_{\lambda\beta}}R_{\lambda\gamma}\right), \quad \dot{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\rho}\varepsilon_{\rho\beta\gamma}\frac{\delta H}{\delta s_\gamma}\,.$$

Свойство $SO(3)$ симметрии плотности энергии (3.3) позволяет представить уравнение для плотности спина в виде

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}\,, \quad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial \nabla_k s_\beta}s_\gamma + \frac{\partial e}{\partial \nabla_k R_{\lambda\beta}}R_{\lambda\gamma}\right).$$

Плотность обменной энергии $e = e_0 + e_n$ выберем в следующем виде: $e_0 = Js^2/2 + A\mathrm{tr}\hat{R}^2/2$, $e_n = B\mathrm{tr}(\nabla\hat{R})^2/2$. Уравнения динамики приобретут вид

$$\dot{R}_{\alpha\beta} = -JR_{\alpha\rho}\varepsilon_{\rho\beta\gamma}s_\gamma\,, \qquad \dot{s}_\alpha = -B\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta R_{\lambda\beta}R_{\lambda\gamma}\,.$$

Эти уравнения в несколько других терминах впервые получены в работе [59]. В следующем году были открыты сверхтекучие фазы ^{3}He [57,60], для которых спустя пять лет стало ясно, что случай, рассмотренный в [59], отвечает динамике магнитной B-фазы.

5. Магнетики со спином s = 1

5.1. Поляризационная матрица плотности

Рассмотрим магнитную среду, частицы которой обладают спином s = 1. Состояние такой магнитной среды можно задать с помощью поляризационной матрицы плотности $\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{I}/3 + \hat{g}(\mathbf{x})$ размерности 3×3, которая содержит восемь действительных величин. Разложим поляризационную матрицу плотности по полному набору неприводимых (3×3) матриц

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{I}/3 + s_\alpha(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha/2 + q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{q}_{\beta\alpha}\,. \qquad (5.1)$$

Здесь матричные элементы операторов спина $\hat{s}_\alpha$ и квадрупольного тензора $\hat{q}_{\beta\alpha}$ согласно [43] имеют вид

$$(\hat{s}_\alpha)_{\mu\nu} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\mu\nu}\,,$$

$$(\hat{q}_{\beta\alpha})_{\mu\nu} \equiv (\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} + \delta_{\beta\nu}\delta_{\alpha\mu} - 2\delta_{\beta\alpha}\delta_{\mu\nu}/3)/2$$

и удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\mathrm{tr}\hat{s}_\alpha = 0\,, \ \mathrm{tr}\hat{q}_{\alpha\beta} = 0\,, \ \mathrm{tr}\hat{s}_\gamma\hat{q}_{\alpha\beta} = 0\,, \ \mathrm{tr}\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta = 2\delta_{\alpha\beta}\,,$$

$$\mathrm{tr}\hat{q}_{\gamma\rho}\hat{q}_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}/3)/2\,,$$

$$\mathrm{tr}\,\hat{s}_\alpha\hat{s}_\beta\hat{s}_\gamma\hat{s}_\rho = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\gamma\beta}\,. \qquad (5.2)$$

Учитывая эти равенства, получим связь значений плотности спина $s_\alpha(\mathbf{x})$ и квадрупольной матрицы $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ с поляризационной матрицей: $\mathrm{tr}\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{s}_\alpha = s_\alpha(\mathbf{x})$, $\mathrm{tr}\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{q}_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$. Поэтому

$$\mathrm{tr}\hat{\rho}(\mathbf{x})\hat{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_\gamma(\mathbf{x})/2\,, \qquad (5.3)$$

где $\hat{g}_{\alpha\beta} \equiv \hat{q}_{\alpha\beta} - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{s}/2$. Таким образом, магнитными степенями свободы среды, частицы которых обладают спином s = 1, являются: спиновый вектор — $s_\alpha(\mathbf{x})$ и квадрупольная матрица — $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$. Они связанны с матрицей $\hat{g}(\mathbf{x})$ соотношениями

$$s_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}g_{\beta\gamma}\,, q_{ik} = (g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha})/2\,. \qquad (5.4)$$

Квадрупольная матрица действительная, симметричная и бесследная $q_{\alpha\beta} = q_{\beta\alpha}$, $q_{\alpha\alpha} = 0$. Пять ее независимых компонент параметризуем соотношением

$$q_{\alpha\beta} = q_1(e_\alpha e_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3) + q_2(f_\alpha f_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)\,.$$

Здесь q_1, q_2 — скалярные параметры этой матрицы. Векторы $d_\alpha, e_\alpha, f_\alpha = (\mathbf{d}\times\mathbf{e})_\alpha$ образуют ортонормированный репер и имеют физический смысл осей магнитной анизотропии квадрупольного упорядочения. Магнитные состояния, в которых $q_1 \neq 0$, $q_2 = 0$, или $q_2 \neq 0$, $q_1 = 0$ являются одноосными. Случай $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$ отвечает двухосному квадрупольному магнитному упорядочению.

Рассмотрим квадрупольную матрицу и спин в чистых и смешанных квантовых состояниях. В чистом состоянии $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. В этом случае, согласно (2.1) и (2.5), два инварианта Казимира алгебры скобок Пуассона (2.4) для спин s = 1 магнетиков приобретают численные значения: $g_2 = 2/3$ и $g_3 = 2/9$. Используя свойства ортогональности и полноты (5.1)–(5.3), получим уравнения для средних значений магнитных параметров

$$\frac{1}{2}s^2 + \mathrm{tr}\hat{q}^2 = \frac{2}{3}, \qquad s_\alpha = -3s_\beta q_{\alpha\beta},$$

$$-\frac{1}{4}s_\alpha s_\beta + (\hat{q}^2)_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\left(-\frac{1}{4}s^2 + \mathrm{tr}\hat{q}^2\right) = \frac{1}{3}q_{\alpha\beta}\,. \qquad (5.5)$$

С помощью первых двух соотношений (5.5) исключим спиновый вектор и получим уравнение для квадрупольной матрицы в чистом состоянии

$$2-9\mathrm{tr}\hat{q}^2+18\mathrm{tr}\hat{q}^3=0\,. \tag{5.6}$$

Для таких состояний скалярный параметр квадрупольной матрицы не обращается в нуль. Рассмотрим в начале случай одноосной квадрупольной матрицы. Уравнение (5.6) имеет два решения, характеризующих чистое квантовое состояние, $q=1$, $q=-1/2$. Поэтому

$$1.\ s_\alpha=0\,, \qquad q_{\alpha\beta}=e_\alpha e_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3;$$

$$2.\ s_\alpha=\pm e_\alpha\,, \qquad q_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}(e_\alpha e_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3)\,.$$

Первое из них описывает магнитное состояние, в котором спиновый момент отсутствует и имеется квадрупольный момент, отвечающий стержнеподобному квадрупольному упорядочению [61]. Второе решение является ферроквадрупольным: для таких чистых состояний спин и квадрупольная матрица не обращаются в нуль. При этом ось анизотропии квадрупольной матрицы коллинеарна вектору спинового момента. Отрицательное значение скалярного параметра квадрупольной матрицы отвечает дископодобному квадрупольному упорядочению [61]. Имея в виду тождество $d_\alpha d_\beta+e_\alpha e_\beta+f_\alpha f_\beta=\delta_{\alpha\beta}$, квадрупольную матрицу, соответствующую второму решению, можно тождественно переписать в виде $q_{\alpha\beta}=(d_\alpha d_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3)/2+(f_\alpha f_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3)/2$ и интерпретировать магнитное упорядочение как двухосное с одинаковыми скалярными параметрами.

Нетрудно видеть, что система уравнений (5.5) имеет двухосные решения, которые можно представить в виде

$$s_\alpha=2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\beta v_\gamma\,, \quad q_{\alpha\beta}=u_\alpha u_\beta+v_\alpha v_\beta-\delta_{\alpha\beta}/3\,.$$

Здесь действительные векторы **u**, **v** удовлетворяют соотношению $u^2+v^2=1$. Комплексные коэффициенты разложения A_α волновой функции (см. разд. 2.1) для спина s = 1 в декартовом базисе связаны с векторами u_α, v_α равенством $A_\alpha=u_\alpha+iv_\alpha\equiv\eta_\alpha\exp i\varphi_\alpha$. Фазовое преобразование $\varphi_\alpha\to\varphi'_\alpha\equiv\varphi_\alpha+\theta$ приводит к трансформационному соотношению $A_\alpha\to A'_\alpha=u'_\alpha+iv'_\alpha\equiv\equiv\eta_\alpha\exp i\varphi'_\alpha$ и оставляет без изменения вектор спина и квадрупольную матрицу:

$$s_\alpha(\eta,\varphi)\to s'_\alpha\equiv s_\alpha(\eta,\varphi')=s_\alpha(\eta,\varphi)\,,$$

$$q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi)\to q'_{\alpha\beta}\equiv q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi')=q_{\alpha\beta}(\eta,\varphi)\,.$$

Поэтому магнитные величины зависят от четырех независимых параметров. Воспользуемся этой инвариантностью и выберем коэффициенты разложения A'_α волновой функции таким образом, чтобы выполнялось соотношение $u'_\alpha v'_\alpha=0$. Из этого условия получим уравнение для угла θ: $\mathbf{uv}\,\mathrm{tg}^2\theta+(v^2-u^2)\mathrm{tg}\,\theta-\mathbf{uv}=0$, решением которого является равенство

$$\mathrm{tg}\theta=(u^2-v^2\pm\sqrt{(u^2-v^2)^2+4(\mathbf{uv})^2})/2(\mathbf{uv}).$$

Отсюда следует связь средних значений плотности спина и квадрупольной матрицы с коэффициентами $A'_\alpha=u'_\alpha+iv'_\alpha$:

$$u'^2=q_1\,, \quad v'^2=q_2\,, \quad u'_\alpha/u'=e_\alpha\,,$$

$$v'_\alpha/v'=f_\alpha\,, \qquad s'_\alpha=2d_\alpha u'v'\,.$$

В итоге поляризационная матрица плотности для спин s = 1 магнетиков имеет вид

$$\hat\rho=\hat I/3+\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}u_\beta v_\gamma\hat s_\alpha+(u_\alpha u_\beta+v_\alpha v_\beta)\hat q_{\beta\alpha}\,.$$

В смешанных квантовых состояниях справедливы неравенства $\mathrm{tr}\hat\rho^2<1$, $\mathrm{tr}\hat\rho^3<1$, которые задают область изменений магнитных степеней свободы: $s^2/2+\mathrm{tr}\hat q^2<2/3$ и $s^2/2+\mathrm{tr}\hat q^2+\mathrm{tr}\hat q^3-3s_\alpha q_{\alpha\beta}s_\beta<8/9$. В неполяризованном состоянии $s_\alpha=0$, $q_{\alpha\beta}=0$. При изучении особенностей динамики спин s = 1 магнетиков мы полагаем, что такие сплошные среды находятся в смешанном квантовом состоянии и описываются определенным набором степеней свободы. Этот набор параметров образует замкнутую алгебру скобок Пуассона. Только для магнетиков со спином s = 1/2 количество независимых параметров, характеризующих чистые и смешанные состояния, совпадает. Для магнетиков со спином $s\ge1$ число параметров, характеризующих смешанное состояние, превышает количество параметров, соответствующих чистым состояниям, и требует коррекции теории. Кроме того, рассмотрение смешанных состояний позволяет, в частности, учесть процессы релаксации в квантовых системах.

