

# Сверхтекучесть разреженного газа электрон-дырочных пар в двухслойной системе

Д.В. Филь

*Институт монокристаллов НАН Украины, пр. Науки, 60, г. Харьков, 61001, Украина*

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина*

E-mail: fil@isc.kharkov.ua

С.И. Шевченко

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины*

*пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина*

E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2016 г., после переработки 17 мая 2016 г., опубликована онлайн 25 июля 2016 г.

Исследованы условия устойчивости сверхтекучей фазы в двухслойных системах со спариванием пространственно разделенных электронов и дырок в пределе низкой плотности. Получено общее выражение для спектра коллективных возбуждений. Показано, что при увеличении расстояния между слоями  $d$  в спектре возбуждений появляется минимум. Когда  $d$  достигает критического значения, сверхтекучее состояние становится неустойчивым относительно образования фазы типа вигнеровского кристалла. Такая же неустойчивость имеет место при увеличении плотности носителей при фиксированном  $d$ . Установлено, что критическое расстояние и критическая плотность связаны обратным степенным законом. Изучено влияние примесей на температуру сверхтекучего перехода и найдены условия, при которых это влияние будет слабым. Показано, что в разреженных системах можно достичь критической температуры  $T_c \approx 100$  К.

Досліджено умови стабільності надплинного стану в двошарових системах зі спаруванням просторово розділених електронів і дірок в границі низької щільності. Одержано загальний вираз для спектру колективних збуджень. Показано, що при збільшенні відстані між шарами  $d$  в спектрі збуджень виникає мінімум. Коли  $d$  досягає критичної величини, надплинний стан стає нестійким відносно утворення фази типу вігнерівського кристалу. Така сама нестійкість має місце при збільшенні щільності носіїв при фіксованій  $d$ . Встановлено, що критична відстань і критична щільність зв'язані між собою оберненим степеневим законом. Вивчено вплив домішок на температуру надплинного переходу і знайдено умови, при яких такий вплив є слабким. Показано, що в розріджених системах можна досягнути критичної температури  $T_c \approx 100$  К.

PACS: 73.21.-b Электронные состояния и коллективные возбуждения в многослойных структурах; квантовые ямы, мезоскопические и наномасштабные системы.

Ключевые слова: электрон-дырочное спаривание, экситонная сверхтекучесть, когерентные состояния.

## 1. Введение

В последнее время предпринимается ряд попыток экспериментального обнаружения сверхтекучести электрон-дырочных пар в двухслойных системах, в которых один слой обладает электронной проводимостью, а второй — дырочной. Явление было предсказано в работах [1–3], но быстрого экспериментального подтверждения не получило.

Открытие квантового эффекта Холла и развитие технологии получения полупроводниковых гетероструктур позволило создавать так называемые двойные квантовые ямы, т.е. структуры с двумя параллельными прово-

дзящими слоями. Обычно в таких структурах слои обладают одинаковым типом проводимости. Если двойную квантовую яму с одинаковым типом носителей поместить в сильное магнитное поле, направленное нормально к проводящим слоям, то в ней также может иметь место электрон-дырочное спаривание. Для этого факторы заполнения уровней Ландау  $\nu_1$  и  $\nu_2$  слоев 1 и 2 должны удовлетворять условию  $\nu_1 + \nu_2 = 1$ . Роль дырок играют незаполненные состояния на нулевом уровне Ландау, и при таких факторах заполнения концентрация электронов в одном слое равна концентрации дырок во втором слое.

Электрон-дырочное спаривание в двухслойных квантовых холловских системах было предсказано в работах [4–7]. Эффект получил достаточно убедительное экспериментальное подтверждение. Наблюдение зануления холловского сопротивления и резкого возрастания продольной проводимости при низкой температуре при протекании через слои равных по модулю и противоположных по направлению электрических токов [8–10] можно рассматривать как прямое доказательство спаривания. Другим подтверждением является наблюдаемый пик в дифференциальной межслоевой проводимости при нулевой разности потенциалов [11,12]. Его появление свидетельствует о джозефсоновском характере туннелирования между слоями. Кроме того, имеет место полное межслоевое увлечение [13], т.е. увлечение, при котором токи в увлекаемом и увлекающем слоях равны по модулю. Это свойство естественным образом следует из предположения, что электронный транспорт в таких системах связан с движением электрон-дырочных пар.

Вопрос о реализации электрон-дырочного спаривания без магнитного поля и сверхтекучести газа таких пар в двухслойных системах в настоящее время остается открытым. Относительно недавно было высказано предложение использовать графеновые слои в качестве компонентов двухслойной системы [14–18]. Как показали дальнейшие исследования, серьезной проблемой, в этом случае, является экранирование кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой [19,20]. Эффект экранирования наиболее опасен в режиме слабой связи, когда размер электрон-дырочных пар значительно превосходит среднее расстояние между частицами (БКШ режим). Экранирование приводит к существенному уменьшению константы связи, и температура БКШ перехода становится экспоненциально малой, а наличие даже незначительной концентрации примесей, влияние которых в рассматриваемой системе аналогично влиянию парамагнитных примесей в обычных сверхпроводниках [21,22], приводит почти к полному подавлению электрон-дырочной сверхтекучести.

