

## Влияние сопротивления Капицы на установление стационарных неравновесных состояний в сверхтекучих растворах $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$

Т.Г. Вихтинская, К.Э. Немченко, С.Ю. Рогова

*Физико-энергетический факультет ХНУ им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина*  
E-mail: nemchenko@bk.ru

Статья поступила в редакцию 1 мая 2016 г., опубликована онлайн 24 июня 2016 г.

Рассмотрено установление стационарных неравновесных состояний при включении потока тепла в сверхтекучих растворах с достаточно большой концентрацией 9,8%  $^3\text{He}$ . Исследовано влияние возможных механизмов релаксации, в частности скачка Капицы, на процесс установления постоянного градиента температуры. Из сравнения теоретических вычислений и экспериментальных данных найдены коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и коэффициент Капицы. Показано, что учет скачка Капицы необходим для количественного описания экспериментальных данных.

Розглянуто встановлення стаціонарних нерівноважних станів при включенні потоку тепла в надплинних розчинах з досить великою концентрацією 9,8%  $^3\text{He}$ . Досліджено вплив можливих механізмів релаксації, зокрема стрибка Капіці, на процес встановлення постійного градієнта температури. З порівняння теоретичних обчислень та експериментальних даних знайдено коефіцієнти температуропровідності, теплопровідності та коефіцієнт Капіці. Показано, що урахування стрибка Капіці є необхідним щодо кількісного опису експериментальних даних.

PACS: **67.60.-g** Смеси  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ ;  
67.25. bf Транспорт, гидродинамика.

Ключевые слова: сверхтекучие растворы, скачок Капицы, теплопроводность.

При достаточно больших концентрациях  $^3\text{He}$  многие приближения, которые используются при описании сверхтекучих растворов  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$ , например малая величина коэффициента теплового расширения, оказываются недостаточно корректными. В таких случаях решение задач необходимо проводить исходя из полной системы уравнений гидродинамики растворов и с учетом всех особенностей граничных условий на границе твердое тело–сверхтекучий гелий. К таким особенностям, как известно, относится скачок Капицы — разность температур на границе двух сред, возникающая вследствие потока тепла через эту границу [1].

В экспериментальных работах [2,3] был исследован сверхтекучий раствор  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$  с достаточно большой исходной молярной концентрацией 9,8%  $^3\text{He}$ , при температуре 278 мК и давлении насыщенного пара. Эксперимент проводили в цилиндрической ячейке диаметром 24 мм и высотой 47 мм. Верхний фланец ячейки находился в постоянном тепловом контакте с

камерой растворения, а для уменьшения теплового граничного сопротивления между жидкостью и фланцем использовали специальный теплообменник из ультрадисперсного серебряного порошка с площадью поверхности  $\sim 1,5 \text{ м}^2$ . Тепловой поток создавался плоским нагревателем, расположенным непосредственно в жидкости в нижней части ячейки. Для регистрации температуры использовали два миниатюрных термометра сопротивления из  $\text{RuO}_2$ , расположенных на расстояниях 15 и 25 мм от нижнего края ячейки. Теоретические исследования кинетических и релаксационных процессов в сверхтекучих растворах [4–6] показали, что при достаточно малых концентрациях  $^3\text{He}$  в этой системе релаксация температуры и концентрации определяется механизмом второго звука и диссипативным диффузионным процессом.

Наличие достаточно большой концентрации, такой как в эксперименте [2], может приводить к заметным изменениям плотности и, как следствие, возникнове-

нию потока вещества. Эволюция этих возмущений определяются первым звуком [7]. Однако вследствие большой скорости первого звука характерные времена релаксации оказываются много меньше характерных времен эксперимента [2], и в этом приближении можно считать, что плотность раствора мгновенно отслеживает текущие значения температуры и концентрации, а полный поток импульса равен нулю. В этом случае задачу о распространении тепла можно решать, исходя из полной системы гидродинамических уравнений для

сверхтекучих растворов [7], в которой исключены уравнения для полной плотности и полного потока импульса раствора.