Легко видеть, что для векторов $s_\alpha(\mathbf{x})$ справедливы, учитывая (2.4), (5.4), скобки Пуассона (4.2). Для квадрупольной матрицы в силу (2.4), (5.4) найдем

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}),q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\rho\gamma}(\mathbf{x})+\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\rho\beta}(\mathbf{x})\big)\,,$$

$$\{q_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),q_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')s_\gamma(\mathbf{x})\times$$

$$\times(\varepsilon_{\gamma\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}+\varepsilon_{\gamma\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}+\varepsilon_{\gamma\beta\nu}\delta_{\alpha\mu}+\varepsilon_{\gamma\alpha\mu}\delta_{\beta\nu})/4\,. \tag{5.7}$$

Эрмитову матрицу $\hat a(\mathbf{x})$ свяжем с физическими величинами соотношением

$$a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\equiv m_{\alpha\beta}(\mathbf{x})-i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma(\mathbf{x})/2\,. \tag{5.8}$$

Вектор **n** имеет физический смысл антиферромагнитного параметра порядка. Тензор $\hat m$ симметричен и бесследен. Он имеет смысл нематического параметра порядка. При преобразовании обращения времени T спин и вектор антиферромагнетизма меняют знак: $T\mathbf{s} = -\mathbf{s}$, $T\mathbf{n} = -\mathbf{n}$, а квадрупольная матрица, нематический параметр порядка и плотность энергии не изменяются: $T\hat{q} = \hat{q}$, $T\hat{m} = \hat{m}$, $Te = e$. Для введенных величин получим, согласно (2.10), (5.8), нетривиальные скобки Пуассона

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), n_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma(\mathbf{x})\,, \{n_\alpha(\mathbf{x}),\, q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\varepsilon_{\alpha\beta\rho} m_{\rho\gamma}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} m_{\rho\beta}(\mathbf{x})\big)\,,$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}),\, m_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho} m_{\beta\rho}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha\beta\rho} m_{\gamma\rho}(\mathbf{x}))\,,$$

$$\{m_{\alpha\beta}(\mathbf{x}),\, q_{\gamma\rho}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, n_\gamma(\mathbf{x})(\varepsilon_{\alpha\nu\gamma}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\beta\mu\gamma}\delta_{\alpha\nu} + \varepsilon_{\beta\nu\gamma}\delta_{\alpha\mu} + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma}\delta_{\beta\nu})/4\,. \tag{5.9}$$

Формулы (5.7)–(5.9) позволяют выявить подалгебры скобок Пуассона и установить динамику магнетиков со спином s = 1 для всех типов магнитного упорядочения. Минимальная подалгебра скобок Пуассона содержит только спиновый вектор. Этот случай эквивалентен рассмотренному ранее случаю спин s = 1/2 пара- и ферромагнетиков. Это же уравнение для магнетиков со спином $s = 1$ получается из уравнения (2.8). Подалгебра скобок Пуассона векторов спина и антиферромагнетизма приводит к уравнениям динамики антиферромагнетика. Состояние, для которого $s_\alpha = 0$ и $n_\alpha \neq 0$, — антиферромагнитное. Если $s_\alpha \neq 0$ и $n_\alpha \neq 0$, то состояние ферримагнитное. Состояние $s_\alpha = 0$ и $m_{\alpha\beta} \neq 0$ представляет собой спиновый нематик. Случае $s_\alpha \neq 0$ и $m_{\alpha\beta} \neq 0$, по аналогии с предыдущими наименованиями, можно назвать нематическим ферримагнетиком. Самый общий случай $(s_\alpha \neq 0,\, n_\alpha \neq 0,\, q_{\alpha\beta} \neq 0,\, m_{\alpha\beta} \neq 0)$ описывает состояние ферроквадрупольного антиферромагнитного нематика. Остановимся на новых магнитных состояниях, которые отсутствуют в магнетиках со спином s = 1/2. К ним относятся случаи ферроквадрупольного магнетика и спинового нематика.

5.2. Динамика ферроквадрупольного магнетика

Скобки Пуассона (4.2), (5.7) позволяют описать динамику неравновесных состояний магнетиков с $SU(3)$ симметрией гамильтониана. Состояние изучаемой магнитной среды характеризуется плотностью обменной энергии, которая является функцией матрицы $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и ее градиента $e(\mathbf{x}) = e\big(\hat{g}(\mathbf{x}), \nabla\hat{g}(\mathbf{x})\big)$. Для матрицы $g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ справедливо уравнение (2.6), ранг которой равен трем. В терминах действительных матриц $q_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma/2$ такое уравнение можно переписать в виде двух матричных уравнений:

$$\dot{\hat{q}} = \left[\hat{\varepsilon}, \frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta q}\right] - \left[\hat{q}, \frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta\varepsilon}\right],$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = \left[\frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta q},\, \hat{q}\right] + \left[\frac{\delta\hat{H}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\delta\varepsilon},\, \hat{\varepsilon}\right]. \tag{5.10}$$

Здесь $\left(\dfrac{\delta\hat{H}}{\delta\varepsilon}\right)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\dfrac{\delta H}{\delta s_\gamma}$. Используя свойство $SU(3)$ симметрии гамильтониана (3.4), получим эти уравнения в виде дифференциальных законов сохранения:

$$\dot{\hat{q}} = -\nabla_k\left[\hat{\varepsilon}, \frac{\partial\hat{e}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\partial\nabla_k q}\right] - \nabla_k\left[\frac{\partial\hat{e}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\partial\nabla_k\varepsilon},\, \hat{q}\right],$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = -\nabla_k\left[\frac{\partial\hat{e}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\partial\nabla_k q},\, \hat{q}\right] - \nabla_k\left[\frac{\partial\hat{e}(\hat{q},\hat{\varepsilon})}{\partial\nabla_k\varepsilon},\, \hat{\varepsilon}\right].$$

Аналитический вид $SU(3)$ симметричного обменного гамильтониана можно построить по аналогии с гамильтонианом Гейзенберга. Для простоты рассмотрим далее модельное выражение обменной энергии

$$H = -2\int d^3x d^3x' J(|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|)\mathrm{tr}\,\hat{g}\,(\mathbf{x})\hat{g}\,(\mathbf{x}')\,.$$

Здесь $J(|\,\mathbf{x}-\mathbf{x}'\,|)$ — обменный интеграл магнитного взаимодействия. Плотность энергии, соответствующая этому гамильтониану, имеет вид

$$e(\mathbf{x}) = -2Jg_2(\mathbf{x}) + \bar{J}\mathrm{tr}\nabla\hat{g}\,(\mathbf{x})\nabla\hat{g}\,(\mathbf{x})\,. \tag{5.11}$$

Знаки и обменные постоянные в плотности энергии (5.11) выбраны таким образом, чтобы при отсутствии квадрупольных степеней свободы это выражение перешло в формулу (4.4). Для энергии вида (5.11) уравнения динамики приобретают вид

$$\dot{\hat{q}} = \bar{J}[\Delta\hat{\varepsilon},\, \hat{q}] + \bar{J}[\Delta\hat{q},\, \hat{\varepsilon}]\,, \dot{\hat{\varepsilon}} = \bar{J}[\hat{q},\, \Delta\hat{q}] + \bar{J}[\Delta\hat{\varepsilon},\, \hat{\varepsilon}]\,. \tag{5.12}$$

Линеаризуя их около состояния равновесия $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \equiv 0$, $(\hat{q}_0)_{\alpha\beta} \neq 0$ (T-четные состояния (квадрупольный магнетик)) и переходя к фурье-представлению, приходим к дисперсионному уравнению

$$\det\hat{D}(\mathbf{k},\omega) = 0\,,$$

$$D_{\beta\alpha}(\mathbf{k},\omega) = \delta_{\beta\alpha}\big(\omega^2 - 2\bar{J}^2 k^4 \mathrm{Sp}(\hat{q}_0^2)\big) + 3\bar{J}^2 k^4 (\hat{q}_0^2)_{\beta\alpha}\,.$$

В одноосном случае получим решения $\omega = 0$ и $\omega = \pm\bar{J}k^2 q_0$. Для двухосной квадрупольной матрицы в состоянии равновесия решение приводит к трем спектрам квадрупольных волн: $\omega_{\pm}^{(1)} = \pm 2\bar{J}k^2 q_0$, $\omega_{\pm}^{(2)} = \pm 2\bar{J}k^2 q_0'$, $\omega_{\pm}^{(3)} = \pm 2\bar{J}k^2 | q_0 - q' |$. Здесь q_0 и q_0' — модули этой квадрупольной матрицы в состоянии равновесия. Линеаризуя уравнения (5.12) около состояния равновесия $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \neq 0$, $(\hat{q}_0)_{\alpha\beta} \equiv 0$ (T-нечетные состояния (ферромагнетик)), приходим к спектрам спиновых волн: $\omega_{\pm}^{(1)} = 0$, $\omega_{\pm}^{(2)} = \pm\bar{J}k^2 s_0$, $\omega_{\pm}^{(3)} = \pm\bar{J}k^2 s_0/2$.