Особенностью графеновых систем, обладающих дираковским спектром носителей, является невозможность образования в них локальных электрон-дырочных пар. Напротив, в двухслойных системах с параболическим законом дисперсии в пределе низкой плотности такие пары могут возникать. При понижении плотности носителей происходит переход от БКШ режима к режиму бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) электрон-дырочных пар. В режиме БЭК пары сильно связаны, размер пар меньше или много меньше среднего расстояния между парами и экранирование подавлено. Поэтому можно ожидать, что режим БЭК окажется более перспективным для достижения высокой температуры сверхтекучего перехода. Следует отметить, что в двухслойной графеновой системе подавление экра-

нирования также может иметь место. В случае систем с дираковским спектром для такого подавления необходимо, чтобы константа взаимодействия  $\alpha = e^2/\hbar v_F \epsilon$  была достаточно большой [23,24]. Здесь  $v_F$  — скорость Ферми в графене и  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость матрицы, либо эффективная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\text{eff}} = (\epsilon + 1)/2$  для системы на диэлектрической подложке. Критическое значение  $\alpha_c$ , по разным оценкам [23,24], лежит в диапазоне  $\alpha_c = 1,5-3$ . Так как для графена в вакууме  $\alpha = e^2/\hbar v_F = 2,2$ , то графеновая система на стандартной диэлектрической подложке с  $\epsilon = 4$ , очевидно, не удовлетворяет условию  $\alpha > \alpha_c$ . Этим, по-видимому, объясняются отрицательные результаты эксперимента [25], в котором была предпринята попытка обнаружить в двухслойной графеновой системе аномальное межслоевое увлечение [26] при понижении температуры.

Аномальное увлечение было экспериментально обнаружено в электрон-дырочных системах, реализованных в гетероструктурах AlGaAs [27,28], а также в гибридных структурах графен–AlGaAs [29]. Параметры систем, которые использовались в данных экспериментах, отвечают случаю локального спаривания. Эти исследования показали, что эффект увлечения проявляется сильнее при уменьшении плотности носителей, и слабее — при увеличении ширины барьера между слоями. Первое коррелирует с тем, что в системах с параболическим законом дисперсии при низкой плотности носителей подавлено экранирование и, следовательно, температура сверхтекучего перехода возрастает. Второе может свидетельствовать о разрушении сверхтекучего состояния при увеличении расстояния между слоями.

Известно, что сверхтекучесть пар в двухслойных квантовых холловских системах разрушается при увеличении межслоевого расстояния. Анализ спектра коллективных возбуждений системы, точнее, его зависимости от расстояния между слоями  $d$ , показывает, что рост  $d$  приводит к появлению минимума в спектре при конечных волновых векторах [4,30]. При  $d = d_c$  дисперсионная кривая касается оси абсцисс. При нулевом разбалансе факторов заполнения теория дает критическое расстояние  $d_c \approx 1,2 \ell_H$ , где  $\ell_H$  — магнитная длина. При  $d > d_c$  частота коллективной моды в некоторой области волновых векторов становится мнимой, что отвечает неустойчивости состояния со спариванием. Величина  $d_c$  растет при увеличении разбаланса [18]. Увеличение разбаланса приводит к уменьшению плотности сверхтекучей компоненты  $n_s$ , т.е. рост  $d_c$  можно связать с уменьшением  $n_s$ . Наличие критического расстояния в квантовых холловских системах и его рост при увеличении разбаланса подтверждены экспериментально [8,10,31], хотя полное количественное совпадение между теорией и экспериментом не достигается (экспериментальное значение  $d_c$  примерно в полтора раза больше теоретического).

Условия спаривания в двухслойных электрон-дырочных системах (без магнитного поля) с низкой плотностью носителей были проанализированы, в частности в [32]. Была вычислена энергия системы со спариванием как функция плотности пар с учетом вклада обменного взаимодействия, прямого кулоновского взаимодействия и взаимодействия Ван-дер-Ваальса. Основной вывод работы [32] состоит в предсказании перехода «газ–жидкость» при уменьшении расстояния между слоями. Переход «газ–жидкость» означает, что газ пар становится неустойчивым относительно образования капель, плотность которых фиксирована и не зависит от средней плотности носителей в системе. Согласно [32], капли образуются только в достаточно разреженных системах, причем расстояние между слоями не должно превышать некоторую граничную величину ( $d_c \approx 0,5a_0$ , где  $a_0$  — эффективный боровский радиус пары). При больших  $d$  переход «газ–жидкость» не происходит. Если средняя плотность больше равновесной плотности капель ( $n_c \approx 0,02a_0^{-2}$ ), то переход «газ–жидкость» не происходит ни при каких  $d$ . Предсказание перехода «газ–жидкость» коррелирует с выводами работ [33–36], где обсуждалось образование в двухслойной системе биэкситонов. Биэкситон представляет собой две связанные электрон-дырочные пары. Как показано в [34–36], образование биэкситонов приводит к понижению энергии системы двух пар, если расстояние между слоями меньше критического. Критическое расстояние зависит от отношения масс электрона  $m_e$  и дырки  $m_h$  ( $d_{c1} \approx 0,9a_0$  для  $m_e \ll m_h$ , и  $d_{c1} \approx 0,4a_0$  для  $m_e = m_h$ ). В работах [33–36] вопрос о слиянии экситонов или биэкситонов в капли, содержащие большое количество экситонов, не анализировался. Критическое расстояние, полученное в работе [32], а также в работах [34–36], есть нижнее критическое расстояние. Коллективные возбуждения в этих работах не анализировались и какого-либо ограничения сверху на межслоевое расстояние получено не было.