В одномерном случае после линейризации и выбора в качестве независимых переменных скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент  $w(x,t)$ , отклонения концентрации  $c(x,t)$  и температуры  $T(x,t)$  от равновесных значений  $c_0$  и  $T_0$  соответственно, система примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\bar{S}}{\rho_n} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - \frac{\rho_0 c_0 \zeta}{\rho_n} \frac{\partial c(x,t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = -\frac{\rho_s c_0}{\rho_0} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} + D \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{T_0 \bar{S} \rho_s}{C_V \rho_0} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \frac{D k_T \rho_0 \zeta}{C_V} \frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2} + \left( \chi + \frac{D k_T^2 \rho_0 \zeta}{T_0 C_V} \right) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\rho_n$  и  $\rho_s$  — плотности нормальной и сверхтекучей компонент гелия,  $S_0$  — равновесное значение энтропии раствора,  $D$  и  $Dk_T$  — коэффициенты диффузии и термодиффузии,  $\chi = \kappa/C_V$  — коэффициент температуропроводности,  $C_V$  — теплоемкость единицы объема вещества, вычисленная при постоянном объеме,  $\bar{S} = S_0 - c_0 \partial S / \partial c$ ,  $\zeta = \partial(z/\rho) / \partial c$  — термодинамические параметры квантовых растворов [7],  $z$  — химический потенциал растворенного  $^3\text{He}$ .

Решение этого уравнения было приведено в работе [4], в которой, в частности, было показано, что нормальными модами, которые описывают решения данной системы, являются звуковая мода второго звука со скоростью

$$u_2 = \sqrt{u_{2N}^2 + u_{2\varepsilon}^2}, \quad (2)$$

и диссипативная мода с характерным коэффициентом диссипации

$$D_{\text{eff}} = \chi \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} + D \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \left( 1 - k_T \frac{\bar{S}}{c_0 C_V} \frac{u_{2N}^2}{u_{2\varepsilon}^2} \right)^2. \quad (3)$$

Здесь

$$u_{2\varepsilon}^2 = \frac{\rho_s \bar{S}^2 T_0}{\rho_n \rho_0 C_V} \quad \text{и} \quad u_{2N}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_0} \frac{n_3}{\rho_n} \left( \frac{\partial P_f}{\partial n_3} \right)_T, \quad (4)$$

$P_f$  — осмотическое давление, а  $n_3$  — плотность квази-частиц  $^3\text{He}$ .

Относительный вклад в релаксацию температуры моды второго звука и чисто диссипативной моды зависит от отношения  $u_{2N}^2/u_{2\varepsilon}^2$ .

В работе [4] было показано, что при низких температурах и высоких концентрациях выполняется сильное неравенство  $u_{2N} \gg u_{2\varepsilon}$ . Пример зависимости  $u_{2N}^2$

и  $u_{2\varepsilon}^2$  от температуры при концентрации  $^3\text{He}$   $c = 9,8\%$  приведен на рис. 1. Таким образом, эксперимент проводился в такой области температур и концентраций, где основной вклад дает диссипативная мода. При этом, как показывают расчеты, вклад второго звука присутствует, но его амплитуда колебаний слишком мала, а частота — слишком велика для чувствительности используемых приборов. Учитывая вышесказанное, в данном случае конкретного эксперимента вторым звуком можно пренебречь и учитывать только диффузионную моду.

В пренебрежении вторым звуком общее решение системы (1) для задачи о включении постоянного потока тепла  $Q_0$  на левой границе ячейки ( $x = 0$ ) при граничных условиях в отсутствие скачка Капицы