Рассмотрим релаксационные процессы в ферроквадрупольных магнетиках. Их учет приводит к возникновению в уравнениях динамики для плотностей аддитивных интегралов движения диссипативных слагаемых

$$\dot{\varsigma}_a = -\nabla_k (\zeta_{ak}^{(0)} + \zeta_{ak}^{(1)}) \equiv \dot{\varsigma}_a^{(1)} + \dot{\varsigma}_a^{(2)} . \tag{5.13}$$

Здесь первое слагаемое справа описывает адиабатические процессы в магнетике, а второе — учитывает диссипативные процессы. Из основного термодинамического соотношения и уравнения (5.13) следует уравнение динамики для плотности энтропии

$$\dot{\sigma} = -\nabla_k j_{\sigma k}^{(1)} + I , \tag{5.14}$$

где

$$j_{\sigma k}^{(1)} = Y_a \zeta_{ak}^{(1)}, \qquad I = \zeta_{al}^{(1)} \nabla_l Y_a \tag{5.15}$$

соответственно плотность диссипативного потока и производство энтропии представлены в терминах диссипативных потоков аддитивных интегралов движения. Здесь $Y_a(\mathbf{x}) = \delta\Sigma/\delta\zeta_a(\mathbf{x})$ — термодинамические силы, ($T \equiv Y_0^{-1}$ — температура и $h_{\beta\alpha} \equiv -Y_{\beta\alpha}/Y_0 = \delta H/\delta g_{\alpha\beta}$ — эффективное поле), сопряженные аддитивным интегралам движения. Энтропия всей системы определяется равенством $\Sigma \equiv \int d^3x \sigma(\mathbf{x})$. Далее удобно выделить симметричную и антисимметричную части эффективного поля:

$$\hat{h} = \hat{h}^{(a)} + \hat{h}^{(s)}, \qquad h_{\alpha\beta}^{(a)} \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma = 2\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{h}),$$

$$h_{\alpha\beta}^{(s)} \equiv (h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha})/2 .$$

Вектор $\mathbf{h}$ имеет физический смысл внутреннего магнитного поля. Требование положительности производства энтропии выполняется, если диссипативные потоки являются линейными функциями градиентов термодинамических сил

$$\zeta_{al}^{(1)} = K_{al,bj} \nabla_j Y_b , \tag{5.16}$$

где обобщенные кинетические коэффициенты $K_{al,bj}$ удовлетворяют принципу симметрии Онзагера $K_{al,bj} = K_{bj,al}$. Поскольку матрицы $\hat{g}$ бесследные, то справедливы дополнительные соотношения $K_{\alpha\alpha l,bj} = 0$, $K_{al,\gamma\gamma j} = 0$. Введем в рассмотрение диссипативную функцию рассматриваемой магнитной среды и ее плотность

$$R \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \nabla_l Y_a(\mathbf{x}) K_{al,bj}(\mathbf{x}) \nabla_j Y_b(\mathbf{x}) = \int d^3x r(\mathbf{x}) . \tag{5.17}$$

Принимая во внимание формулы (5.13), (5.16), видим, что диссипативная функция связана с плотностями диссипативных потоков аддитивных интегралов движения равенством

$$\dot{\zeta}_a^{(2)} = -\nabla_k \zeta_{ak}^{(1)} = \frac{\delta R}{\delta Y_a} . \tag{5.18}$$

В обменном приближении тензорная структура обобщенных кинетических коэффициентов такова, что пространственные и спиновые индексы не перепутываются в виду отсутствия выделенных направлений в конфигурационном пространстве. Поэтому $K_{ak,bl} = \delta_{kl} K_{ab}$. Кроме того, используем принцип Кюри [62], согласно которому кинетические коэффициенты не равны нулю для потоков одинаковой тензорной размерности. Поэтому для диссипативных плотностей потоков аддитивных интегралов движения получим выражения

$$q_k^{(1)} = -\kappa \nabla_k T , \; j_{\alpha k}^{(1)} = -\sigma_{\alpha\beta} \nabla_k h_\beta ,$$

$$q_{\alpha\beta,k}^{(1)} = -\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} \nabla_k h_{\rho\gamma}^{(s)} . \tag{5.19}$$

Кинетические коэффициенты теплопроводности κ, спиновой $\sigma_{\alpha\beta}$ и квадрупольной диффузии $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ связаны с обобщенными кинетическими коэффициентами равенствами $K_{\alpha\beta} = T\sigma_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta,\gamma\rho} = T\sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$, $K_{0,0} = T^2\kappa$ и удовлетворяют соотношениям симметрии: $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\gamma\rho,\alpha\beta}$. Кроме того, в силу симметрии и бесследности квадрупольной матрицы, выполняются равенства $\sigma_{\alpha\alpha,\gamma\rho} = \sigma_{\alpha\beta,\gamma\gamma} = 0$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\beta\alpha,\gamma\rho}$, $\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_{\alpha\beta,\rho\gamma}$. Используя (5.15), (5.19), представим диссипативный поток и производство энтропии в виде

$$j_{\sigma k}^{(1)} = -(\kappa \nabla_k T - h_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \nabla_k h_\beta - h_{\alpha\beta}^{(s)} \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} \nabla_k h_{\gamma\rho}^{(s)})/T ,$$

$$I = (\sqrt{\kappa} \nabla_k T/T)^2 + \nabla_k h_{\beta\alpha}^{(s)} (\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}/T) \nabla_k h_{\rho\gamma}^{(s)} +$$

$$+ \nabla_k h_\alpha (\sigma_{\alpha\beta}/T) \nabla_k h_\beta . \tag{5.20}$$

Дальнейший анализ и упрощение тензорной структуры кинетических коэффициентов связан с состоянием равновесия системы, вблизи которого происходят динамические процессы. Если в равновесии отсутствуют выделенные направления в спиновом пространстве, т.е. $g_{\alpha\beta} = 0$ и $h_{\alpha\beta} = 0$, тензорные кинетические коэффициенты приобретут вид

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma\delta_{\alpha\beta} ,$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_1 (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho}/3)/2 \equiv \sigma_1 B_{\alpha\beta,\gamma\rho}^{(0)} . \tag{5.21}$$

Здесь σ, σ_1 — коэффициенты спиновой диффузии и диффузии квадрупольной матрицы, соответствующие изотропному магнитному состоянию. Отсюда получим диссипативные потоки магнитных степеней свободы

$$j^{(1)}_{\alpha k} = -\sigma\nabla_k h_\alpha\,, \qquad \hat{q}^{(1)}_{\alpha\beta,k} = -\sigma_1\nabla_k \hat{h}^{(s)}_{\alpha\beta}\,. \qquad (5.22)$$

Из (5.20)–(5.22) следует выражение для производства энтропии

$$I = \kappa(\nabla_k T)^2/T + \sigma(\nabla_k h)^2/T + 2\sigma_1(\nabla_k h^{(s)})^2/3T \geq 0\,,$$

где $h = |\mathbf{h}|$ и $h^{(s)} = (3\mathrm{tr}\,\hat{h}^{(s)}/2)^{1/2}$. Положительность производства энтропии обеспечивается неравенствами $\kappa > 0$, $\sigma > 0$, $\sigma_1 > 0$.

Структура диссипативных потоков вблизи состояния $g_{\alpha\beta} \neq 0$ и $h_{\alpha\beta} = 0$ соответствует ферромагнетикам и квадрупольным нематикам. Полагая, для простоты, что анизотропия состояния равновесия одноосная, представим тензорную структуру кинетических коэффициентов в виде

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) + \sigma_\parallel n_\alpha n_\beta\,, \; \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}) \equiv \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\,,$$

$$\sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho} = \sigma_1 B^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} + \sigma_2 B^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} + \sigma_3 B^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}\,. \qquad (5.23)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — ось анизотропии в состоянии равновесия. Представление (5.23) будет однозначным, если для этих матриц потребовать свойство ортогональности

$$B^{(k)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} B^{(l)}_{\gamma\rho,\mu\nu} = \delta_{kl} B^{(k)}_{\alpha\beta,\mu\nu}\,, \qquad k, l = 1, 2, 3\,.$$

Явный вид матриц $B^{(k)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}$ найден в работе [63]

$$B^{(1)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} = B^{(0)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} - B^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} - B^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma\rho}\,, \qquad B^{(2)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} = 3(n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)(n_\gamma n_\rho - \delta_{\gamma\rho}/3)/2\,,$$

$$B^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma\rho} = (\delta_{\alpha\gamma} n_\rho n_\beta + \delta_{\alpha\rho} n_\gamma n_\beta + \delta_{\beta\gamma} n_\rho n_\alpha + \delta_{\beta\rho} n_\gamma n_\alpha - 4 n_\alpha n_\beta n_\rho n_\gamma)/2\,. \qquad (5.24)$$

Учитывая явный вид (5.19), (5.20), (5.23), (5.24), получим производство энтропии

$$I = \kappa(\nabla_k T)^2/T^2 + 2\sigma_2(\nabla_k h^{(s)})^2/3T + 2\sigma_3(h^{(s)})^2(\nabla_k e_\alpha)^2/3T + \sigma_\parallel(\nabla_k h)^2/T + \sigma_\perp h^2(\nabla_k e_\alpha)^2/T,$$

где $\mathbf{e}$ — ось анизотропии в неравновесном состоянии, $\mathbf{e}^2 = 1$. Отсюда следует положительность кинетических коэффициентов $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_\perp, \sigma_\parallel$. В случае перехода равновесного состояния с одноосной симметрией к изотропному состоянию внутреннее эффективное поле исчезает $h^{(s)} \to 0$, $h \to 0$ и для кинетических коэффициентов справедливы соотношения: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_\perp = \sigma_\parallel = \sigma$. Формулы (5.19), (5.21), (5.23), (5.24) дают явный вид диссипативных потоков магнитных степеней свободы в нелинейном случае.

Получим линеаризованные уравнения динамики с учетом диссипативных процессов для квадрупольной матрицы и спина. Согласно (5.13), (5.19) имеем

$$\delta\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \delta j^{(0)}_{\alpha k} + \sigma_{\alpha\beta}\Delta\delta h_\beta\,,$$

$$\delta\dot{q}_{\alpha\beta} = -\nabla_k \delta q^{(0)}_{\alpha\beta,k} + \sigma_{\alpha\beta,\gamma\rho}\Delta\delta h^{(s)}_{\gamma\rho}\,.$$

Чтобы найти связь вариаций эффективного поля с вариациями динамических величин и, тем самым, получить линеаризованные уравнения динамики в замкнутом виде, обратимся к модели обменной энергии, которую представим в виде суммы двух слагаемых: $e = e_0 + e_n$. Первое из них есть плотность однородной части обменной энергии. Эту величину как функцию двух величин возьмем в виде $e_0(s,q) = -Jg_2 + Bg_2^2 + Aq^2$. Здесь первые два слагаемых обладают $SU(3)$ симметрией, а последнее слагаемое имеет $SO(3)$ симметрию. Неоднородную обменную энергию выберем в виде

$$e_n = \bar{J}\,\mathrm{tr}(\nabla_k \hat{g})^2\,, \qquad (5.25)$$

здесь $\bar{J} > 0$ — постоянная неоднородного обмена. Равновесные значения модулей спина и квадрупольной матрицы, а также устойчивость магнитных состояний найдем из условий

$$\partial e_0/\partial s = 0\,, \quad \partial e_0/\partial q = 0\,, \quad \partial^2 e_0/\partial s^2 > 0\,,$$

$$\partial^2 e_0/\partial q^2 > 0\,, \; \frac{\partial^2 e_0}{\partial s^2}\frac{\partial^2 e_0}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 e_0}{\partial s \partial q}\right)^2 > 0\,. \qquad (5.26)$$

Нами получены три решения системы уравнений (5.26).

1 Парамагнитное состояние: $s_0 = q_0 = 0$ устойчиво, если $J < 0$ и $3A > 2J$.

2. Ферромагнитное состояние: $s_0^2 = J/B > 0$ и $q_0 = 0$ устойчиво, если $A > 0$, $B > 0$, $J > 0$.

