

# Поляризация пленок He II при движении сверхтекучей компоненты относительно квантованных вихрей

И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина  
E-mail: i.n.adamenko@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2015 г., после переработки 20 января 2016 г., опубликована онлайн 24 февраля 2016 г.

Проведены теоретические исследования электрической активности насыщенной пленки сверхтекучего гелия (He II) при относительном движении нормальной и сверхтекучей компонент в пленке. Вычислен вектор поляризации, обусловленный дипольными моментами квантованных вихревых колец He II в поле силы Ван-дер-Ваальса, с учетом относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент. Получено явное аналитическое выражение для электрической разности потенциалов, возникающей при относительном движении нормальной и сверхтекучей компонент в торсионном осцилляторе. Найденные зависимости разности потенциалов от времени, температуры и относительной скорости движения согласуются с экспериментальными данными.

Проведено теоретичні дослідження електричної активності насиченої плівки надтекучого гелію (He II) при відносному русі нормальної й надтекучої компонент в плівці. Обчислено вектор поляризації, обумовлений дипольними моментами квантованих вихревих кілець He II в полі сили Ван-дер-Ваальса, з урахуванням відносного руху нормальної й надтекучої компонент. Отримано явне аналітичне вираження для електричної різниці потенціалів, що виникає при відносному русі нормальної й надтекучої компонент в торсіонному осциляторі. Знайдені залежності різниці потенціалів від часу, температури і відносної швидкості руху узгоджуються з експериментальними даними.

PACS: 67.25.D– Сверхтекучая фаза;  
67.25.dk Вихри и турбулентность.

Ключевые слова: сверхтекучесть, гелий, вихри, поляризация, электрическое поле.

## 1. Введение

В экспериментах [1,2] наблюдалась электрическая активность сверхтекучего гелия (He II). Это необычное явление заключалось в том, что в стоячей волне второго звука [1] или при колебательном движении пленки He II [2] возникала электрическая разность потенциалов. При этом в нормальном состоянии гелия, а также в волне первого звука, возникновение электрической разности потенциалов не наблюдалось. Наличие движения сверхтекучей компоненты He II относительно нормальной в волне второго звука [1] и при колебательном движении пленки гелия [2] позволяет предполагать, что возникновение электрической разности потенциалов непосредственно связано со сверхтекучими свойствами гелия.

Результаты экспериментов [1,2] инициировали появление ряда теоретических работ, в которых исследовались электромагнитные свойства сверхтекучего гелия (см., например, работы [3–14] и цитируемую в них

литературу). В итоге была получена новая важная информация об электромагнитных свойствах He II, которая имеет несомненную научную ценность.

Между тем эти теоретические работы не давали последовательного и непротиворечивого объяснения явлений, наблюдаемых в экспериментах [1,2]. Так, согласно одним работам, такие же электрические явления должны наблюдаться и в нормальном гелии, а из других работ следовало, что они должны быть и в первом звуке. Это противоречило результатам экспериментов. Кроме того, в некоторых из этих работ авторы исходили из необычных предположений об экзотических электрических свойствах He II, которые никак не обосновывались.

Новый подход для объяснения результатов экспериментов [1] предложен в работе [15]. В ней было показано, что относительное движение нормальной и сверхтекучей компонент в волне второго звука приводит к возникновению разности потенциалов, обусловленной электрическими свойствами квантованных вихрей. В изотропном и однородном He II электрические свойства кванто-

ванных вихрей не приводят к возникновению разности потенциалов. В волне второго звука возникает анизотропия, обусловленная разностью скоростей нормальной и сверхтекучей компонент. Как показано в [15], эта анизотропия и электрические свойства квантованных вихрей приводят к возникновению разности потенциалов в волне второго звука.

В настоящей работе показано, что описанный выше подход позволяет предложить возможное объяснение явлений, наблюдаемых в экспериментах [2], в которых с помощью методики торсионного осциллятора исследовался электрический отклик в колеблющейся пленке He II. В итоге найден вектор поляризации, возникающий при колебаниях пленки He II в поле силы Ван-дер-Ваальса. Показано, что колебания квантованных вихрей, увлекаемых стенкой торсионного осциллятора, приводят к появлению переменной во времени электрической разности потенциалов, обусловленной найденным вектором поляризации.

## 2. Термодинамические свойства и поляризация квантованных вихревых колец в поле силы Ван-дер-Ваальса

Квазичастицы сверхтекучего гелия (He II) — фононы, ротоны и квантованные вихревые кольца (КВК) — образуют нормальную компоненту сверхтекучего гелия, которая может двигаться со скоростью  $\mathbf{v}_n$ , отличной от скорости движения сверхтекучей компоненты  $\mathbf{v}_s$ . Двухскоростная гидродинамика He II приводит к тому, что термодинамика He II содержит относительную скорость  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  движения нормальной и сверхтекучей компонент.