При рассмотрении электрон-дырочного спаривания в двухслойных системах основной интерес представляют условия, когда газ пар будет сверхтекучим. Келдыш в работе [37] предложил использовать для описания сверхтекучего состояния экситонов в пределе низкой плотности формализм когерентных состояний. Мотивация для применения такого формализма следующая. В теории бозе-газа сверхтекучее состояние принято описывать комплексным параметром порядка

$$\Psi(\mathbf{R}) = \langle \Phi_0 | \hat{\Psi}(\mathbf{R}) | \Phi_0 \rangle, \quad (1)$$

где  $|\Phi_0\rangle$  — волновая функция основного состояния многочастичной системы, а  $\hat{\Psi}(\mathbf{R})$  — оператор уничтожения бозона в точке  $\mathbf{R}$ . Равенство (1), очевидно, удовлетворяется, если  $|\Phi_0\rangle$  есть собственная функция оператора  $\hat{\Psi}(\mathbf{R})$ , т.е.

$$\hat{\Psi}(\mathbf{R}) | \Phi_0 \rangle = \Psi(\mathbf{R}) | \Phi_0 \rangle. \quad (2)$$

Уравнение (2) легко решить. Для этого используется разложение

$$\hat{\Psi}(\mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}, \quad (3)$$

где  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  — оператор уничтожения бозонов в состоянии с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , и  $V$  — объем системы. Аналогичным образом записывается параметр порядка

$$\Psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}. \quad (4)$$

В результате, приходим к необходимости найти собственные функции оператора уничтожения  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = \alpha_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (5)$$

Эти собственные функции хорошо известны [38] и имеют вид

$$| \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha_{\mathbf{k}}|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\mathbf{k}}^n}{\sqrt{n!}} | n_{\mathbf{k}} \rangle = \exp(\alpha_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ - \text{H.c.}) | 0 \rangle, \quad (6)$$

где  $| n_{\mathbf{k}} \rangle$  — фоковские состояния. Функции  $| \alpha_{\mathbf{k}} \rangle$  называют когерентными состояниями. Полученные выражения позволяют без труда найти, что

$$\begin{aligned} | \Phi_0 \rangle &= \prod_{\mathbf{k}} \exp(\alpha_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ - \text{H.c.}) | 0 \rangle = \\ &= \exp\left(\int \Psi(\mathbf{R}) \hat{\Psi}^+(\mathbf{R}) d\mathbf{R} - \text{H.c.}\right) | 0 \rangle \equiv D_B | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Естественным обобщением выражения (7) на случай системы, образованной электрон-дырочными парами, является волновая функция, предложенная Келдышем [37],

$$| \Phi_0 \rangle = D_F | 0 \rangle, \quad (8)$$

где  $| 0 \rangle$  — вакуумное состояние, в котором электроны и дырки отсутствуют, и оператор  $D_F$  определяется выражением

$$\begin{aligned} D_F &= \\ &= \exp\left[\sum_{\sigma, \sigma'} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Phi_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-i\mu t/\hbar} \psi_{\sigma}^{(e)+}(\mathbf{r}_1) \psi_{\sigma'}^{(h)+}(\mathbf{r}_2) - \text{H.c.}\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9)  $\psi_{\sigma}^{(e)+}(\mathbf{r})$  и  $\psi_{\sigma}^{(h)+}(\mathbf{r})$  — операторы рождения электрона и дырки в соответствующих слоях,  $\sigma$  — спиновый индекс,  $\mu$  — химический потенциал, и величина  $\Phi_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  имеет смысл волновой функции пар.

Формализм когерентных состояний был использован в [39,40] для описания электрон-дырочного спаривания в двухслойных квантовых холловских системах.

В работах [41–43] с помощью подхода, основанного на функции Келдыша, были проанализированы поляризационные явления в трехмерном сверхтекучем газе электрон-дырочных пар (без пространственного разделения электронов и дырок). В работе [44] подход Келдыша применен для описания сверхтекучего состояния разреженного газа, образованного атомами щелочного металла.

В настоящей работе формализм когерентных состояний используется для нахождения спектра коллективных возбуждений в сверхтекучем газе электрон-дырочных пар в двухслойной системе в отсутствие магнитного поля и анализа устойчивости сверхтекучего состояния. Показано, что при увеличении  $d$  в спек-

тре возбуждений возникает минимум, а при достижении некоторого критического  $d$  дисперсионная кривая касается оси абсцисс и энергия возбуждения становится мнимой. Установлено, что критическое расстояние растет при уменьшении плотности носителей. В заключительном разделе работы в рамках того же формализма рассмотрено влияние примесей на температуру сверхтекучего перехода.

## 2. Энергия электрон-дырочного когерентного состояния

Гамильтониан двухслойной системы, состоящей из электронного и дырочного слоев, имеет вид

$$H = - \sum_{\alpha=e,h,\sigma=\uparrow,\downarrow} \int d\mathbf{r} \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \psi_{\sigma}^{(\alpha)+}(\mathbf{r}) \nabla^2 \psi_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=e,h,\sigma,\sigma'=\uparrow,\downarrow} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi_{\sigma}^{(\alpha)+}(\mathbf{r}) \psi_{\sigma'}^{(\beta)+}(\mathbf{r}') V_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \psi_{\sigma'}^{(\beta)}(\mathbf{r}') \psi_{\sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где  $m_e$  и  $m_h$  — эффективные массы электрона и дырки,  $V_{\alpha\beta}(r)$  — энергия кулоновского взаимодействия между носителями, и  $\mathbf{r}$  — двумерный радиус-вектор. Будем считать, что двухслойная система помещена в однородную диэлектрическую матрицу с проницаемостью  $\epsilon$ , совпадающую с диэлектрической проницаемостью прослойки между электронным и дырочным слоями. В этом случае  $V_{ee}(r) = V_{hh}(r) = e^2/\epsilon r$  и  $V_{eh}(r) = -e^2/\epsilon \sqrt{r^2 + d^2}$ .