3. Одноосный спиновый нематик: $s_0 = 0$ и $q_0^2 = 3(2J - 3A)/8B > 0$. Состояние существует и устойчиво, если $A < 0$, $B > 0$, $2J > 3A$.

Найдем связь вариаций эффективного поля с вариациями динамических величин. Для решения 1, используя явный вид плотности обменной энергии, получим

$$\delta h_\alpha = -n_\alpha J\delta s - \bar{J}\Delta\delta s_\alpha\,,$$

$$\delta h^{(s)}_{\alpha\beta} = (n_\alpha n_\beta - \delta_{\alpha\beta}/3)[(3A - 2J)\delta q - 2\bar{J}\Delta\delta q].$$

Здесь введены обозначения вариаций модулей спина и квадрупольной матрицы $\delta s \equiv n_\alpha \delta s_\alpha$, $\delta q \equiv 3 n_\alpha \delta q_{\alpha\beta} n_\beta/2$.

В линейном приближении $e_\alpha = n_\alpha + \delta e_\alpha$, так что $n_\alpha \delta e_\alpha = 0$. Отсюда следуют линеаризованные уравнения динамики для модулей спина и квадрупольной матрицы

$$\delta\dot{s} = -\sigma[J\Delta\delta s + \bar{J}\Delta\Delta\delta s],$$

$$\delta\dot{q} = \sigma_1[(3A - 2J)\Delta\delta q - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q]. \qquad (5.27)$$

Из (5.27) получим спектры коллективных магнитных возбуждений с учетом затухания: $\omega_s = i\Gamma_s$, $\Gamma_s = \sigma(-Jk^2 + \bar{J}k^4)$ — коэффициент затухания спиновой волны; $\omega_q = i\Gamma_q$, $\Gamma_q = \sigma_1[(3A - 2J)k^2 + 2\bar{J}k^4]$ — коэффициент затухания квадрупольной волны.

Поступая аналогично, приведем линеаризованные уравнения для вариаций динамических величин с учетом диссипации для решения 2:

$$\delta\dot{s}_{||} = 2J\sigma_{||}\Delta\delta s_{||} - \bar{J}\sigma_{||}\Delta\Delta\delta s_{||},$$

$$\delta\dot{s}_{\perp\alpha} = \bar{J}s_0\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\beta\delta s_{\perp\gamma} - \bar{J}\sigma_\perp\Delta\Delta\delta s_{\perp\alpha},$$

$$\delta\dot{q}_{\alpha\beta} = \bar{J}[\Delta\delta\hat{q}, \hat{\varepsilon}_0]_{\alpha\beta} + \sigma_2(3A\Delta\delta q_{\alpha\beta} - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q_{\alpha\beta}).$$

Здесь продольные и поперечные составляющие вариаций спина заданы соотношениями $\delta s_{||} \equiv n_\alpha \delta s_\alpha$, $\delta s_{\perp\alpha} \equiv \delta^{\perp}_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\delta s_\beta$, $(\hat{\varepsilon}_0)_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}s_0 n_\gamma/2$. Отсюда приходим к спектрам $\omega(k) = \bar{J}s_0k^2/2$, $\omega(k) = \bar{J}s_0k^2$ и найдем коэффициенты затухания: для продольной $\Gamma_{s_{||}} = 2\sigma_{||}Jk^2 + \bar{J}\sigma_{||}k^4$ и поперечной $\Gamma_{s_\perp} = \bar{J}\sigma_\perp k^4$ компонент спина, а также для модуля квадрупольной матрицы $\Gamma_q = \sigma_2(3Ak^2 + 2\bar{J}k^4)$.

Нетрудно показать, что диссипативные слагаемые в линеаризованных уравнениях динамики, соответствующих решению 3, имеют вид

$$\delta\dot{s}^{(2)}_{||} = -3A\sigma_{||}\Delta\delta s_{||}/2 - \bar{J}\sigma_{||}\Delta\Delta\delta s_{||}, \quad \delta\dot{s}^{(2)}_{\perp\alpha} = -\bar{J}\sigma_\perp\Delta\Delta\delta s^{\perp}_{\alpha},$$

$$\delta\dot{q}^{(2)} = \sigma_2[16Bq_0^2\Delta\delta q/3 - 2\bar{J}\Delta\Delta\delta q], \quad \delta\dot{e}^{(2)}_{\lambda} = -\bar{J}\sigma_3\Delta\Delta\delta e_\lambda.$$

Здесь равенство $\delta e_\lambda \equiv \delta^{\perp}_{\lambda\beta}(\mathbf{n})\delta q_{\beta\gamma}n_\gamma/q$ дает связь вариаций оси анизотропии и квадрупольной матрицы. Отсюда получим коэффициенты затухания в спектрах коллективных возбуждений: для продольной и поперечной составляющих спинового момента $\Gamma_{s_{||}} = -3A\sigma_{||}k^2/2 + \bar{J}\sigma_{||}k^4$, $\Gamma_{s_\perp} = \bar{J}\sigma_\perp k^4$. Для оси анизотропии и модуля квадрупольной матрицы коэффициенты затухания равны $\Gamma_q = \sigma_2[16Bq_0^2k^2/3 + 2\bar{J}k^4]$ и $\Gamma_{\mathbf{e}} = \bar{J}\sigma_3k^4$. Эти коэффициенты затухания согласуются с результатами работы [35], в которой использован другой модельный вид обменной энергии.

В случае $SU(2)$~$SO(3)$ симметрии обменного взаимодействия подалгебра скобок Пуассона (4.2) приводит к описанию динамики магнетиков со спином $s = 1$ в терминах вектора спина (уравнение Ландау–Лифшица), характерному для спин $s = 1/2$ магнетиков.

5.3. Динамика спинового нематика

Вектор спина $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ и тензорный параметр порядка $\hat{m}(\mathbf{x})$ формируют замкнутую подалгебру скобок Пуассона (4.2), (5.9). Это физически новый случай нарушения $SO(3)$ симметрии, который отсутствует у магнетиков со спином $s = 1/2$. Учитывая, что $e = e(\mathbf{s}, \nabla\mathbf{s}, \hat{m}, \nabla\hat{m}, \sigma)$, получим уравнения динамики

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma + 2\frac{\delta H}{\delta m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right),$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma} = -(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma})\frac{\delta H}{\delta s_\alpha}.$$

Свойство симметрии (3.3) для плотности энергии позволяет преобразовать первое уравнение к виду

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}, \quad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma + 2\frac{\partial e}{\partial\nabla_k m_{\beta\lambda}}m_{\gamma\lambda}\right).$$

Плотность обменной энергии $e = e_0 + e_n$ выберем в виде $e_0 = Js^2/2 + A\mathrm{tr}\hat{m}^2/2$, $e_n = B\mathrm{tr}(\nabla\hat{m})^2/2$. Уравнения нелинейной динамики для данного магнитного упорядочения имеют вид

$$\dot{s}_\alpha = -2B\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta m_{\beta\lambda}m_{\gamma\lambda}, \quad \dot{m}_{\beta\gamma} = -Js_\alpha(\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\rho}m_{\rho\gamma}).$$

Учтем диссипативные процессы в рассматриваемых магнетиках. Уравнения динамики для плотностей аддитивных интегралов движения и матрицы $w_{\beta\gamma}$ следующие:

$$\dot{e} = -\nabla_k(q_k^{(0)} + q_k^{(1)}), \quad \dot{s}_\alpha = -\nabla_k(j^{(0)}_{\alpha k} + j^{(1)}_{\alpha k}),$$

$$\dot{m}_{\beta\gamma} = \dot{m}^{(0)}_{\beta\gamma} + \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma} + .., \quad \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma} = -(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta}m_{\rho\gamma})h^{(1)}_{\alpha}. \qquad (5.28)$$

Следствием уравнений (5.13), (5.28) и термодинамического соотношения

$$de = \frac{\partial e}{\partial s_\alpha}ds_\alpha + \frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\alpha}d\nabla_k s_\alpha + {}$$

$$+ \mathrm{tr}\frac{\partial\hat{e}}{\partial m}d\hat{m} + \mathrm{tr}\frac{\partial\hat{e}}{\partial\nabla_k m}d\nabla_k\hat{m} + \frac{\partial e}{\partial\sigma}d\sigma$$

будет уравнение для плотности энтропии (5.14), где плотность диссипативного потока и производство энтропии

$$j^{(1)}_{\sigma k} = Y_a\zeta^{(1)}_{ak} - \frac{\partial\sigma}{\partial\nabla_k m_{\beta\gamma}}\dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma}, \qquad I = \zeta^{(1)}_{ak}\nabla_k Y_a + \Gamma_\alpha h^{(1)}_{\alpha}$$

представлены в терминах диссипативных потоков аддитивных интегралов движения. Вектор Γ_α определяется равенством

$$\Gamma_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} m_{\beta\lambda} \frac{\delta\Sigma}{\delta m_{\gamma\lambda}} . \qquad (5.29)$$

Диссипативные потоки $\zeta^{(1)}_{al}$ и $\eta^{(1)}_{\alpha}$ линейны по градиентам термодинамических сил и величинам Γ_α:

$$\zeta^{(1)}_{al} = K_{al,bj}\nabla_j Y_b + K_{al,\alpha}\Gamma_\alpha , \quad h^{(1)}_\alpha = K_{\alpha,bj}\nabla_j Y_b + \underline{K}_{\alpha,\beta}\Gamma_\beta .$$

Кинетические коэффициенты удовлетворяют принципу симметрии Онзагера:

$$K_{al,bj} = K_{bj,al} , \quad K_{\alpha,bl} = K_{bl,\alpha} , \quad \underline{K}_{\alpha\beta} = \underline{K}_{\beta\alpha}$$

и формируют положительно определенную квадратичную форму производства энтропии. Диссипативная функция и ее плотность определяются равенствами

$$R \equiv \int d^3 x r(\mathbf{x}) , \qquad r = \Gamma_\mu K_{\mu\nu}\Gamma_\nu /2 .$$

Здесь $\Gamma_\mu \equiv (\nabla_k Y_a, \Gamma_\alpha)$, $\mu \equiv ak;\alpha$. В терминах диссипативной функции релаксационные слагаемые в уравнении движения параметров сокращенного описания ζ_a и $\hat{m}$ (5.28) приобретут универсальный вид:

$$\dot{\zeta}^{(2)}_a = \frac{\delta R}{\delta\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta\zeta_a}\right)} , \qquad \dot{m}^{(1)}_{\beta\gamma} = \frac{\delta R}{\delta\left(\dfrac{\delta\Sigma}{\delta m}\right)_{\beta\gamma}} .$$