Свойства вихрей описаны в учебниках, монографиях, многочисленных статьях (см., например, [16–20] и цитируемую там литературу) и достаточно хорошо определены из экспериментов и теории. Энергия КВК  $\varepsilon$  — изотропная функция его импульса  $p$ , когда отсутствует относительное движение нормальной и сверхтекучей компонент. Связь между  $\varepsilon$  и  $p$  задается параметрически равенствами

$$\varepsilon = \frac{2\pi^2 n_0 \hbar^2}{m} r_c \left( \ln \frac{8r_c}{r_0} - 2 \right), \quad p = 2\pi^2 n_0 \hbar r_c^2, \quad (1)$$

где  $n_0 = 2,17 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$  — атомная плотность  $^4\text{He}$ ,  $m = 6,69 \cdot 10^{-24} \text{ г}$  — масса атома  $^4\text{He}$ ,  $r_c$  — радиус КВК,  $r_0 = 0,4 \text{ \AA}$  — радиус ствола вихря. Импульс КВК  $\mathbf{p}$  направлен перпендикулярно плоскости КВК. В соответствии с общими принципами механики скорость движения КВК дается производной от гамильтониана кольца  $\varepsilon$  по его импульсу  $p$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\hbar}{2r_c m} \left( \ln \frac{8r_c}{r_0} - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathbf{p}}{p}. \quad (2)$$

Квазичастицы КВК являются тепловыми возбуждениями He II, т.е. их число зависит от температуры и, следовательно, не сохраняется. Они подчиняются распределению Бозе–Эйнштейна

$$n_B(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\varepsilon/(k_B T)} - 1}, \quad (3)$$

в котором химический потенциал положен равным нулю. Количество квантованных вихревых колец  $n_v$  в единице объема определяется интегралом от функции распределения (3) по фазовому пространству:

$$n_v = \int n_B(\varepsilon(r_c)) \frac{d^3 p(r_c)}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (4)$$

В этот интеграл основной вклад, согласно (1), дают КВК с минимально возможным радиусом  $r_{0c}$ . Из теории и экспериментов (см. [16] и цитируемую там литературу) следует, что энергетический спектр КВК ограничен значениями  $r_c \geq r_{0c} = 2,5 \text{ \AA}$ . Согласно (1), КВК с минимальным радиусом  $r_{0c}$  имеет минимальные значения энергии  $\varepsilon_0$  и импульса  $p_0$ , численные величины которых

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1,785 \cdot 10^{-15} \text{ эрг} \approx 12,9 \text{ К}, \\ p_0 &= 2,68 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с} = 2,68 \text{ \AA}^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно (5), при всех вычислениях можно исходить не из распределения Бозе (3), а из распределения Больцмана

$$n(\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}, \quad (6)$$

поскольку во всей области температур  $T < T_\lambda = 2,17 \text{ К}$  отношение  $\varepsilon/(k_B T) \gg 1$ .

Интегрирование в (4) с функцией распределения (6) дает

$$n_v = 8\pi \left( \frac{p_0}{2\pi\hbar} \right)^3 \frac{k_B T}{\varepsilon_0} e^{-\frac{\varepsilon_0}{k_B T}} g(T), \quad (7)$$

где  $g(T)$  — безразмерная функция температуры, определенная в [16], численное значение которой при  $T \leq 2 \text{ К}$  слабо зависит от температуры, увеличиваясь от 0,5 при  $T = 0 \text{ К}$  до 0,7 при  $T = 2 \text{ К}$ .

Согласно (6) и (7), подавляющее число тепловых КВК имеет минимальный радиус  $r_{0c} = 2,5 \text{ \AA}$ , который меньше межатомного расстояния  $a_0 = n_0^{-1/3} = 3,58 \text{ \AA}$ . Такая ситуация, как отмечалось в работе [21], возможна только в квантовой жидкости, которой является He II. В квантовой жидкости длина волны де Бройля атома в несколько раз больше межатомного расстояния, что приводит к делокализации атомов. Это обстоятельство дает возможность в квантовой жидкости

пользоваться параметрами сплошной среды на любых расстояниях, включая математическую точку, и рассматривать объекты с размерами меньше межатомных.

При наличии скорости  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент КВК описываются функцией распределения

$$n(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{w}) = e^{-\frac{\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{w}}{k_B T}}. \quad (8)$$

Для теории, развитой в [15] и в настоящей работе, важно то, что, в отличие от классических частиц, анизотропию функции распределения (8) квазичастиц нельзя ликвидировать путем перехода в какую-либо другую движущуюся систему координат, поскольку при этом не меняется  $\mathbf{w}$ . В связи с этим можно говорить об абсолютности анизотропии функции распределения (8) квазичастиц, обусловленной  $\mathbf{w}$ .

На поверхности твердого тела (стенке), соприкасающейся с насыщенными парами гелия, образуется пленка сверхтекучего гелия толщиной  $H \approx 400 \text{ \AA}$ . Сильное неравенство  $H \gg r_{0c}$  позволяет предположить, что в насыщенных пленках, как и в объемном гелии, существуют тепловые КВК. При этом сила Ван-дер-Ваальса поляризует атомы гелия. Это приводит к возникновению дипольного момента у КВК, который вычисляется ниже.

Отметим, что наряду с тепловыми КВК в пленке могут существовать также вихри другой структуры и природы. Из приведенных ниже расчетов следует, что они, как и тепловые КВК, должны обладать дипольным моментом и давать аддитивный вклад в плотность дипольного момента, которая вычисляется в данной работе с учетом только тепловых КВК. Это ограничение не принципиально для физики рассматриваемого здесь явления.