Волновая функция пар в (9) имеет матричную структуру. Будем рассматривать синглетное спаривание. Это отвечает матрице  $\Phi_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , в которой отличны от нуля только недиагональные по спиновым индексам компоненты, т.е. спаривание описывается двумя скалярными волновыми функциями  $\Phi_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  и  $\Phi_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  (ниже, для краткости, мы используем обозначение  $\Phi_{\sigma} \equiv \Phi_{\sigma,-\sigma}$ ). В общем случае эти функции различны. Если обе эти функции отличны от нуля, газ пар является двухкомпонентным. Первой компоненте отвечает электрон со спином (проекцией спина)  $+1/2$ , спаренный с дыркой со спином  $-1/2$ , а второй компоненте — электрон со спином  $-1/2$ , спаренный с дыркой со спином  $+1/2$ . При этом оператор  $D_F$  имеет вид

$$D_F = \exp \left[ \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{-i\mu_{\sigma}t/\hbar} \psi_{\sigma}^{(e)+}(\mathbf{r}_1) \psi_{-\sigma}^{(h)+}(\mathbf{r}_2) - \text{H.c.} \right], \quad (11)$$

где величины  $\mu_{\sigma}$  представляют собой химические потенциалы компонент.

Известно, что двухкомпонентный бозе-конденсат является неустойчивым относительно расслоения на компоненты, если квадрат константы взаимодействия между парами разных сортов превышает произведение констант взаимодействия между парами одного сорта [45]. В зависимости от соотношения между константами взаимодействия конденсат будет представлять собой либо однородную смесь пар двух сортов, либо система будет двухфазной и в каждой из фаз будет присутствовать только одна компонента.

Функции  $\Phi_{\sigma}$  находятся из условия минимума функционала

$$F = E - \sum_{\sigma} \mu_{\sigma} N_{\sigma}, \quad (12)$$

где  $E$  и  $N_{\sigma}$  есть энергия системы и число пар в компоненте  $\sigma$  в состоянии (8). Их величины определяются выражениями

$$E = \langle 0 | \tilde{H} | 0 \rangle, \quad (13)$$

$$N_{\sigma} = \langle 0 | \tilde{N}_{\sigma} | 0 \rangle, \quad (14)$$

где  $\tilde{H}$  имеет вид, совпадающий по форме с исходным гамильтонианом (10) с заменой в нем операторов  $\psi_{\sigma}^{(\alpha)}(r)$  на

$$\tilde{\psi}_{\sigma}^{(e,h)}(\mathbf{r}) = D_F^+ \psi_{\sigma}^{(e,h)}(\mathbf{r}) D_F, \quad (15)$$

$$\tilde{N}_{\sigma} = \int d\mathbf{r} \tilde{\psi}_{\sigma}^{(e)+}(\mathbf{r}) \tilde{\psi}_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} \tilde{\psi}_{-\sigma}^{(h)+}(\mathbf{r}) \tilde{\psi}_{-\sigma}^{(h)}(\mathbf{r}). \quad (16)$$

С учетом явного вида  $D_F$ , операторы  $\tilde{\psi}_{\sigma}^{(\alpha)}$  следующим образом выражаются через операторы рождения и уничтожения электронов и дырок [37]

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}) &= \\ &= \int d\mathbf{r}' [C_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}') + e^{-i\mu_{\sigma}t/\hbar} S_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{-\sigma}^{(h)+}(\mathbf{r}')], \\ \tilde{\Psi}_{-\sigma}^{(h)}(\mathbf{r}) &= \\ &= \int d\mathbf{r}' [C_{\sigma}^{(h)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Psi_{-\sigma}^{(h)}(\mathbf{r}') - e^{-i\mu_{\sigma}t/\hbar} S_{\sigma}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \Psi_{\sigma}^{(e)+}(\mathbf{r}')], \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} C_{\sigma}^{(e)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\Phi_{\sigma} \cdot \Phi_{\sigma}^+)^n, \\ C_{\sigma}^{(h)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\Phi_{\sigma}^+ \cdot \Phi_{\sigma})^n, \\ S_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \Phi_{\sigma} \cdot (\Phi_{\sigma}^+ \cdot \Phi_{\sigma})^n. \end{aligned} \quad (18)$$

В (18) использовано обозначение  $\Phi_{\sigma}^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Phi_{\sigma}^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ , и знак умножения означает свертку.

Функционал (12) представляет собой бесконечный ряд, содержащий свертки от  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  четных порядков. В пределе низкой плотности пар можно ограничиться членами до четвертого порядка включительно. При учете только членов второго порядка условие равенства нулю вариации функционала  $F$  дает уравнение Шредингера для изолированной электрон-дырочной пары

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_h} \nabla_2^2 + V_{eh}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) - \mu_{\sigma} \right] \Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0. \quad (19)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{\sigma}(\mathbf{R})\varphi(\mathbf{r}), \quad (20)$$

где  $\mathbf{R}$  — координата центра масс,  $\mathbf{r}$  — относительная координата,  $\Psi_{\sigma}(\mathbf{R})$  — волновая функция пары, движущейся как целое, и  $\varphi(\mathbf{r})$  — функция, описывающая связанное состояние электрона и дырки. Функция  $\varphi(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 \varphi(\mathbf{r}) + V_{eh}(r)\varphi(\mathbf{r}) = \mu_{\sigma}\varphi(\mathbf{r}), \quad (21)$$