Используя принцип Кюри и предполагая, что состояние равновесия изучаемого магнетика однородное, имеем $K_{ak,bl} = \delta_{kl}K_{ab}$ и $K_{ak,\alpha} = 0$. Значения плотности спина и матрицы $\hat{m}$ в этом состоянии — постоянные величины. Из (5.28) следует уравнение на структуру этой матрицы и спина в точке стационара $(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma}m_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta}m_{\rho\gamma})\partial e/\partial s_\alpha = 0$. Далее мы рассмотрим только такие решения, для которых $h_\alpha = 0$, $\hat{m}$ = const. Определим кинетические коэффициенты теплопроводности κ, спиновой диффузии $\sigma_{\alpha\beta}$ и спиновой вязкости $c_{\alpha\beta}$ в терминах обобщенных кинетических коэффициентов $\underline{K}_{\alpha\beta} = Tc_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta} = T\sigma_{\alpha\beta}$, $K_{0,0} = T^2\kappa$. Производство энтропии записывается в виде

$$I = (\sqrt{\kappa}\nabla_k T/T)^2 + \nabla_k h_\alpha (\sigma_{\alpha\beta}/T)\nabla_k h_\beta + \Gamma_\alpha (c_{\alpha\beta}/T)\Gamma_\beta .$$

Заметим, что релаксация параметра порядка в силу нелинейной связи (5.29) существенна только вблизи состояния равновесия, где $\hat{m} \neq 0$. Рассмотрим случай, при котором магнетик в равновесии обладает одноосной симметрией. Тензорная структура кинетических коэффициентов $\sigma_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$c_{\alpha\beta} \equiv c_{\|}n_\alpha n_\beta + c_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}), \quad \sigma_{\alpha\beta} \equiv \sigma_{\|}n_\alpha n_\beta + \sigma_\perp \delta^\perp_{\alpha\beta}(\mathbf{n}). \qquad (5.30)$$

Для изотропного состояния равновесия $c = c_{\|} = c_\perp$ и $\sigma = \sigma_{\|} = \sigma_\perp$. Линеаризованные уравнения диссипативной динамики в соответствии с (5.28) имеют вид

$$\delta\dot{e} = -\nabla_k \delta q^{(0)}_k + \kappa\Delta\delta T , \; \delta\dot{s}_\alpha = -\nabla_k \delta j^{(0)}_{\alpha k} + \sigma_{\alpha\beta}\Delta\delta h_\beta ,$$

$$\delta\dot{m}_{\alpha\beta} = -\left(\varepsilon_{\alpha\rho\gamma}m^{(0)}_{\rho\beta} + \varepsilon_{\alpha\rho\beta}m^{(0)}_{\rho\gamma}\right)\left(\delta h^{(0)}_\alpha + Tc_{\alpha\sigma}\delta\Gamma_\sigma\right) . \qquad (5.31)$$

Для их анализа необходимо найти связь вариаций спина и матричного параметра порядка с эффективным полем. Представим модель обменной энергии в виде функции инварианта Казимира скобки Пуассона (4.2) и инвариантов Казимира расширенного набора скобок Пуассона величин $\mathbf{s}$ и $\hat{m}$. В случае одноосной симметрии состояния равновесия инварианты m_2 и m_3 связаны соотношением $m_3^2 = m_2^3/6$, так что в качестве независимой величины выбрана $m_2 \equiv m$. Модель обменной энергии строим таким образом, чтобы ее однородные слагаемые имели определенный знак, а неоднородная ее часть была положительна:

$$e_0(s,m) = -\frac{1}{2}As^2 - \frac{1}{2}Cm^2 + \frac{1}{4}Bs^4 + \frac{1}{4}Dm^4 + \frac{1}{2}Es^2m^2 ,$$

$$e_n(\nabla\mathbf{s}, \nabla\hat{m}) = \bar{\bar{J}}\mathrm{tr}(\nabla_k m_{\alpha\beta})^2/2 + \bar{J}(\nabla_k s_\alpha)^2/2 .$$

Условия на равновесные значения спина и модуля параметра порядка аналогичны (5.26). Для представленного вида энергии возможны такие состояния равновесия.

1. Состояние $s_0 = 0$, $m_0 = 0$ устойчиво, если: $A < 0$, $C < 0$. Реактивная составляющая спектров отсутствует. Коэффициент затухания спиновой волны равен $\Gamma_s = \sigma(-Ak^2 + \bar{J}k^4)$.

2. Решение $s_0^2 = A/B$, $m_0 = 0$ устойчиво, если: $B > 0$, $AE > CB$, $A > 0$. Спектр спиновой волны имеет вид $\omega = Cs_0k^2$. Приведем коэффициенты затухания для продольной составляющей спина $\Gamma_{s_\|} = \sigma_{\|}(2Ak^2 + \bar{J}k^4)$. и поперечной компоненты спина $\Gamma_{s_\perp} = \sigma\bar{J}k^4$.

3. Состояние $s_0 = 0$, $m_0^2 = 3C/2D$ устойчиво, если: $D > 0$, $C > 0$, $CE > AD$. Спектр голдстоуновской волны имеет вид $\omega = k\sqrt{6\bar{\bar{J}}C(EC - DA + D\bar{J}k^2)}/D$. Затухание продольной части спиновой волны $\Gamma_{s_\|} = \sigma_{\|}\left((\bar{J}B - A\bar{\bar{J}})k^2/\bar{\bar{J}} + Ek^4\right)$. Используя формулы (5.29)–(5.31), нетрудно найти декремент затухания в спектре голдстоуновской волны, соответствующей оси анизотропии: $\Gamma_{\mathbf{e}} = 2m_0c_\perp\bar{\bar{J}}k^4$.

6.1. Магнетики со спином s = 3/2

В соответствии с подходом разд. 2, кинематическая часть лагранжиана магнитной системы со спином 3/2 представима в виде (2.5), где $b_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ и $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ — эрмитовы 4×4 матрицы. Введем в рассмотрение действительные величины, характеризующие магнитные степени свободы. Сделаем это таким образом, чтобы проследить взаимосвязь уравнений динамики для спина s = 3/2 с динамикой магнетиков, где спин частиц s = 1/2 и s = 1. Этими величинами являются: скаляр — $g(\mathbf{x})$, три магнитных вектора — $\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})$ и квадрупольная матрица — $q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, которые связаны с эрмитовой матрицей $\hat{g}$ соотношениями

$$s_\alpha = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} g_{\beta\gamma}, \quad u_\alpha = i(g_{\alpha 4} - g_{4\alpha}), \quad g = g_{44},$$

$$v_\alpha = (g_{\alpha 4} - g_{4\alpha}), \quad q_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} - 2g_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}/3)/2 . \quad (6.1)$$

Здесь греческими буквами обозначены спиновые индексы, пробегающие значения $\alpha, \beta, \gamma, .. \equiv 1, 2, 3$. Легко видеть, что для векторов s_α справедливы в силу (6.1) скобки Пуассона (4.2). Для векторов u_α и s_α скобки Пуассона имеют вид

$$\{u_\alpha(\mathbf{x}), u_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(\mathbf{x}) ,$$

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), u_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma(\mathbf{x}) . \quad (6.2)$$

Скобки Пуассона величин s_α и $q_{\alpha\beta}$ совпадают с формулами (5.5). Для векторов s_α и v_α, в силу (6.1), получим

$$\{s_\alpha(\mathbf{x}), v_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma(\mathbf{x}) ,$$

$$\{v_\alpha(\mathbf{x}), v_\beta(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma(\mathbf{x}) . \quad (6.3)$$

Для оставшихся величин, согласно (6.1), найдем

$$\{u_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\delta_{\alpha\beta} v_\gamma(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\gamma} v_\beta(\mathbf{x}) - 2\delta_{\beta\gamma} v_\alpha(\mathbf{x})/3\big)/2 ,$$

$$\{v_\alpha(\mathbf{x}), q_{\beta\gamma}(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\delta_{\alpha\beta} u_\gamma(\mathbf{x}) + \delta_{\alpha\gamma} u_\beta(\mathbf{x}) - 2\delta_{\beta\gamma} u_\alpha(\mathbf{x})/3\big)/2 ,$$

$$\{u_\alpha(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') v_\alpha(\mathbf{x}) , \qquad \{v_\alpha(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') u_\alpha(\mathbf{x}) ,$$

$$\{u_\alpha(\mathbf{x}), v_\beta(\mathbf{x}')\} = 2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(4\delta_{\alpha\beta} g(\mathbf{x})/3 - q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\big) . \quad (6.4)$$

Алгебра скобок Пуассона содержит 15 магнитных степеней свободы и позволяет описать динамику нормальных состояний магнетиков со спином $s = 3/2$. Три ее инварианта Казимира g_2, g_3, g_4 уменьшают число независимых степеней свободы до двенадцати. Свойство $SU(4)$ симметрии гамильтониана $\{\hat{G}, e\} = 0$ с учетом (4.2), (5.5), (6.2)–(6.4) позволяет сформулировать динамические уравнения типа (2.6) для спина $s = 3/2$

$$\dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta} s_\gamma + \frac{\delta H}{\delta u_\beta} u_\gamma + \frac{\delta H}{\delta v_\beta} v_\gamma + 2\frac{\delta H}{q_{\beta\lambda}} q_{\gamma\lambda}\right),$$

$$\dot{u}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta} u_\gamma + \frac{\delta H}{\delta u_\beta} s_\gamma\right) + 2\frac{\delta H}{\delta v_\beta}(4g\delta_{\alpha\beta}/3 - q_{\alpha\beta}) - \frac{\delta H}{\delta g} v_\alpha + \frac{\delta H}{\delta q_{\alpha\beta}} v_\beta ,$$

$$\dot{v}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta} v_\gamma + \frac{\delta H}{\delta v_\beta} s_\gamma\right) - 2\frac{\delta H}{\delta u_\beta}(4g\delta_{\alpha\beta}/3 - q_{\alpha\beta}) + \frac{\delta H}{\delta g} u_\alpha - \frac{\delta H}{\delta q_{\alpha\beta}} u_\beta , \qquad \dot{g} = \frac{\delta H}{\delta u_\alpha} v_\alpha - \frac{\delta H}{\delta v_\alpha} u_\alpha ,$$

$$\dot{q}_{\beta\gamma} = -\frac{\delta H}{\delta s_\alpha}(\varepsilon_{\alpha\beta\rho} q_{\rho\gamma} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho} q_{\rho\beta}) - \frac{1}{2}\frac{\delta H}{\delta u_\alpha}(\delta_{\alpha\beta} v_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} v_\beta - 2\delta_{\beta\gamma} v_\alpha/3) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\delta H}{\delta v_\alpha}(\delta_{\alpha\beta} u_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} u_\beta - 2\delta_{\beta\gamma} u_\alpha/3) + \frac{1}{2}\frac{\delta H}{\delta q_{\mu\nu}} s_\lambda(\varepsilon_{\lambda\gamma\nu}\delta_{\beta\mu} + \varepsilon_{\lambda\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}).$$