Согласно работам [22–24], дипольный момент атома  $^4\text{He}$ , обусловленный силой Ван-дер-Ваальса, которая определяется взаимодействием атома с плоской поверхностью металла, равен

$$\mathbf{d}^{(V)} = D_4 |e| \frac{a_B^5}{z^4} \mathbf{i}_z. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{i}_z$  — орт, перпендикулярный поверхности металла и направленный в гелий,  $a_B = 0,529 \text{ \AA}$  — первый боровский радиус,  $z$  — расстояние от поверхности металла,  $e$  — заряд электрона,

$$D_4 = 2 \frac{R_y}{5\Delta E} \frac{\hbar\omega_{pl}}{\hbar\omega_{pl} + \sqrt{2}\Delta E} \left\langle \frac{r^4}{a_B^4} \right\rangle, \quad (10)$$

где  $\omega_{pl}$  — плазменная частота металла,  $\Delta E = 24,58 \text{ эВ}$  — средняя энергия возбуждения атома  $^4\text{He}$ ,  $R_y = e^2/2a_B = 13,6 \text{ эВ}$ ,  $\left\langle \frac{r^4}{a_B^4} \right\rangle = 3,97$ .

Для латуни — материала, который использовался в экспериментах [2], — численное значение плазменной частоты  $\omega_{pl} = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ . В этом случае численное значение в единицах CGSE дипольного момента атома  $^4\text{He}$  в поле силы Ван-дер-Ваальса дается равенством

$$\mathbf{d}^{(V)} = 4,11 \cdot 10^{-52} \frac{1}{z^4} \mathbf{i}_z. \quad (11)$$

Для атомов, ближайших к поверхности металла, дипольный момент меньше (11), поскольку на эти атомы помимо металлической подложки, на которой они находятся, действуют еще и нескомпенсированные силы Ван-дер-Ваальса со стороны соседних атомов  $^4\text{He}$ . Как известно [25], атомы  $^4\text{He}$ , находящиеся на металлической подложке, образуют твердый слой гелия, толщина которого  $z_s$ . Нас интересует дипольный момент атомов  $^4\text{He}$ , находящихся на расстояниях  $z > z_s$ , где гелий — жидкий, сверхтекучий и допускает существование КВК. На таких расстояниях у атома возникает дополнительная к (11) так называемая флексоэлектрическая поляризация [19], которая обусловлена градиентом плотности жидкости, вызванным действием силы Ван-дер-Ваальса.

Атом  $^4\text{He}$  не имеет в основном состоянии каких-либо мультипольных моментов. Однако если два атома  $^4\text{He}$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга, то за счет их взаимодействия на каждом из этих атомов возникает дипольный момент  $\mathbf{d}_R$ , который, согласно [11,26,27], равен

$$\mathbf{d}_R = -D_7 |e| \frac{a_B^8}{R^7} \mathbf{j}, \quad (12)$$

где константа  $D_7 = 25$ , а  $\mathbf{j} = \mathbf{R}/R$  — орт, направленный к соседнему атому. При этом электронное облако каждого из двух атомов  $^4\text{He}$  смещается к соседнему атому. Поскольку дипольный момент, по определению, направлен от центра отрицательных зарядов к центру положительных зарядов,  $\mathbf{d}_R$  каждого из двух атомов направлен от соседнего атома. Такое направление  $\mathbf{d}_R$  задается знаком минус в правой части выражения (12), в то время как  $\mathbf{j}$  направлен к соседнему атому. Отметим, что формула (12) справедлива, когда  $R$  много больше радиуса электронной оболочки атома.

Если  $R$  равно межатомному расстоянию  $l$ , то, согласно (12), для  $\mathbf{d}_l = \mathbf{d}_R(R=l)$  имеем

$$\mathbf{d}_l = -d_l(l) \mathbf{j}, \quad \text{где } d_l(l) = D_7 |e| \frac{a_B^8}{l^7}. \quad (13)$$

Когда все атомы находятся на одинаковом расстоянии  $a_0$  друг от друга, взаимодействия атомов компенсируются, и суммарный дипольный момент каждого атома, обусловленный флексоэлектрической поляризацией, равен нулю. Если же  $l(\mathbf{r}) = a_0 + l'(\mathbf{r})$ , то у атома возникает

нескомпенсированный дипольный момент  $\mathbf{d}^{(f)}$ , который при малом  $|l'(\mathbf{r})|$ , исходя из (13), запишем в виде

$$\mathbf{d}^{(f)} = -a_0 \nabla_{l'} l(\mathbf{r}) = -a_0 \left. \frac{\partial d_l}{\partial l} \right|_{l=a_0} \nabla l(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Учитывая (13), равенство  $l(\mathbf{r}) = n^{-1/3}(\mathbf{r})$  и соотношение  $\rho(\mathbf{r}) = mn(\mathbf{r})$ , выражение (14) представим в виде

$$\mathbf{d}^{(f)} = -\frac{7}{3} d_0 \frac{a_0^4}{m} \nabla \rho(\mathbf{r}), \quad (15)$$

где  $d_0 = D_7 |e| a_B^8 / a_0^7$ , численное значение которого  $d_0 = (2,03 \cdot 10^{-13} \text{ см}) |e|$ .

Градиент плотности, содержащийся в (15), находится из условия гидростатического равновесия, которое дает

$$\nabla \rho = \frac{\rho}{c_1^2 m} \mathbf{F}^{(V)}, \quad (16)$$

где  $c_1$  — скорость первого звука в жидком гелии,  $\mathbf{F}^{(V)}$  — сила Ван-дер-Ваальса.