где  $m = m_e m_h / (m_e + m_h)$  — приведенная масса. Уравнение (21) есть уравнение Шредингера для частицы в изотропном двумерном потенциале. Минимум энергии достигается для волновой функции основного состояния  $\varphi_0(\mathbf{r})$ . В этом приближении химические потенциалы  $\mu_{\uparrow}$  и  $\mu_{\downarrow}$  совпадают и равны энергии основного состояния  $E_0$ . Нормировка функций  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  задается условием

$$\sum_{\sigma} \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} |\Psi_{\sigma}(\mathbf{R})|^2 |\varphi_0(\mathbf{r})|^2 = N, \quad (22)$$

где  $N$  — полное число пар. Уравнение (22) оставляет произвол при выборе нормировки функций  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{R})$  и  $\varphi_0(\mathbf{r})$ . Для определенности, мы будем считать, что  $\int d\mathbf{r} |\varphi_0(\mathbf{r})|^2 = 1$  и  $\sum_{\sigma} \int d\mathbf{R} |\Psi_{\sigma}(\mathbf{R})|^2 = N$ . В основном состоянии  $\Psi_{\sigma}(\mathbf{R}) = \Psi_{0\sigma} = \sqrt{n_{\sigma}}$ , где  $n_{\sigma}$  — плотность пар сорта  $\sigma$ .

Учтем теперь члены четвертого порядка в функционале (12). Функции  $\Phi_{\sigma}$ , отвечающие минимуму функционала, будем искать в виде  $\Phi_{\sigma}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{12})\varphi_0(\mathbf{r}_{12})$ . При этом, мы пренебрегаем поправкой к функции  $\varphi_0$ , обусловленной взаимодействием между парами. В этом приближении

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\sigma} \int d\mathbf{R} \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{R}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \tilde{\mu}_{\sigma} \right] \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) |\Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{12})|^2 |\Psi_{\sigma'}(\mathbf{R}_{34})|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{R}_{12}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{32}) \Psi_{\sigma}^*(\mathbf{R}_{34}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{R}_{14}), \end{aligned} \quad (23)$$

где функции  $A[\mathbf{r}_i]$  и  $B[\mathbf{r}_i]$  выражаются через потенциал кулоновского взаимодействия и волновую функцию связанного состояния электрона и дырки

$$A[\mathbf{r}_i] = V_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) |\varphi_0(\mathbf{r}_{12})|^2 |\varphi_0(\mathbf{r}_{34})|^2, \quad (24)$$

$$B[\mathbf{r}_i] = -V_{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \varphi_0^*(\mathbf{r}_{12}) \varphi_0(\mathbf{r}_{32}) \varphi_0^*(\mathbf{r}_{34}) \varphi_0(\mathbf{r}_{14}), \quad (25)$$

В (24), (25) использованы обозначения

$$V_d(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = V_{ee}(r_{13}) + V_{hh}(r_{24}) + V_{eh}(r_{14}) + V_{eh}(r_{23}) \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned} V_{ex}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= V_{ee}(r_{13}) + V_{hh}(r_{24}) + \\ &+ \frac{1}{2} [V_{eh}(r_{12}) + V_{eh}(r_{34}) + V_{eh}(r_{14}) + V_{eh}(r_{23})]. \end{aligned} \quad (27)$$

Величина  $\tilde{\mu}_\sigma$  в (23) есть сдвигка химического потенциала, обусловленная взаимодействием между парами,  $\tilde{\mu}_\sigma = \mu_\sigma - E_0$ .

Условие экстремума функционала (23) приводит к уравнению

$$\tilde{\mu}_\sigma \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{12}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}_{12}}^2 \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{12}) + \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \left[ A[\mathbf{r}_i] \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{12}) \left( \sum_{\sigma'} |\Psi_{\sigma'}(\mathbf{R}_{34})|^2 \right) + B[\mathbf{r}_i] \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{32}) \Psi_\sigma^*(\mathbf{R}_{34}) \Psi_\sigma(\mathbf{R}_{14}) \right], \quad (28)$$

где  $M = m_e + m_h$  — масса пары. Уравнению (28) удовлетворяет функция  $\Psi_\sigma(R) = \sqrt{n_\sigma}$  при соответствующем выборе  $\tilde{\mu}_\sigma$ . Подставляя найденные  $\Psi_\sigma$  и  $\tilde{\mu}_\sigma$  в (23), получаем

$$F = -\frac{S}{2} \left[ \gamma_{11} (n_\uparrow^2 + n_\downarrow^2) + 2\gamma_{12} n_\uparrow n_\downarrow \right], \quad (29)$$

где  $S$  — площадь системы,  $\gamma_{11} = \gamma_d + \gamma_{ex}$  и  $\gamma_{12} = \gamma_d$  константы взаимодействия между парами одного сорта и разных сортов, соответственно. Входящие в эти константы слагаемые отвечают вкладам прямого ( $\gamma_d$ ) и обменного ( $\gamma_{ex}$ ) кулоновского взаимодействия,

$$\gamma_d = \frac{4\pi e^2 d}{\varepsilon}, \quad (30)$$

$$\gamma_{ex} = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} |\varphi_{\mathbf{q}}|^2 \times \left[ |\varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}|^2 - \frac{e^{-pd}}{2} (\varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}) \right], \quad (31)$$

где  $\varphi_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \varphi_0(\mathbf{r})$  — фурье-компонента волновой функции связанного состояния.