Принимая во внимание $SU(4)$ симметрию плотности обменного взаимодействия

$$(S_\alpha, e(\mathbf{x})) = 0 , \qquad \{U_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0 , \qquad \{V_\alpha, e(\mathbf{x})\} = 0 ,$$
$$\{G, e(\mathbf{x})\} = 0 , \qquad \{Q_{\alpha\beta}, e(\mathbf{x})\} = 0 ,$$

где

$$S_\alpha = \int d^3x s_\alpha(\mathbf{x}) , \qquad U_\alpha = \int d^3x u_\alpha(\mathbf{x}) , \qquad V_\alpha = \int d^3x v_\alpha(\mathbf{x}) , \qquad G = \int d^3x g(\mathbf{x}) , \qquad Q_{\alpha\beta} = \int d^3x q_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$$

— аддитивные интегралы движения, получим

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k s_{\alpha k} , \quad \dot{u}_\alpha = -\nabla_k u_{\alpha k} , \quad \dot{v}_\alpha = -\nabla_k v_{\alpha k} , \quad \dot{g} = -\nabla_k g_k , \quad \dot{q}_{\alpha\beta} = -\nabla_k q^k_{\alpha\beta} . \quad (6.5)$$

Здесь плотности потоков аддитивных интегралов движения в соответствии с (3.5) имеют вид

$$s_{\alpha k}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma+\frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\beta}u_\gamma+\frac{\partial e}{\partial\nabla_k v_\beta}v_\gamma+2\frac{\partial e}{\partial\nabla_k q_{\beta\lambda}}q_{\gamma\lambda}\right),$$

$$u_{\alpha k}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}u_\gamma+\frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\beta}s_\gamma\right)+2\frac{\partial e}{\partial\nabla_k v_\beta}\left(\frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta}g-q_{\alpha\beta}\right)-\frac{\partial e}{\partial\nabla_k g}v_\alpha+\frac{\partial e}{\partial\nabla_k q_{\alpha\lambda}}v_\lambda,$$

$$v_{\alpha k}=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}v_\gamma+\frac{\partial e}{\partial\nabla_k v_\beta}s_\gamma\right)-2\frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\beta}\left(\frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta}g-q_{\alpha\beta}\right)+\frac{\partial e}{\partial\nabla_k g}u_\alpha-\frac{\partial e}{\partial\nabla_k q_{\alpha\lambda}}u_\lambda,\quad g_k=\frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\alpha}v_\alpha-\frac{\partial e}{\partial\nabla_k v_\alpha}u_\alpha,$$

$$q^k_{\beta\gamma}=(\varepsilon_{\alpha\beta\rho}q_{\rho\gamma}+\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}q_{\rho\beta})\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\alpha}(\delta_{\alpha\beta}v_\gamma+\delta_{\alpha\gamma}v_\beta-2\delta_{\beta\gamma}v_\alpha/3)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial\nabla_k v_\alpha}(\delta_{\alpha\beta}u_\gamma+\delta_{\alpha\gamma}u_\beta-2\delta_{\beta\gamma}u_\alpha/3)-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial\nabla_k q_{\mu\nu}}s_\lambda(\varepsilon_{\lambda\gamma\nu}\delta_{\beta\mu}+\varepsilon_{\lambda\beta\mu}\delta_{\gamma\nu}).\qquad(6.6)$$

Дальнейшее упрощение вида уравнений (6.5), (6.6) требует задания плотности обменной энергии в явном виде как функции магнитных степеней свободы. Мы выберем плотность обменной энергии в виде $e=e_0+e_n$, где

$$e_0=J\mathrm{tr}\hat{g}^2/2=J\left((s^2+u^2+v^2)/2+4g^2/3+q^2_{\alpha\beta}\right)/2,$$

$$e_n=J\mathrm{tr}(\nabla\hat{g})^2/2=J\left\{[(\nabla s)^2+(\nabla u)^2+(\nabla v)^2]/2+4(\nabla g)^2/3+(\nabla q_{\alpha\beta})^2\right\}/2.\qquad(6.7)$$

Однородная часть обменной энергии (6.7) построена на основе инварианта Казимира g_2 и удовлетворяет соотношению (3.4). Неоднородная часть этой энергии также удовлетворяет этому свойству симметрии. В результате получим нелинейные уравнения динамики:

$$\dot{s}_\alpha=-\bar{J}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\Delta s_\beta s_\gamma+\Delta u_\beta u_\gamma+\Delta v_\beta v_\gamma+4\Delta q_{\beta\lambda}q_{\gamma\lambda})/2,$$

$$\dot{u}_\alpha=-\bar{J}\left\{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\Delta s_\beta u_\gamma+\Delta u_\beta s_\gamma)/2+\Delta v_\beta(4\delta_{\alpha\beta}g/3-q_{\alpha\beta})-v_\beta(4\delta_{\alpha\beta}\Delta g/3-\Delta q_{\alpha\beta})\right\},$$

$$\dot{v}_\alpha=-\bar{J}\left\{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\Delta s_\beta v_\gamma+\Delta v_\beta s_\gamma)/2+\Delta u_\beta(4\delta_{\alpha\beta}g/3-q_{\alpha\beta})-u_\beta(4\delta_{\alpha\beta}\Delta g/3-\Delta q_{\alpha\beta})\right\},$$

$$\dot{g}=-\bar{J}\{\Delta u_\alpha v_\alpha-\Delta v_\alpha u_\alpha\}/2,$$

$$\dot{q}_{\beta\gamma}=-\bar{J}\left\{\Delta u_\beta v_\gamma-\Delta v_\gamma u_\beta-\delta_{\beta\gamma}(\Delta u_\alpha v_\alpha-\Delta v_\alpha u_\alpha)/3+2\varepsilon_{\alpha\gamma\rho}(q_{\rho\beta}\Delta s_\alpha-\Delta q_{\rho\beta}s_\alpha)+(\beta\leftrightarrow\gamma)\right\}/4.$$

Включение всех магнитных величин, которые входят в алгебру скобок Пуассона (4.2), (5.5), (6.2)–(6.4), в качестве динамических величин отвечает $SU(4)$ симметрии обменного гамильтониана (3.4). Общая группа $SU(4)$ симметрии содержит следующие подгруппы с меньшей симметрией:

$$SU(4)\supset SU(3)\supset SU(2)\sim SO(3),$$

$$SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)\supset SU(2)\sim SO(3),$$

$$SU(4)\supset SO(4)\supset SU(2)\sim SO(3),$$

$$SU(4)\supset SO(5)\supset SU(2)\sim SO(3).$$

Минимальная подалгебра содержит только скобку Пуассона для вектора спина (4.2) и в случае $SO(3)$ симметрии обменного взаимодействия (3.3) для магнетиков со спином s = 3/2 справедливы уравнения Ландау–Лифшица. Другая подалгебра скобок Пуассона (4.2), (5.5) и условие $SU(3)$ симметрии гамильтониана (3.4) приводят к уравнениям динамики квадрупольных ферромагнетиков (5.12).

Изучим оставшиеся три подалгебры скобок Пуассона (4.2), (5.5), (6.2)–(6.4) и остановимся на нерассмотренных случаях магнитного упорядочения.

6.2. Симметрия SU(2) × SU(2)

Набор степеней свободы магнетика состоит из векторов $\mathbf{s},\mathbf{u}$ или $\mathbf{s},\mathbf{v}$ отвечает симметрии $SU(2)\times SU(2)$. Используя формулы (4.2), (6.2), получим уравнения динамики для этих спиновых векторов

$$\dot{u}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta s_\beta}u_\gamma+\frac{\delta H}{\delta u_\beta}s_\gamma\right),$$

$$\dot{s}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\delta H}{\delta u_\beta}u_\gamma+\frac{\delta H}{\delta s_\beta}s_\gamma\right).$$

Свойство $SU(2)\times SU(2)$ симметрии эквивалентно соотношениям

$$\{U_\alpha, e(\mathbf{x})\}=0, \qquad \{S_\alpha, e(\mathbf{x})\}=0, \tag{6.8}$$

где $U_\alpha \equiv \int d^3x u_\alpha(\mathbf{x})$, $S_\alpha \equiv \int d^3x s_\alpha(\mathbf{x})$ — аддитивные интегралы движения. Используя (6.8), получим уравнения динамики для этих спиновых векторов в виде дифференциальных законов сохранения

$$\dot{u}_\alpha = -\nabla_k j^{(u)}_{\alpha k}, \quad j^{(u)}_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}u_\gamma + \frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\beta}s_\gamma\right),$$

$$\dot{s}_\alpha = -\nabla_k j_{\alpha k}, \quad j_{\alpha k} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial e}{\partial\nabla_k u_\beta}u_\gamma + \frac{\partial e}{\partial\nabla_k s_\beta}s_\gamma\right). \tag{6.9}$$

Плотность неоднородной обменной энергии выберем в виде $e_n = \bar{J}\mathrm{tr}(\nabla\hat{g}^{(a)})^2/2 = \bar{J}[(\nabla_k \mathbf{s})^2 + (\nabla_k \mathbf{u})^2]/2$. Для этой модели обменной энергии уравнения (6.9) перепишутся в виде

$$\dot{u}_\alpha = -\bar{J}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\Delta s_\beta u_\gamma + \Delta u_\beta s_\gamma),$$

$$\dot{s}_\alpha = -\bar{J}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(\Delta u_\beta u_\gamma + \Delta s_\beta s_\gamma).$$

6.3. Симметрия SO(4)

Введем в рассмотрение поляризационную матрицу плотности соотношением $\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \hat{I}/4 + \hat{g}(\mathbf{x})$. Разложение физической матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \gamma_\mu(\mathbf{x})\hat{\gamma}_\mu + \bar{\gamma}_\mu(\mathbf{x})\hat{\bar{\gamma}}_\mu + \gamma_5(\mathbf{x})\hat{\gamma}_5 + \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})\hat{\sigma}_{\mu\nu}/2. \tag{6.10}$$

Набор независимых неприводимых (4×4) матриц $\hat{\gamma}_a$, $(a = 1,\ldots,15)$ состоит из эрмитовых матриц Дирака $\hat{\gamma}^\mu$ и эрмитовых матриц вида $\hat{\bar{\gamma}}_\mu \equiv i\hat{\gamma}_5\hat{\gamma}_\mu$, $\hat{\gamma}_5 \equiv \hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3\hat{\gamma}_4$, $\hat{\sigma}_{\mu\nu} \equiv i[\hat{\gamma}_\mu,\hat{\gamma}_\nu]/2$, $(\mu<\nu)$; $(\mu,\nu,\lambda,\rho = 1,2,3,4)$. В силу условий бесследности базисных матриц $\mathrm{tr}\,\hat{\gamma}_a = 0$ и их ортогональности $\mathrm{tr}\hat{\gamma}_a\hat{\gamma}_b = 4\delta_{ab}$, входящие в (6.10) действительные величины $\gamma_a(\mathbf{x}) \equiv (\gamma_5(\mathbf{x}), \gamma_\mu(\mathbf{x}), \bar{\gamma}_\mu(\mathbf{x}), \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}))$ представляют собой полный набор магнитных степеней свободы. Согласно (6.10) и соотношениям ортогональности, эти величины связаны с матрицей $\hat{g}(\mathbf{x})$ равенством $\gamma_a(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{\gamma}_a/4$.