$$T(l,t) = T_0, \quad T'_x(0,t) = \frac{1}{\kappa} Q_0 \quad (5)$$

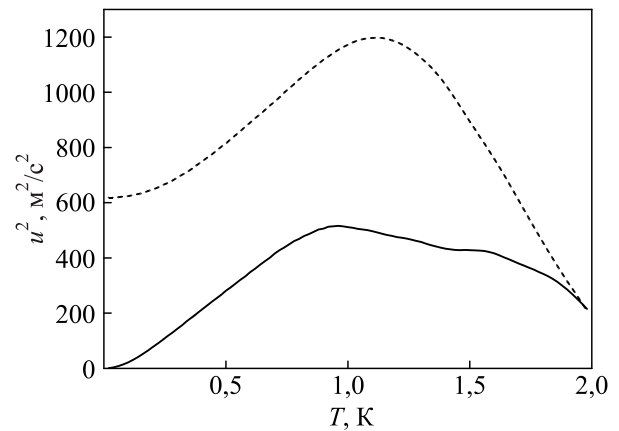


Рис. 1. Зависимость  $u_{2N}^2$  и  $u_{2\varepsilon}^2$  от температуры при концентрации  $^3\text{He}$   $x = 9,8\%$ . Пунктирная линия —  $u_{2N}^2$ , сплошная —  $u_{2\varepsilon}^2$ .

имеет вид:

$$T = Q_0 \sum_k \left( \frac{(-1)^{k+1} 2}{l \lambda_k} \sin(\sqrt{\lambda_k} x) \cdot e^{-\lambda_k \chi t} \right) + Q_0 x + T_0, \quad (6)$$

где  $\lambda_k = (\pi/2 + \pi k)^2 / l^2$ , а  $l$  — размер ячейки.

Для полученного решения были проведены исследования погрешности при замене бесконечного ряда конечным. Погрешность менее 1% достигается при числе членов конечного ряда равном 10.

Из сравнения полученного решения с экспериментальными данными в работе [3] найдены параметры сверхтекучих растворов  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Так, температуропроводность и теплопроводность определяли методом наименьших квадратов, минимизируя сумму квадратов разностей между экспериментальными данными и решением (6):

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{k=1}^6 \left( T(x_i, t_j, q_k, \chi, \kappa) - T_e(x_i, t_j, q_k) \right)^2 \rightarrow \min_{\chi, \kappa}, \quad (7)$$

где  $T_e$  — экспериментальное значение температуры,  $x_1 = 15$  мм,  $x_2 = 15$  мм — расстояние от нагревателя до термометров,  $t_j$  — время  $j$ -го измерения,  $q_k$  — плотность потока тепла от нагревателя,  $n_k$  — количество измерений для  $k$ -го потока тепла.

Минимизируя выражение (7) методом спуска по координатам, находим следующие значения коэффициента температуропроводности и коэффициента теплопроводности:  $\chi = 0,47$  см<sup>2</sup>/с и  $\kappa = 3846$  Эрг/см·г·с.

Примеры расчетов по формуле (6) с коэффициентами из (7) приведены на рис. 2, 3. Видно систематическое отклонение экспериментальных данных от теоретических вычислений, поэтому необходимо уточнить физический механизм процесса.

Более точно система уравнений (1) будет описывать процесс, если учитывать коэффициент Капицы. Скачок Капицы [1] является одним из необычных

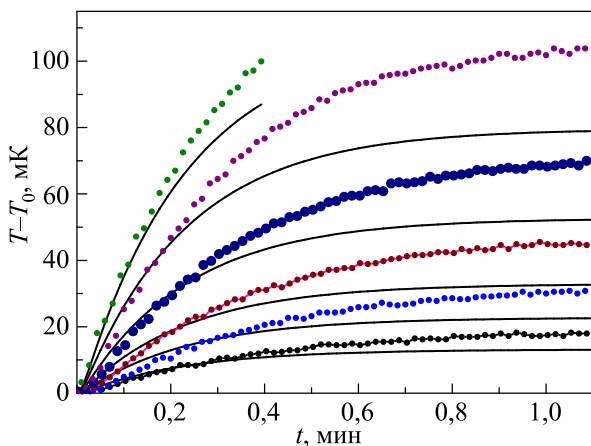


Рис. 2. Зависимость температуры от времени в точке  $x = 15$  мм без учета скачка Капицы. Сплошные линии — расчет по формуле (6). Точки — экспериментальные данные.