С учетом того, что полная плотность  $n = n_\uparrow + n_\downarrow$  задана, находим, что при  $\gamma_{ex} > 0$  минимуму функционала (29) отвечает однородная смесь компонент  $n_\uparrow = n_\downarrow = n/2$ , а при  $\gamma_{ex} < 0$  минимум достигается при  $n_\uparrow = n$ ,  $n_\downarrow = 0$  либо  $n_\uparrow = 0$ ,  $n_\downarrow = n$ . Ситуация, при которой во всей системе отлична от нуля плотность только одной компоненты, соответствует полной спиновой поляризации электронного и дырочного слоев. Для минимизации магнитной энергии предпочтительным является появление доменной структуры с областями, обладающими противоположным знаком поляризации. В каждой области отличной от нуля будет плотность только одной компоненты, а средние по системе плотности каждой из компонент будут одинаковыми. Сохранение средних по системе плотностей спиновых компонент означает, что разбиение на домены эквивалентно пространственному расслоению на компоненты.

Можно показать [42], что при  $V_{ee}(r) = V_{hh}(r) = -V_{eh}(r)$  (что соответствует  $d = 0$ ) величина  $\gamma_{ex}$  является положительной. Однако при  $d$ , превышающем

некоторую критическую величину, произойдет смена знака коэффициента  $\gamma_{ex}$ . Причина в том, что при больших  $d$  вклад первого слагаемого в интеграл в (31) становится доминирующим.

При  $d = 0$  уравнение (21) есть двумерное уравнение Шредингера для заряженной частицы в кулоновском поле. Решение этого уравнения, отвечающее основному состоянию, имеет вид

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{a_0} \sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-2r/a_0}, \quad (32)$$

где  $a_0 = \hbar^2 \varepsilon / m e^2$  — эффективный боровский радиус пары. Фурье-компонента функции (32) равна

$$\varphi_{\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{2\pi} a_0}{\left(1 + \frac{q^2 a_0^2}{4}\right)^{3/2}}. \quad (33)$$

Подстановка в (31) функции (33) при  $d = 0$  дает  $\gamma_{ex} = +3,03 e^2 a_0 / \varepsilon$ . При  $d \gtrsim a_0$  можно заменить потенциал  $V_{er}(r)$  на гармонический  $V_{eh}(r) \approx -e^2 / \varepsilon d + e^2 r^2 / 2\varepsilon d^3$  и записать функцию основного состояния в виде

$$\varphi_{\mathbf{q}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} r_0} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2}\right). \quad (34)$$

Здесь  $r_0 = \sqrt[4]{a_0 d^3}$  — параметр длины, который следует интерпретировать как характерный размер пары. Фурье-компонента функции (34) равна

$$\varphi_{\mathbf{q}} = \sqrt{4\pi} r_0 \exp\left(-\frac{q^2 r_0^2}{2}\right). \quad (35)$$

Полагая  $d = a_0$  и подставляя (35) в (31), получаем  $\gamma_{ex} = -6,96 e^2 a_0 / \varepsilon$ . Это показывает, что смена знака константы  $\gamma_{ex}$  происходит при  $d < a_0$ . Для оценки  $d$ , при котором происходит смена знака, можно подставить в (31) функцию (33), считая, что при малых  $d$  она несильно отклоняется от точной функции. Полученная зависимость, представленная на рис. 1, показывает что смена знака  $\gamma_{ex}$  происходит при достаточно малом межслоевом расстоянии  $d \approx 0,2 a_0$ . Для больших  $d$  мы предсказываем пространственное расслоение сверхтекучих компонент.

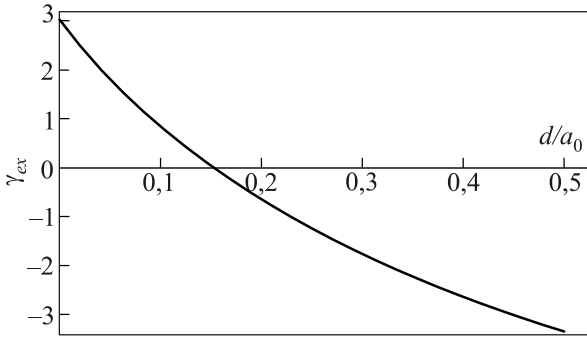


Рис. 1. Зависимость обменной части константы взаимодействия (в единицах  $e^2 a_0 / \epsilon$ ) от расстояния между слоями.

Отметим, что в недавней работе [46] рассмотрена возможность электрон-дырочного спаривания в двухслойной системе на основе двумерных кристаллов халькогенидов переходных металлов, помещенных в матрицу гексагонального нитрида бора. Результаты этой работы, полученные на основе численного анализа системы уравнений для параметра порядка электрон-дырочного спаривания и химического потенциала, коррелируют с нашими результатами. Двумерные кристаллы халькогенидов переходных металлов, подобно графену, имеют кристаллическую структуру типа пчелиных сот. Минимумы зоны проводимости и максимумы валентной зоны расположены в  $K$  и  $K'$  точках зоны Бриллюэна, причем в валентной зоне возникает сильное спиновое расщепление. В результате, в такой системе могут образовываться пары двух сортов, которые различаются как по номеру долины, так и по спину. В работе [46] показано, что при  $d < 0,25a_0$  минимуму энергии отвечает двухкомпонентная фаза, а при  $d > 0,25a_0$  — однокомпонентная спин-поляризованная фаза.