Рассмотрим чистые состояния спин $s = 3/2$ магнетиков. Для этих состояний три инварианта Казимира имеют численные значения: $g_2 = 3/4$, $g_3 = 3/8$, $g_4 = 21/64$. Условие чистоты квантового состояния приводит к системе уравнений, связывающих магнитные степени свободы γ_a:

$$\gamma_5^2 + \gamma_\mu^2 + \bar{\gamma}_\mu^2 + \sigma_{\mu\nu}^2/2 = 3/16,$$

$$2\gamma_5 = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}\sigma_{\lambda\rho}, \qquad \gamma_\nu = -2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\bar{\gamma}_\mu\sigma_{\lambda\rho},$$

$$\bar{\gamma}_\nu = 2\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\mu\sigma_{\lambda\rho}, \quad \sigma_{\lambda\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(4\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu - 2\gamma_5\sigma_{\mu\nu}).$$

Решением этих уравнений является следующий вид поляризационной матрицы:

$$\hat{\rho} = \hat{I}/4 + au_\mu\hat{\gamma}_\mu + a\bar{u}_\mu\hat{\bar{\gamma}}_\mu - \sqrt{1-16a^2}\,\hat{\gamma}_5/4 +$$

$$+[\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}u_\lambda\bar{u}_\rho + \sqrt{1-16a^2}(u_\mu\bar{u}_\nu - u_\nu\bar{u}_\mu)]\hat{\sigma}_{\mu\nu}/8.$$

Это выражение, представленное в виде двух единичных и ортогональных 4-векторов $u_\mu^2 = \bar{u}_\mu^2 = 1$, $u_\mu\bar{u}_\mu = 0$, содержит шесть независимых величин, характеризующих чистое квантовое состояние магнетиков со спином $s = 3/2$.

Хорошо известно, что алгебра матриц Дирака является шестимерной: независимые матрицы представляют собой инфинитезимальные операторы ортогональной группы в шестимерном пространстве [64,65], т.е. $2\hat{S}_{6\mu} = \hat{\gamma}_\mu$, $2\hat{S}_{65} = \hat{\gamma}_5$, $2\hat{S}_{\mu 5} = \hat{\bar{\gamma}}_\mu$, $2\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{\sigma}_{\mu\nu}$. Используя эти соотношения и формулу [66]

$$i[\hat{S}_{ik}, \hat{S}_{lm}] = \delta_{im}\hat{S}_{kl} - \delta_{il}\hat{S}_{km} - \delta_{km}\hat{S}_{il} + \delta_{kl}\hat{S}_{im},$$

получим ненулевые скобки Пуассона:

$$\{\gamma_5(\mathbf{x}), \gamma_\mu(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\bar{\gamma}_\mu(\mathbf{x})/2, \qquad \{\gamma_5(\mathbf{x}), \bar{\gamma}_\mu(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\gamma_\mu(\mathbf{x})/2,$$

$$\{\gamma_\mu(\mathbf{x}), \gamma_\nu(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})/2, \qquad \{\bar{\gamma}_\mu(\mathbf{x}), \bar{\gamma}_\nu(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x})/2,$$

$$\{\gamma_\mu(\mathbf{x}), \bar{\gamma}_\nu(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta_{\mu\nu}\gamma_5(\mathbf{x})/2,$$

$$\{\sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \sigma_{\lambda\rho}(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\delta_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\rho}(\mathbf{x}) + \delta_{\nu\rho}\sigma_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) + \delta_{\mu\rho}\sigma_{\nu\lambda}(\mathbf{x}) + \delta_{\mu\lambda}\sigma_{\rho\nu}(\mathbf{x})\big)/2,$$

$$\{\gamma_\lambda(\mathbf{x}), \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')(\gamma_\nu(\mathbf{x})\delta_{\lambda\mu} - \gamma_\mu(\mathbf{x})\delta_{\lambda\nu})/2, \qquad \{\bar{\gamma}_\lambda(\mathbf{x}), \sigma_{\mu\nu}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')(\bar{\gamma}_\nu(\mathbf{x})\delta_{\lambda\mu} - \bar{\gamma}_\mu(\mathbf{x})\delta_{\lambda\nu})/2. \tag{6.11}$$

Полагаем, что неоднородная часть обменной энергии имеет вид (3.8). Учитывая (6.11) и используя свойства симметрии плотности магнитной энергии $\{\Gamma_a, \mathrm{e}(\mathbf{x})\} = 0$, где $\Gamma_a \equiv \int d^3x\gamma_a(\mathbf{x})$, приходим к уравнениям динамики

$$\dot{\gamma}_5 = 2\bar{J}(\bar{\gamma}_\mu \Delta\gamma_\mu - \gamma_\mu \Delta\bar{\gamma}_\mu), \qquad \dot{\gamma}_\mu = 2\bar{J}(\gamma_5 \Delta\bar{\gamma}_\mu - \bar{\gamma}_\mu \Delta\gamma_5 + \sigma_{\mu\nu}\Delta\gamma_\nu - \gamma_\nu \Delta\sigma_{\mu\nu}),$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_\mu = 2\bar{J}(\gamma_\mu \Delta\gamma_5 - \gamma_5 \Delta\gamma_\mu + \bar{\gamma}_\nu \Delta\sigma_{\nu\mu} - \sigma_{\nu\mu}\Delta\bar{\gamma}_\nu),$$

$$\dot{\sigma}_{\mu\nu} = 2\bar{J}(\gamma_\nu \Delta\gamma_\mu - \gamma_\mu \Delta\gamma_\nu + \bar{\gamma}_\nu \Delta\bar{\gamma}_\mu - \bar{\gamma}_\mu \Delta\bar{\gamma}_\nu + \sigma_{\mu\lambda}\Delta\sigma_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu}\Delta\sigma_{\mu\lambda}).$$

Если аддитивными интегралами движения магнитной системы являются только антисимметричные матрицы $\Sigma_{\mu\nu}$, $\{\Sigma_{\mu\nu}, H\} = 0$, то используя функциональную гипотезу сокращенного описания $H = H(\hat{\sigma}, \nabla\hat{\sigma})$, для этих величин получим $SO(4)$ симметричные уравнения динамики

$$\dot{\sigma}_{\mu\nu} = 2\bar{J}(\sigma_{\mu\lambda}\Delta\sigma_{\lambda\nu} - \sigma_{\lambda\nu}\Delta\sigma_{\mu\lambda}).$$

Здесь неоднородная плотность обменной энергии определяется равенством $e_n(x) = \bar{J}(\nabla\sigma_{\mu\nu})^2/2$.

6.4. Симметрия SO(5)

Разложение физической 4×4 матрицы $\hat{g}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \gamma_a(\mathbf{x})\hat{\gamma}_a + \gamma_{ab}(\mathbf{x})\hat{\gamma}_{ab}/2.$$

Здесь базисный набор неприводимых тензорных операторов состоит из пяти 4×4 эрмитовых матриц $\hat{\gamma}_a \equiv (\hat{\gamma}_\mu, \hat{\gamma}_5)$ и десяти эрмитовых матриц $\hat{\gamma}_{ab} \equiv \equiv i[\hat{\gamma}_a, \hat{\gamma}_b]/2$, $a < b$ $(a, b = 1, .., 5)$. Магнитные степени свободы состоят из действительных величин $\gamma_a(\mathbf{x}) = = \mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{\gamma}_a/4$ и $\gamma_{ab}(\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\hat{g}(\mathbf{x})\hat{\gamma}_{ab}/4$. Учитывая алгебраические матричные соотношения:

$$i[\hat{\gamma}_{ab}, \hat{\gamma}_c] = 2(\delta_{ac}\hat{\gamma}_b - \delta_{bc}\hat{\gamma}_a),$$

$$i[\hat{\gamma}_{ab}, \hat{\gamma}_{cd}] = 2(\delta_{ac}\hat{\gamma}_{bd} - \delta_{bc}\hat{\gamma}_{ad} + \delta_{ad}\hat{\gamma}_{cb} - \delta_{bd}\hat{\gamma}_{ca}),$$

а также условия ортогональности и бесследности базисных матриц

$$\mathrm{tr}\hat{\gamma}_a = 0, \quad \mathrm{tr}\hat{\gamma}_{ab} = 0 \quad \mathrm{tr}\hat{\gamma}_a\hat{\gamma}_b = 4\delta_{ab},$$

$$\mathrm{tr}\hat{\gamma}_{ab}\hat{\gamma}_{cd} = 4(\delta_{ac}\delta_{db} - \delta_{cb}\delta_{ad}), \ \mathrm{tr}\hat{\gamma}_a\hat{\gamma}_{bc} = 0,$$

для величин $\gamma_a(\mathbf{x})$, $\gamma_{ab}(\mathbf{x})$ получим скобки Пуассона

$$\{\gamma_a(\mathbf{x}), \gamma_b(\mathbf{x}')\} = -\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\gamma_{ab}(\mathbf{x})/2, \quad \{\gamma_c(\mathbf{x}), \gamma_{ab}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\delta_{ac}\gamma_b(\mathbf{x}) - \delta_{bc}\gamma_a(\mathbf{x})\big)/2,$$

$$\{\gamma_{ab}(\mathbf{x}), \gamma_{cd}(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\big(\delta_{bc}\gamma_{ad}(\mathbf{x}) - \delta_{ac}\gamma_{bd}(\mathbf{x}) + \delta_{bd}\gamma_{ca}(\mathbf{x}) - \delta_{ad}\gamma_{cb}(\mathbf{x})\big)/2.$$

Используя эти соотношения и свойства симметрии плотности обменной энергии

$$\{\Gamma_a, e(\mathbf{x})\} = 0, \{\Gamma_{ab}, e(\mathbf{x})\} = 0,$$

где $\Gamma_a \equiv \int d^3x\gamma_a(\mathbf{x})$, $\Gamma_{ab} \equiv \int d^3x\gamma_{ab}(\mathbf{x})$, приходим к уравнениям динамики магнетиков в рассматриваемом случае

$$\dot{\gamma}_a = 2\bar{J}(\gamma_{ab}\Delta\gamma_b - \gamma_b\Delta\gamma_{ab}),$$

$$\dot{\gamma}_{ab} = 2\bar{J}(\gamma_b\Delta\gamma_a - \gamma_a\Delta\gamma_b + \gamma_{cb}\Delta\gamma_{ac} - \gamma_{ac}\Delta\gamma_{cb}).$$

В этих формулах учтен явный вид плотности неоднородной обменной магнитной энергии (3.8). Частный случай SO(5) симметрии соответствует наличию только интегралов движения Γ_{ab}. Уравнения динамики для плотностей этих интегралов движения, принимая вид обменной неоднородной энергии $e_n = \hat{J}(\nabla\gamma_{ab})^2/2$, имеют вид

$$\dot{\gamma}_{ab} = 2\bar{J}(\gamma_{cb}\Delta\gamma_{ac} - \gamma_{ac}\Delta\gamma_{cb}).$$

Выводы

Дана гамильтонова формулировка нелинейной динамики высокоспиновых магнетиков, которая обобщает теорию Ландау–Лифшица на случай произвольного спина. Наличие двух типов инвариантов Казимира: для алгебры скобок Пуассона магнитных степеней свободы нормальных состояний и расширенной алгебры, описывающей вырожденные состояния, ведет к большому разнообразию моделей обменной энергии и, соответственно, к новым необычным явлениям и процессам. Важную роль в построении динамических уравнений играют унитарные группы симметрии $SU(2s+1)$ и их подгруппы, которые служат математической основой описания различных магнитных фазовых состояний.