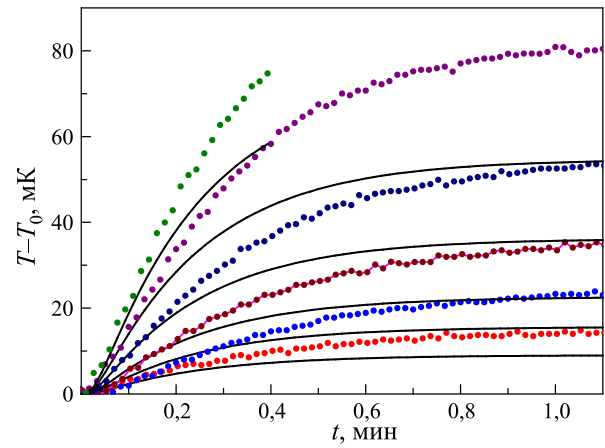


Рис. 3. Зависимость температуры от времени в точке  $x = 25$  мм без учета скачка Капицы. Сплошные линии — расчет по формуле (6). Точки — экспериментальные данные.

явлений, наблюдаемых в сверхтекучих жидкостях. Он сводится к появлению конечной разности температур при конечном потоке тепла, проходящем из твердого тела в гелий (и наоборот), которая имеет существенную величину, сравнимую с разностью температур внутри гелия. Причиной скачка является рассогласование акустических импедансов сред, так как у гелия и плотность, и скорость звука много меньше соответствующих величин для твердого тела.

В настоящее время отсутствует полная теория скачка Капицы. Поэтому любые косвенные измерения его величины могут способствовать дальнейшему пониманию физики сверхтекучего гелия.

Учет скачка Капицы приводит к следующему граничному условию:

$$T(0, t) = T_0 + \alpha T_x(0, t), \quad (8)$$

где  $\alpha$  — коэффициент Капицы.

Решив систему уравнений (1) с граничными условиями (8) и полагая, что коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и коэффициент Капицы не зависят от времени и температуры, получим выражение

$$T_0 = \sum_k \left( b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \cdot e^{-\lambda_k \chi t} \right) + Q_0 x + Q_0 (\alpha + 1), \quad (9)$$

$$\text{где } b_k = Q_0 \left[ -\frac{\cos(\sqrt{\lambda_k} \cdot l)}{\lambda_k} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_k} \cdot l)}{\sqrt{\lambda_k}} + \frac{1}{\lambda_k} \right] \times \left[ \frac{l}{2} + \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k} \cdot l)}{4\sqrt{\lambda_k}} \right]^{-1},$$

а  $\lambda_k$  находим численно из выражения

$$\text{tg}(\sqrt{\lambda_k} l) = -1/\alpha \sqrt{\lambda_k}.$$

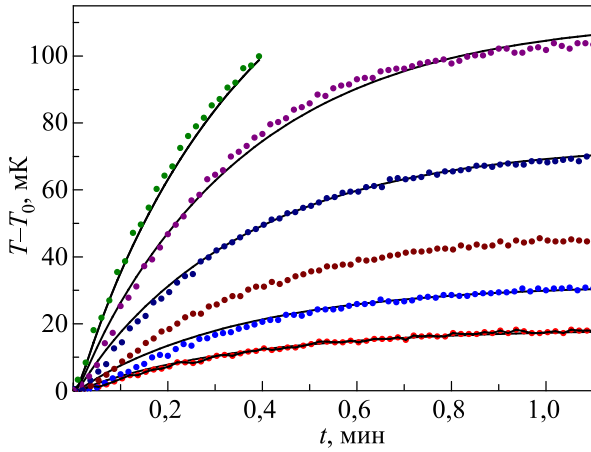


Рис. 4. Зависимость температуры от времени в точке  $x = 15$  мм с учетом скачка Капицы. Сплошные линии — расчет по формуле (9). Точки — экспериментальные данные.