### 3. Спектр коллективных возбуждений и критическое межслоевое расстояние

В однородном двухкомпонентном бозе-конденсате имеется две коллективные моды, законы дисперсии которых в пределе длинных волн являются акустическими:  $\omega_{\pm}(q) = s_{\pm}q$ . Если плотности компонент одинаковы и равны  $n_1 = n_2 = n/2$ , то скорости звука определяются выражением  $s_{\pm} = \sqrt{(\gamma_{11} \pm \gamma_{12})n/2M}$  (см., например, [47]). Для двухкомпонентного конденсата пар

$$s_{+} = \sqrt{\frac{(2\gamma_d + \gamma_{ex})n}{2M}}, \quad s_{-} = \sqrt{\frac{\gamma_{ex}n}{2M}}. \quad (36)$$

Скорость  $s_{-}$  является вещественной при  $\gamma_{ex} > 0$ . В обратном случае  $\gamma_{ex} < 0$  однородная двухкомпонентная фаза будет неустойчивой относительно пространственного расслоения на компоненты. Если в данной области имеется только одна сверхтекучая компонента, ей отвечает одна коллективная мода. Спектр этой

моды при малых волновых векторах является акустическим со скоростью

$$s = \sqrt{\frac{(\gamma_d + \gamma_{ex})n}{M}}. \quad (37)$$

В общем случае сумма  $\gamma_d + \gamma_{ex} = \gamma_{11}$  также может быть отрицательной. В этой ситуации расслоенная фаза была бы неустойчивой относительно образования капель плотной фазы, однако, как показано ниже, в нашей модели величина  $\gamma_{11}$  остается положительной при всех  $d$ .

Перейдем к нахождению спектра возбуждений при конечных волновых векторах. Мы ограничимся анализом случая, когда имеет место расслоение. Будем использовать уравнение (28), модифицированное с учетом того, что в данной области пространства присутствует только одна компонента. Взаимодействием между компонентами на далеких расстояниях будем пренебрегать. Рассмотрим функцию  $\Psi$ , зависящую от времени, и заменим левую часть уравнения (28) на временную производную (здесь и ниже индекс компоненты будем опускать). В результате приходим к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{R}_{12}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}_{12}}^2 \Psi(\mathbf{R}_{12}, t) + \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 [A[\mathbf{r}_i] \Psi(\mathbf{R}_{12}, t) |\Psi(\mathbf{R}_{34}, t)|^2 + B[\mathbf{r}_i] \Psi(\mathbf{R}_{32}, t) \Psi^*(\mathbf{R}_{34}, t) \Psi(\mathbf{R}_{14}, t)]. \quad (38)$$

Полученное уравнение представляет собой модифицированный вариант уравнения Гросса–Питаевского.

Запишем функцию  $\Psi(\mathbf{R}, t)$  в виде суммы однородного решения и малой поправки, представляющей собой монохроматическую плоскую волну,

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \sqrt{n} + e^{-\frac{i\tilde{\mu}t}{\hbar}} \left( u_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - \omega t)} + v_{\mathbf{k}}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - \omega t)} \right). \quad (39)$$

Химический потенциал в (39) находится из (28) и равен  $\tilde{\mu} = (\gamma_d + \gamma_{ex})n$ . Записывая (38) в линейном по коэффициентам  $u$  и  $v$  приближении, приходим к системе уравнений для этих коэффициентов

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k}} + (\gamma_d(\mathbf{k}) + \gamma_{ex}^{(1)}(\mathbf{k}))n & (\gamma_d(\mathbf{k}) + \gamma_{ex}^{(2)}(\mathbf{k}))n \\ (\gamma_d(\mathbf{k}) + \gamma_{ex}^{(2)}(\mathbf{k}))n & \varepsilon_{\mathbf{k}} + (\gamma_d(\mathbf{k}) + \gamma_{ex}^{(1)}(\mathbf{k}))n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}} \\ -v_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Здесь  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2M$ ,

$$\gamma_d(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 A[\mathbf{r}_i] e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{34} - \mathbf{R}_{12})}, \quad (41)$$

$$\gamma_{ex}^{(1)}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 B[\mathbf{r}_i] \left( e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{32} - \mathbf{R}_{12})} + e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}_{14} - \mathbf{R}_{12})} - 1 \right), \quad (42)$$

и

$$\gamma_{ex}^{(2)}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 B[\mathbf{r}_i] e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_{34} - \mathbf{R}_{12})}. \quad (43)$$

Величины (41)–(43) можно выразить через фурье-компоненту волновой функции  $\varphi_0(\mathbf{r})$ . В общем случае соответствующие выражения имеют достаточно громоздкий вид. Мы приводим их в приложении. В пределе  $k \rightarrow 0$  эти величины сводятся к введенным ранее постоянным  $\gamma_d(0) = \gamma_d$ ,  $\gamma_{ex}^{(1)}(0) = \gamma_{ex}^{(2)}(0) = \gamma_{ex}$ . Используя для функции  $\varphi_0(\mathbf{q})$  выражение (35), что соответствует пределу больших  $d$ , и ограничиваясь случаем равных масс электрона и дырки, получим следующие аналитические выражения для функций (41)–(43):

$$\gamma_d(k) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon k} (1 - e^{-kd}) e^{-\frac{k^2 r_0^2}{8}}, \quad (45)$$

$$\gamma_{ex}^{(1)}(k) = -\frac{4\pi e^2 r_0}{\varepsilon} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( e^{-\frac{k^2 r_0^2}{16}} I_0\left(\frac{k^2 r_0^2}{16}\right) + e^{-\frac{k^2 r_0^2}{8}} - 1 \right) - 2e^{-\frac{k^2 r_0^2}{8}} f(d, k/4) + f(d, 0) \right], \quad (46)$$

$$\gamma_{ex}^{(2)}(k) = -\frac{4\pi e^2 r_0}{\varepsilon} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{3k^2 r_0^2}{16}} I_0\left(\frac{k^2 r_0^2}{16}\right) - e^{-\frac{k^2 r_0^2}{4}} \frac{f(d, k/2) + f(d, 0)}{2} \right]. \quad (47)$$

В этих выражениях  $I_0(x)$  есть модифицированная функция Бесселя, а функция  $f(d, k)$  определена через интеграл

$$f(d, k) = \int_0^\infty e^{-\frac{3p^2}{8} - \frac{pd}{r_0}} I_0(pk r_0) dp. \quad (48)$$

При  $k = 0$  эту функцию можно записать через дополнительную функцию ошибок

$$f(d, 0) = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \exp\left(\frac{2d^2}{3r_0^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d}{r_0}\right). \quad (49)$$

Величины  $\gamma_d(\mathbf{k})$ ,  $\gamma_{ex}^{(1,2)}(\mathbf{k})$  в рассматриваемой системе зависят только от модуля волнового вектора.