Основное внимание статьи уделено динамическим процессам в высокоспиновых магнетиках. Отметим некоторые аспекты описания состояний равновесия этих физических систем. В большинстве работ, исследующих состояния равновесия высокоспиновых магнетиков, рассматривается модельный вид гамильтонианов, отвечающий различным фазовым состояниям. На феноменологической основе дан анализ и предсказаны новые фазовые состояния магнетиков. В виду достаточно большого числа термодинамических параметров, описывающих состояния равновесия, выбор модели гамильтониана изначально модельно зависим. Поскольку состояния магнетиков почти всегда вырождены, основной интерес представляют случаи равновеся со спонтанно нарушенной симметрией. Представляется актуальной классификация состояний равновесия магнетиков с высоким спином на основе идеологии квазисредних и предположения о наличии остаточной симметрии вырожденных состояний. Такой подход не использует конкретный модельный вид обменной энергии или близость к температуре фазового перехода второго рода. Существенными являются только трансформационные свойства параметра порядка относительно преобразований, порождаемых аддитивными интегралами движения, и свойства симметрии гамильтониана. В изучаемых магнетиках имеется несколько возможностей нарушения симметрии состояния равновесия, обусловленных параметрами порядка, которые имеют векторный или тензорный характер. Поэтому анализ состояний равновесия потребует учета сразу нескольких параметров порядка и исследования возможностей их термодинамического сосуществования.

1. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Phys. Z. Sov*. **8**, 155 (1935).
2. M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, and U. Sen, *Adv. Phys.* **56**, 243 (2007).
3. I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys*. **80**, 885 (2008).
4. Ming-Shien Chang, Qishu Qin, Wenxian Zhang, Li You, and Michael S. Chapman, *Nature Phys.* **1**, 111 (2005).
5. R. Barnett, A. Turner, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett*. **97**, 180412 (2006).
6. D.M. Stamper-Kurn and M. Ueda, *Rev. Mod. Phys*. **85**, 1191 (2013).
7. Y. Kawaguchi and M. Ueda, *Phys. Rep.* **520**, 253 (2012).
8. T. Matsumura, S. Nakamura, T. Goto, H. Shida, and T. Suzuki, *Physica B* **223-224**, 385 (1996).
9. D. Hall, Z. Fisk, and R. Goodrich, *Phys. Rev. B* **62**, 84 (2000).
10. S.V. Demishev, A.V. Semeno, A.V. Bogach,Yu.B. Paderno, N.Yu. Shitsevalova, and N.E. Sluchanko, *Physica B* **378**, 602 (2006).
11. M.A. Cazalilla, A.F. Ho, and M. Ueda, *New J. Phys.* **11**, 1 (2009).
12. A. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P.S. Julienne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M.D. Lukin, and A.M. Rey, *Nature Phys.* **6**, 289 (2010).
13. Zi Cai, Hsiang-hsuan Hung, Lei Wang, Dong Zheng, and Congjun Wu, *Phys. Rev. Lett*. **110**, 220401 (2013).
14. M.A. Cazalilla and A.M. Rey, *Rep. Progr. Phys.* **77**, 124401 (2014).
15. M. Guidry, Lian-Ao Wu, Yang Sun, and Cheng-Li Wu, *Phys. Rev. B* **63**, 134516 (2001).
16. E. Demler, W. Hanke, and S.C. Zhang, *Rev. Mod. Phys*. **76**, 909 (2004).
17. L.I. Plimak, C. Weib, R. Walser, and W.P. Schleich, *Optic Commun.* **264**, 311 (2006).
18. K. Kikoin, M. Kiselev, and J. Richert, *Phys. Status Solidi* **9**, 2024 (2009).
19. X.-W. Guan, M.T. Batchelor, and C. Lee, *Rev. Mod. Phys*. **85**, 1633 (2013).
20. S. Taie, Y. Takasu, S. Sugawa, R. Yamazaki, and T. Tsujimoto, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190401 (2010).
21. T.B. Ottenstein, T. Lompe, M. Kohnen, A.N. Wenz, and S. Jochim, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 203202 (2008).
22. G. Pagano, Marco Mancini, Giacomo Cappellini, Pietro Lombardi, Florian Schäfer, Hui Hu, Xia-Ji Liu, Jacopo Catani, Carlo Sias, Massimo Inguscio, and Leonardo Fallani, *Nature Phys.* **10**, 198 (2014).
23. Ф.П. Онуфриева, *ЖЭТФ* **53**(6), 1241 (1981).
24. F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett*. **50**, 1153 (1983).
25. А.Ф. Андреев, И.А. Грищук, *ЖЭТФ* **87**, 467 (1984).
26. В.С. Островский, *ЖЭТФ* **10**, 1690 (1986).
27. N. Papanicolaou, *Nuclear Physics B* **305**, 367 (1988).
28. G. Fath and J. Solyom, *Phys. Rev. B* **51**, 3620 (1995).
29. K. Harada, N. Kawashima, and M. Troyer, *J. Phys. Soc. Jpn*. **76**, 013703 (2007).
30. B.A. Ivanov and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev. B*, **68**, 052401 (2003).
31. Kh.Kh. Muminov and Y. Yousefi, *arXiv:1201.3020v1 [cond-mat.str-el] 14* Jan 2012.
32. А. Исаев, М. Ковалевский, С. Пелетминский, *ФММ* **77**, 20 (1994).
33. J. Bernatska and P. Holod, *J. Phys. A: Math. Theor*. **42**, 075401 (2009).
34. M.Y. Kovalevsky and Tran Quang Vuong, *Phys. Let. A* **374**, 3676 (2010).
35. V.G. Bar'yakhtar, V.I. Butrim, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **87**, 224407 (2013).
36. М.Ю. Ковалевский, *ФНТ* **36**, 1006 (2010) [*Low Temp. Phys*. **36**, 802 (2010)].
37. M.Y. Kovalevsky and A.V. Glushchenko, *Ann. Phys.* **349**, 55 (2014).
38. A.V. Chubukov, *J. Phys.: Condens. Matter* **2**, 1593 (1990).
39. C. Xu, *Phys. Rev. B* **80**, 184407 (2009).
40. C. Wu, J. Hu, and S.-C. Zhang, *Int. J. Modern. Phys*. *B* **24**, 311 (2010).
41. О.А. Космачев, Ю.А. Фридман, Е.Г. Галкина, Б.А. Иванов, *ЖЭТФ* **147**, 320 (2015).
42. А.И. Ахиезер, В.В. Красильников, С.В. Пелетминский, А.А. Яценко, *УФН* **163**, 1 (1993).
43. Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Ленинград, (1975).
44. Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике*, Мир, Москва (1984), т. 2.
45. А. Ахиезер, С. Пелетминский, *Методы статистической физики*, Наука, Москва (1977).
46. L.R. Walker, in: *Magnetism*, G.T. Rado and H. Suhl (eds.), Academic Press, New York (1963), vol. 1, p. 299.
47. И.А. Ахиезер, А.Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 508 (1967).
48. B. Guo and S. Ding, *Landau-Lifshitz Equations*, World Scientific, Singapore (2008).

49. I.D. Mayergoyz, G.Bertotti, and C. Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems*, Elsevier Science, San Diego (2009).
50. M. Lakshmanan, *Philos. Trans. R. Soc. A* **369**, 1280 (2011).
51. А.А. Белавин, А.М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
52. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности, динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
53. Y. Ishimiri, *Prog. Theor. Phys*. **72**, 33 (1984).
54. A.B. Borisov, S.A. Zykov, N.A. Mikushina, and A.S. Moskvin, *Phys. Solid State* **4**, 312 (2002).
55. O.Yu. Gorobets and V.Yu. Gorobets, *Chaos, Soliton and Fractals* **23**, 1121 (2005).
56. И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *ФНТ* **5**, 759 (1979) [*Sov. J. Low Temp. Phys*. **5**, 361 (1979)].
57. D. Vollhardt and P. Wolfle, *The Superfluid Phases of Helium 3, Francis &* Taylor, London-New York-Philadelphia (1990).
58. I.E. Dzyaloshinsii and G.E. Volovick, *Ann. Phys.* **125**, 67 (1980).
59. Д.В. Волков, А.А. Желтухин, Ю.П. Блиох, *ФТТ* **13**, 1668 (1971).
60. D.D. Osheroff, R.C. Richardson, and D.M. Lee, *Phys. Rev. Lett*. **28**, 885 (1972).
61. M. Snoek and Fei Zhou, *Ann. Phys.* **308**, 692 (2003).
62. С. Де Грот, П. Мазур, *Неравновесная термодинамика*, Мир, Москва (1964).
63. Р.Л. Стратанович, *ЖЭТФ* **70**, 1290 (1976).
64. T. Kimura, *Prog. Theor. Phys*. **24**, 386 (1960).
65. M. Gell-Mann and S. Glashow, *Ann. Phys.* **15**, 437 (1961).
66. Ю.П. Степановский, *УФЖ* **11**, 813 (1966).

Unitary symmetry and generalization of Landau–Lifshitz equation for high spin magnets

M.Y. Kovalevsky

The dynamics of magnets with arbitrary spin is described. The relations between the pure and mixed quantum states with magnetic degrees of freedom are considered. Nonlinear dynamic equations of normal and degenerate nonequilibrium states of high spin magnets are obtained. We have analyzed in detail the subalgebras of the Poisson brackets of magnetic values for the cases of magnets with spin $s = 1/2, 1, 3/2$, possessing the properties of $SO(3)$, $SU(3)$, $SU(4)$, $SU(2)\times SU(2)$, $SO(4)$, $SO(5)$ symmetry of the exchange interaction. An explicit form of the polarization density matrix for the spin $s = 1$ and $s = 3/2$ magnets in pure quantum states is derived and a range of permitted values of the magnetic degrees of freedom for mixed states is found.

PACS: **75.10.–b** General theory and models of magnetic ordering.

Keywords: spin, unitary symmetry, dynamics, Poisson brackets.