Сила  $\mathbf{F}^{(V)}$  для случая медной подложки получена в [28], где отмечалось, что найденный там численный коэффициент не может претендовать на точное значение. В связи с этим получим силу  $\mathbf{F}^{(V)}$  исходя из дипольного момента (9), (11), который возникает за счет действия этой силы на отдельный атом  ${}^4\text{He}$ , находящийся на расстоянии  $z$  от металлической подложки. Такой подход даст согласованное с формулами (9), (11) значение  $\mathbf{F}^{(V)}$ , которое сопоставим с полученным в [28].

С этой целью, следуя схеме работы [18], начнем с рассмотрения ситуации, когда атом  ${}^4\text{He}$  находится далеко от стенки во внешнем электрическом поле  $\mathbf{E}$ , под действием которого у атома возникает дипольный момент

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{E}, \quad (17)$$

где  $\alpha = 2,1 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$  — коэффициент электрической поляризации атома  ${}^4\text{He}$ .

Дипольный момент атома  $\mathbf{d}$ , связанный со смещением  $\mathbf{u}$  центра заряда электронной оболочки атома относительно его ядра, определяется равенством

$$\mathbf{d} = Z |e| \mathbf{u}, \quad (18)$$

где  $Z$  — число электронов в атоме  ${}^4\text{He}$ , которое равно числу протонов в ядре.

Связь между приложенной к ядру силой  $Z |e| \mathbf{E}$  и вектором смещения  $\mathbf{u}$  дается законом Гука

$$Z |e| \mathbf{E} = \beta \mathbf{u}, \quad (19)$$

где  $\beta$  — коэффициент упругости для силовой связи ядра с электронной оболочкой.

Из равенств (17)–(19) следует связь между коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\beta = \frac{(Ze)^2}{\alpha}. \quad (20)$$

В диэлектрической жидкости контактное взаимодействие атомов друг с другом и внешними телами происходит за счет движения электронных оболочек атомов. При этом положение атомного ядра относительно электронной оболочки определяется балансом действующих на ядро сил.

Пусть к электронной оболочке приложена сила  $\mathbf{F}$ , которая смещает тяжелое ядро атома относительно центра на вектор  $\mathbf{u}$ . Тогда, согласно закону Гука,

$$\mathbf{F} = -\beta \mathbf{u}. \quad (21)$$

Из равенств (18), (20) и (21) следует выражение

$$\mathbf{F}^{(V)} = -\frac{Z |e|}{\alpha} \mathbf{d}^{(V)}, \quad (22)$$

в котором  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{F}$  заменили соответственно на  $\mathbf{d}^{(V)}$  и  $\mathbf{F}^{(V)}$ . Подставляя в (22) численные значения всех величин, получаем

$$\mathbf{F}^{(V)} = -18,8 \cdot 10^{-37} \frac{1}{z^4} \mathbf{i}_z. \quad (23)$$

Численный коэффициент, содержащийся в (23), значительно отличается от коэффициента, приведенного в работе [28], в которой он был равен  $-15,9 \cdot 10^{-37}$ . При всех дальнейших расчетах будем исходить из результата (23).

Из равенств (15), (16) и (22) для дипольного момента атома  $\mathbf{d}^{(f)}$ , обусловленного флексоэлектрической поляризацией, окончательно имеем

$$\mathbf{d}^{(f)} = \frac{7d_0 a_0 Z |e|}{3c_1^2 m \alpha} \mathbf{d}^{(V)}. \quad (24)$$

Подставляя в выражение (24) численные значения параметров, получаем

$$\mathbf{d}^{(f)} = 9,82 \mathbf{d}^{(V)}. \quad (25)$$

Согласно (25), дипольный момент, обусловленный флексоэлектрической поляризацией, в 9,82 раза больше дипольного момента  $\mathbf{d}^{(V)}$ , вызванного прямым воздействием металлической подложки на изолированный атом  ${}^4\text{He}$ . Полный дипольный момент атома равен сумме дипольных моментов

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}^{(f)} + \mathbf{d}^{(V)} = \left( 1 + \frac{7d_0 a_0 Z |e|}{3c_1^2 m \alpha} \right) \mathbf{d}^{(V)}, \quad (26)$$

численное значение которого в единицах CGSE, согласно (11) и (26), равно

$$\mathbf{d}_a = 4,45 \cdot 10^{-51} \frac{1}{z^4} \mathbf{i}_z. \quad (27)$$

Чтобы найти дипольный момент вихревого кольца, зная дипольный момент атома, нужно, как в работе [18], определить интегральную атомную дилатацию

КВК, которая равна полному количеству атомов  $^4\text{He}$ , вытесненных вихревым кольцом с радиусом  $r_{0c}$ . В итоге для дипольного момента КВК в поле силы Ван-дер-Ваальса получаем

$$\mathbf{d}_c = -N_c \mathbf{d}_a, \quad (28)$$

где  $N_c = 4\pi^2 n_0 r_{0c} r_0^2 \ln(r_{0c}/r_0)$  — интегральная атомная дилатация КВК с радиусом  $r_{0c}$ . Согласно (11) и (28), численное значение в единицах CGSE дипольного момента КВК вблизи стенки равно

$$\mathbf{d}_c = -2,79 \cdot 10^{-51} \frac{1}{z^4} \mathbf{i}_z. \quad (29)$$

Как видно из этого соотношения, дипольный момент КВК, обусловленный наличием силы взаимодействия со стенкой, существенно зависит от расстояния до стенки и направлен к стенке. При этом относительно малая величина  $r_{0c} = 2,5 \text{ \AA}$  позволяет использовать локальные значения силы Ван-дер-Ваальса.