Параметры сверхтекучих растворов  $^3\text{He}-^4\text{He}$  — температуропроводность, теплопроводность, коэффициент Капицы определяли методом наименьших квадратов, минимизируя сумму квадратов разностей между экспериментальными данными и результатами решения уравнения (1) таким же образом, как это было сделано в предыдущем разделе. Получены следующие результаты:  $\chi = 0,66 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $\kappa = 5347 \text{ Эрг/см}\cdot\text{г}\cdot\text{с}$ ,  $\alpha = 12,9$ .

Примеры расчетов по формуле (9) с коэффициентами из (7) приведены на рис. 4, 5. Видно хорошее количественное согласие экспериментальных данных и теоретических вычислений, которое достигнуто за счет скачка учета Капицы.

Таким образом, в работе аналитически решена задача об установлении стационарных распределений температуры и концентраций в сверхтекучих растворах  $^3\text{He}-^4\text{He}$  при включении внешнего потока тепла. Полу-

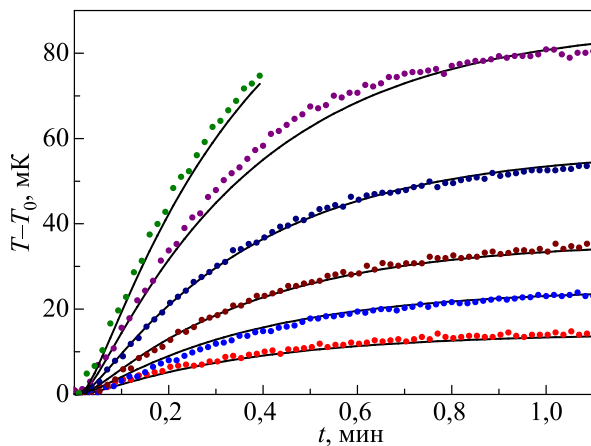


Рис. 5. Зависимость температуры от времени в точке  $x = 25$  мм с учетом скачка Капицы. Сплошные линии — расчет по формуле (9). Точки — экспериментальные данные.

чены граничные условия, которые учитывают температурный скачок Капицы в этих растворах. Показано, что только при учете скачка Капицы удается достичь количественного совпадения теоретических расчетов и результатов эксперимента.

На основе сравнения экспериментальных данных с результатами решения задач определены параметры сверхтекучих растворов  $^3\text{He}-^4\text{He}$  — коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и коэффициент Капицы.

1. П.Л. Капица, *ЖЭТФ* **11**, 1 (1941).
2. А.А. Задорожко, Т.В. Калько, К.Э. Немченко, Э.Я. Рудаковский, В.К. Чаговец, Г.А. Шешин, *ФНТ* **30**, 169 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 122 (2004)].
3. G. Sheshin, T. Kalko, K. Nemchenko, E. Rudavskii, V. Chagovets, and A. Zadorozhko, *JLTP* **146**, 403 (2007).
4. K. Nemchenko and S. Rogova, *JLTP* **150**, 187 (2008).
5. K. Nemchenko and S. Rogova, *JML* **151**, 9 (2010).
6. K. Nemchenko and S. Rogova, *JLTP* **171**, 187 (2013).
7. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1970).

### Influence of Kapitza resistance on the stationary nonequilibrium states establishment in superfluid $^3\text{He}-^4\text{He}$ mixtures

T.G. Vihtinskaya, K.E. Nemchenko, and S.Yu. Rogova

The nonequilibrium steady states establishment when the heat flow is turned on in superfluid mixtures with a sufficiently high concentration 9.8% of  $^3\text{He}$  is considered. We investigate influence of possible relaxation mechanisms, in particular the Kapitza jump on the process of establishing a constant temperature gradient. From a comparison of theoretical calculations and experimental data thermal diffusivity coefficient, thermal conductivity coefficient, and Kapitza coefficient are found. It is shown that the Kapitza jump accounting is necessary for a quantitative description of the experimental data.

PACS: **67.60.-g** Mixtures of  $^3\text{He}$  and  $^4\text{He}$ ;  
**67.25. bf** Transport, hydrodynamics.

Keywords: superfluid mixtures, Kapitza jump, thermal conductivity.