В тонких пленках сверхтекучего гелия нормальная компонента He II, содержащая наряду с фононами, ротонами и КВК, как всякая вязкая жидкость, прилипает к стенке, на которой находится пленка. При движении стенки со скоростью  $\mathbf{v}_n$  нормальная компонента, в отличие от сверхтекучей, движется с той же скоростью  $\mathbf{v}_n$ . В итоге возникает скорость относительного движения  $\mathbf{w}$  нормальной и сверхтекучей компонент. В этом случае вектор поляризации He II (плотность дипольного момента) при наличии  $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  по определению равен

$$\mathbf{P}_c = \int \mathbf{d}_c n(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{w}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (30)$$

Разлагая вектор поляризации в ряд по  $\mathbf{w}$  с точностью до квадратичных членов, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_c = & \int \mathbf{d}_c n(\varepsilon) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} - \int \mathbf{d}_c \frac{\partial n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} (\mathbf{p}\mathbf{w}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} + \\ & + \frac{1}{2} \int \mathbf{d}_c \frac{\partial^2 n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} (\mathbf{p}\mathbf{w})^2 \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (31)$$

Первый интеграл в (31) не дает вклад в поляризацию, обусловленную наличием относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент He II. Он описывает фон, который далее не будет учитываться. Вторым интегралом в (31) линейно зависит от  $\mathbf{w}$ . Этот интеграл обращается в нуль в силу нечетности подынтегральной функции по импульсу. Тогда искомым вектором поляризации, обусловленный относительной скоростью  $\mathbf{w}$ , дается третьим интегралом в (31), взяв который, получаем

$$\mathbf{P}_w(z) = \frac{1}{6} \left( \frac{w}{v_T} \right)^2 n_v \mathbf{d}_c(z), \quad (32)$$

где  $v_T = k_B T / p_0$  — температурная скорость КВК с минимальными размерами  $r_{0c}$  и импульсом  $p_0$ .

Результат (32) имеет простой физический смысл. При наличии  $\mathbf{w}$  на равновесном фоне, который описывается первым интегралом в (31), возникает дополнительная поляризация, равная 1/6 квадрата безразмерного параметра анизотропии  $w/v_T$ , умноженного на плотность дипольного момента  $n_v \mathbf{d}_c$ , обусловленного КВК. Отметим квадратичную зависимость вектора поляризации (32) от скорости относительного движения  $\mathbf{w}$  нормальной и сверхтекучей компонент. Такой результат находится в полном соответствии с результатами эксперимента [2]. Сопоставлению развитой здесь теории с экспериментом посвящен следующий раздел работы.

### 3. Сопоставление теории с экспериментальными исследованиями торсионных колебаний пленок He II

В экспериментах [2] электрическая активность сверхтекучего гелия исследовалась методом торсионного осциллятора. Составные части торсионного осциллятора — два коаксиальных металлических цилиндра. Радиусы внешнего и внутреннего цилиндров соответственно равны  $r_2 = 0,5 \text{ см}$  и  $r_1 = 0,01 \text{ см}$ . Внешний и внутренний цилиндры торсионного осциллятора образуют цилиндрический конденсатор. Внешний цилиндр заземлен. Внутренний цилиндр изолирован от внешнего. Внешний цилиндр может совершать торсионные колебания. Внутренний цилиндр неподвижен. Внутренняя поверхность внешнего цилиндра и внешняя поверхность внутреннего цилиндра были покрыты насыщенной пленкой сверхтекучего гелия толщиной  $H \approx 400 \text{ \AA}$ .

Электрическая активность гелия при различных температурах и амплитудах колебания внешнего цилиндра изучалась путем определения разницы потенциалов  $\varphi$  между колеблющимся с частотой  $\omega$  внешним цилиндром и неподвижным внутренним цилиндром. Установлено, что, например, при  $T = 2,02 \text{ К}$  и амплитуде скорости движения внешнего цилиндра  $v_A = 744 \text{ мкм/с}$  амплитуда разности потенциалов  $\varphi_A = 148 \text{ нВ}$ . При  $T = 1,86 \text{ К}$  и  $v_A = 764 \text{ мкм/с}$  амплитуда  $\varphi_A = 100 \text{ нВ}$ , а при  $T = 1,78 \text{ К}$  и  $v_A = 812 \text{ мкм/с}$  —  $\varphi_A = 82 \text{ нВ}$ . Измерения проводились для трех серий различных значений сил раскачки внешнего цилиндра. При сопоставлении развитой здесь теории с экспериментом ниже будет рассмотрена одна из этих серий, для которой в работе [2] приведено наибольшее количество экспериментальных точек.

В экспериментах [2] амплитуда скорости движения внешнего цилиндра  $v_A$  была разной при различных тем-

пературах. На рис. 1 изображены амплитудные значения скорости для различных температур, которые получены исходя из экспериментальных данных работы [2].

Нормальная компонента пленки сверхтекучего гелия движется вместе с колеблющимся внешним цилиндром торсионного осциллятора со скоростью  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_A \cos \omega t$ . В экспериментах [2] в пленке He II, находящейся на внутренней поверхности внешнего цилиндра, наблюдалось спонтанное появление циркулирующего кругового потока сверхтекучей компоненты с постоянной скоростью  $v_{s0}$ . Тогда скорость относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент He II равна

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_A \cos \omega t - \mathbf{v}_{s0}. \quad (33)$$

Численное значение  $v_{s0}$  в работе [2] не установлено.

Согласно развитой в разд. 2 теории, при наличии скорости  $\mathbf{w}$  относительного движения (33) на равновесном фоне возникает периодически меняющаяся со временем динамическая поляризация пленки He II, которая описывается вектором (32). Как отмечалось в работе [2], динамическая поляризация пленки He II приводит к появлению на металлических поверхностях цилиндрического конденсатора зарядов, вызывающих возникновение разности потенциалов  $\phi$  между внешним и внутренним цилиндрами, которая регистрируется в экспериментах [2].

Соотношения (32) и (33) позволяют найти зависимость от времени разности потенциалов  $\phi_w$ , обусловленной скоростью относительного движения  $\mathbf{w}$ :

$$\phi_w(t) = AP_w(t) = A_1 v_A^2 \left( \cos(\omega t + \gamma) - \frac{v_{s0}}{v_A} \right)^2, \quad (34)$$

где  $A$  и  $A_1$  — коэффициенты пропорциональности, не зависящие от времени и скорости,  $P_w(t)$  — модуль вектора (32), а фаза  $\gamma$  определяется направлением вектора  $\mathbf{v}_{s0}$  относительно вектора  $\mathbf{v}_A$ . Если векторы  $\mathbf{v}_{s0}$  и  $\mathbf{v}_A$  параллельны, то  $\gamma = 0$ , а если антипараллельны, то  $\gamma = \pi$ .

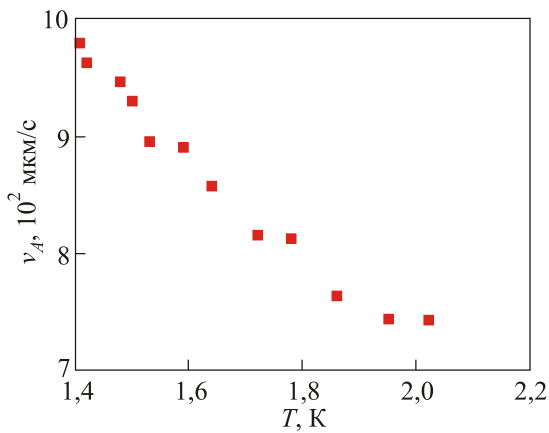


Рис. 1. Температурная зависимость амплитуды скорости движения внешнего цилиндра торсионного осциллятора.

Из сопоставления формулы (34) с записью формы сигнала с экрана осциллографа, приведенной в работе [2], следует, что  $v_{s0} = 0,128 v_A$ . С учетом этого численного значения на рис. 2(а), исходя из формулы (34), представлен график зависимости  $\phi_w(t)$  при  $\gamma = 0$  и условии, что  $A_1 > 0$ . Положительность функции  $\phi_w$  следует из выполненных ниже расчетов. На рис. 2(б) показан график функции  $\cos \omega t$ . График, изображенный на рис. 2(а), с точностью до знака совпадает с записями формы сигнала с экрана осциллографа [2], где приведена функция  $-\phi_w(t)$ . Наблюдаемый в [2] на осциллографе знак функции  $\phi_w(t)$  зависит от способа подключения измерительной аппаратуры.

Отметим квадратичную зависимость потенциала (34) от скорости  $v_A$ . Этот результат согласуется с наблюдаемой квадратичной зависимостью, приведенной в работе [2].

Перейдем к получению явного вида коэффициентов пропорциональности  $A$  и  $A_1$ , содержащихся в формуле (34). Пленка гелия — поляризованный диэлектрик с плотностью связанных зарядов  $\rho_w$ , обусловленной скоростью (33) относительного движения  $\mathbf{w}$ . Соотношение между плотностью связанных зарядов  $\rho_w$  и вектором поляризации  $\mathbf{P}_w$  дается общеизвестным равенством

$$\rho_w = -\text{div } \mathbf{P}_w. \quad (35)$$

Интегрируя выражения (35) по объему, содержащему поверхность пленки, примыкающей к металлу, и устрем-

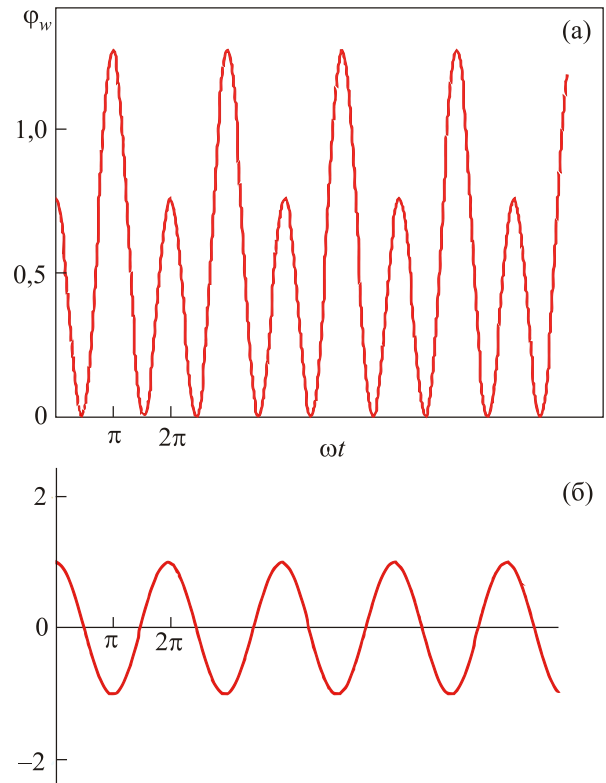


Рис. 2. (а) График зависимости функции  $\phi_w$  (34) от времени; (б) график функции  $\cos \omega t$ .

ля к нулю объемы левой и правой областей, прилегающих к поверхности пленки, получаем

$$\sigma_w = P_w(z = z_{\min}), \quad (36)$$

где  $\sigma_w$  — плотность заряда на поверхности пленки, примыкающей к металлу внешнего цилиндра,  $z_{\min}$  — расстояние от этой поверхности до металла. Ясно, что  $z_{\min}$  будет близко к межатомному расстоянию в гелии. Напомним, что, согласно [21], пленка квантовой жидкости может быть описана методами механики сплошных сред на любых расстояниях, включая математическую точку. Поскольку, согласно (9), (26)–(29) и (32), вектор  $\mathbf{P}_w$  направлен к поверхности металла,  $\sigma_w > 0$ .

Плотность положительного заряда  $\sigma_w(t)$ , генерируемая на поверхности пленки с частотой  $\omega$ , на примыкающей к пленке поверхности металла будет индуцировать отрицательный заряд с поверхностной плотностью  $-\sigma_w(t)$ .

Для получения электрического потенциала во всем пространстве следует исходить из уравнения

$$\Delta\phi = -4\pi\rho_c, \quad (37)$$

где  $\rho_c$  — плотность связанных зарядов, которая в пленке находится из равенства (35), имеет дельтаобразные зависимости на поверхностях  $r = r_2$  и  $r = r_1$  и равна нулю в остальных частях пространства. Решая уравнение (37) с граничными условиями

$$\phi(r \geq r_2) = 0, \quad \phi(r \leq r_1) = \phi_w, \quad (38)$$

найдем потенциал  $\phi$  в пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора. Опуская слагаемые, которые содержат малые параметры  $z_{\min}/H \ll 1$  и  $H/r_2 \ll 1$ , для разности потенциалов имеем

$$\phi_w = 4\pi r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) P_w(z = z_{\min}). \quad (39)$$

Подставляя в (39) выражения (32) и (33), окончательно получаем

$$\phi_w = \frac{4\pi}{6} r_2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) n_v d_c(z_{\min}) \left(\frac{v_A}{v_T}\right)^2 \left(\cos(\omega t + \gamma) - \frac{v_{s0}}{v_A}\right)^2. \quad (40)$$

Из общих соображений следует, что содержащаяся в (40) величина  $z_{\min}$  близка к межатомному расстоянию  $a_0$  в He II. Численное значение  $z_{\min}$  можно найти, сопоставляя расчетное значение по формуле (40) с экспериментальными данными работы [2]. В работе [2] при  $T = 1,95$  К и скорости  $v_A = 744$  мкм/с амплитудное значение разности потенциалов  $\phi_A$  оказалось равным 122 нВ. Формула (40) дает тот же результат при  $z_{\min} = 2,21a_0$ .

На рис. 3 по формуле (40) построена температурная зависимость амплитуды разности потенциалов  $\phi_{wA}$  при  $z_{\min} = 2,21a_0$  и  $v_{s0} = 0,128v_A$ . Значения  $v_A$  при разных температурах брались исходя из данных, приведенных на рис. 1. Для сравнения на рис. 3 нанесены также экспериментальные значения работы [2].

Согласно рис. 3, при  $T > 1,8$  К расчетные и экспериментальные значения практически совпадают. При  $T < 1,8$  К расчетные значения оказываются меньше экспериментальных. С понижением температуры разница между расчетными и экспериментальными значениями увеличивается так, что при  $T = 1,4$  К расчетное значение меньше экспериментального в три раза.

Наблюдаемое на рис. 3 расхождение экспериментальных и расчетных значений при  $T > 1,8$  К, по-видимому, связано с тем, что в теории учитываются только тепловые квантованные вихревые кольца, плотность числа которых  $n_v$ , согласно (7), экспоненциально уменьшается с понижением температуры. Вычисления по формуле (7) дают следующие численные значения:

$$\begin{aligned} n_v(T = 2,0 \text{ К}) &= 3,28 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}; \\ n_v(T = 1,8 \text{ К}) &= 1,45 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}; \\ n_v(T = 1,6 \text{ К}) &= 5,31 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}; \\ n_v(T = 1,4 \text{ К}) &= 1,46 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}. \end{aligned}$$

Очевидно, что помимо тепловых квантованных вихревых колец в пленке He II есть нетепловые квантованные вихри другой структуры и природы. Из приведенных выше расчетов следует, что эти вихри также будут обладать дипольным моментом в поле силы Ван-дер-Ваальса и дадут аддитивный вклад в потенциал  $\phi_w$ . Согласно рис. 3 и приведенным выше численным значениям  $n_v(T)$ , эффективная плотность числа нетепловых вихрей должна быть близкой к  $2,4 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ .

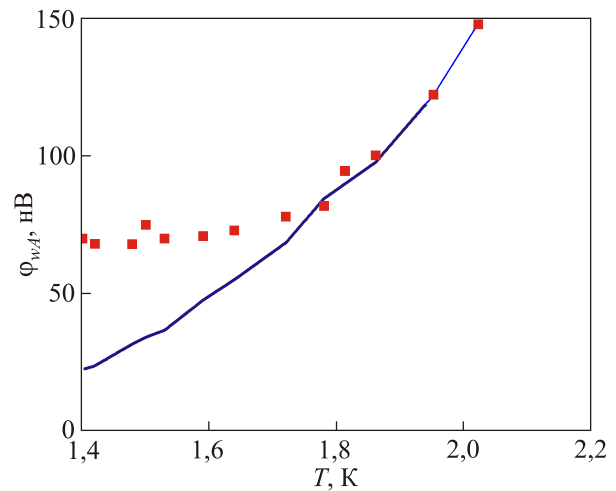


Рис. 3. Сплошная кривая — температурная зависимость амплитуды разности потенциала  $\phi_{wA}$ , полученная по формуле (40); (■) — экспериментальные данные работы [2].

#### 4. Заключение

Проведены теоретические исследования электрической активности пленки сверхтекучего гелия при относительном движении нормальной и сверхтекучей компонент. Перечислим основные результаты работы.

1. Вычислен вектор поляризации (32), обусловленный дипольными моментами квантованных вихревых колец в поле силы Ван-дер-Ваальса при относительном движении нормальной и сверхтекучей компонент He II.

2. Получено явное аналитическое выражение (40) для электрической разности потенциалов, возникающей при относительном движении нормальной и сверхтекучей компонент He II в торсионном осцилляторе.

3. Найдена временная зависимость разности потенциалов (рис. 2), которая с учетом правильного знака совпадает с наблюдаемой в [2].

4. Получена квадратичная зависимость разности потенциалов от скорости движения нормальной компоненты He II (40), совпадающая с наблюдаемой в работе [2].

5. Определена температурная зависимость разности потенциалов (рис. 3), которая совпадает с экспериментальной [2] для температур  $T > 1,8$  К.

Расхождение между расчетной зависимостью (40) и наблюдаемой в [2] в области температур  $T < 1,8$  К дало возможность оценить эффективную плотность числа нетепловых вихрей в пленке He II.

Согласие результатов развитой здесь теории с экспериментальными данными [2] позволяет надеяться, что предложенная в настоящей работе теоретическая модель адекватно описывает наблюдаемую электрическую активность He II.

Авторы выражают благодарность А.С. Рыбалко за предоставление численных значений экспериментальных данных, а также за многократные полезные обсуждения его экспериментов.

1. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
2. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 623 (2005)].
3. А.М. Косевич, *ФНТ* **31**, 50 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 37 (2005)].
4. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 559 (2007).
5. Э.А. Пашицкий, С.М. Рябченко, *ФНТ* **33**, 12 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 8 (2007)].
6. В.М. Локтев, М.Д. Томченко, *ФНТ* **34**, 337 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 262 (2008)].
7. Е.Д. Гутлянский, *ФНТ* **35**, 956 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 748 (2009)].
8. Э.А. Пашицкий, А.А. Гуринов, *ЖЭТФ* **138**, 1103 (2010).
9. V.P. Mineev, *J. Low Temp. Phys.* **162**, 686 (2011).
10. Ю.М. Полуэктов, *ФНТ* **40**, 1021 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 796 (2014)].
11. В.М. Локтев, М.Д. Томченко, *Доп. НАН Украины* №5, 76 (2010).

12. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
13. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
14. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **38**, 1147 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 905 (2012)].
15. И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко, *ФНТ* **41**, 635 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 495 (2015)].
16. М.Д. Томченко, *ФНТ* **31**, 483 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 365 (2005)].
17. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 915 (2005)].
18. В.Д. Нацик, *ФНТ* **33**, 1319 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 999 (2007)].
19. В.Д. Нацик, *ФНТ* **34**, 625 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 493 (2008)].
20. S.K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
21. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, and I.V. Tanatarov, *Phys. Rev. B* **67**, 104513 (2003).
22. B. Linder and R.A. Kromhout, *Phys. Rev. B* **13**, 1532 (1976).
23. М.Д. Томченко, *Доп. НАН України* №1, 64 (2011).
24. М.Д. Томченко, *Phys. Rev. B* **83**, 094512 (2011).
25. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
26. W. Byers Brown and D.M. Whisnant, *Mol. Phys.* **25**, 1385 (1973).
27. D.M. Whisnant and W. Byers Brown, *Mol. Phys.* **26**, 1105 (1973).
28. S. Franchetti, *Nuovo Cimento IV*, №6, 1504 (1956).

#### Polarization of He II films with motion of superfluid component relative to the quantized vortices

I.N. Adamenko and E.K. Nemchenko

Theoretical study of the electrical activity of the saturated superfluid helium (He II) film with the relative motion of normal and superfluid components in the film is performed. The polarization vector caused by the dipole moments of quantized vortex rings of He II in the Van der Waals force, taking into account the relative motion of the normal and superfluid components is calculated. An explicit analytical expression for the electric potential difference, that arises when the relative motion of normal and superfluid components in the torsional oscillator exists. Received potential difference's time dependences, temperature and relative velocity are in agreement with the experimental data.

PACS: 67.25.D– Superfluid phase;  
67.25.dk Vortices and turbulence.

Keywords: superfluidity, helium, vortices, polarization, electrical field.