Приравняв нулю детерминант системы (40), получим спектр коллективной моды

$$\hbar\omega(k) = \sqrt{(\varepsilon_k + [\gamma_{ex}^{(1)}(k) - \gamma_{ex}^{(2)}(k)]n)(\varepsilon_k + [2\gamma_d(k) + \gamma_{ex}^{(1)}(k) + \gamma_{ex}^{(2)}(k)]n)}. \quad (44)$$

Аналитическое выражение для константы  $\gamma_{ex}$ , вычисленное с использованием функции (49), имеет вид

$$\gamma_{ex} = -\frac{4\pi e^2 r_0}{\varepsilon} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \exp\left(\frac{2d^2}{3r_0^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d}{r_0}\right) \right]. \quad (50)$$

Это выражение справедливо и при произвольном отношении масс электрона и дырки.

На рис. 2 представлена зависимость константы  $\gamma_{11} = \gamma_d + \gamma_{ex}$  от  $d$ . Для  $d > 0,5a_0$  значение  $\gamma_{ex}$  получено из (50), а для  $d < 0,5a_0$  — из (31) с использованием функции (33), отвечающей пределу  $d \rightarrow 0$ . Как видно, зависимости достаточно хорошо сшиваются. Положительность константы  $\gamma_{11}$  при всех  $d$  означает, что используемое в работе приближение не предсказывает неустойчивости системы относительно образования капель (переход «газ–жидкость»).

Рассмотрим теперь характер изменения спектра коллективной моды при вариации плотности и межслоевого расстояния. На рис. 3 показан вычисленный с использованием функций (45)–(47) спектр коллективной моды при фиксированном  $d$  при разных плотностях. На рис. 4 представлено изменение спектра при фиксированной плотности при вариации межслоевого расстояния. Из приведенных зависимостей следует, что при увеличении плотности, либо при увеличении межслоевого расстояния минимум в спектре становится глубже. При достижении критической плотности  $n_c$ ,

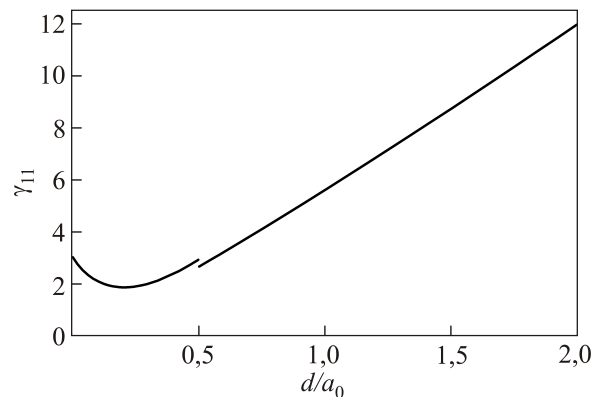


Рис. 2. Зависимость константы взаимодействия между парами (в единицах  $e^2 a_0 / \varepsilon$ ) от расстояния между слоями. Для  $d < 0,5a_0$  — расчет с использованием функции (32), для  $d > 0,5a_0$  — с использованием функции (34).



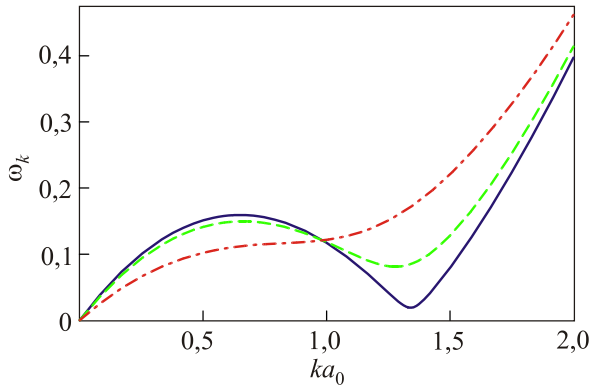


Рис. 3. Спектр возбуждений в сверхтекучем газе электрон-дырочных пар при  $d = 1,5a_0$  для  $na_0^2 = 0,115; 0,1; 0,05$  (сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые соответственно). Энергия дана в единицах  $\hbar^2/ma_0^2$  (удвоенный эффективный Ридберг).

либо критического расстояния  $d_c$  кривая касается оси абсцисс, а при превышении критического значения спектр становится мнимым. Последнее означает, что сверхтекучее состояние становится неустойчивым. Расстояние  $d_c$  зависит от  $n$ , а плотность  $n_c$  — от  $d$ . Рассчитанная с использованием функций (45)–(47) зависимость  $n_c(d)$  показана на рис. 5. Согласно этому рисунку, зависимость является степенной

$$n_c a_0^2 \approx C_1 \left( \frac{d}{a_0} \right)^\alpha, \quad (51)$$

где показатель степени  $\alpha = -2,62$ , а численный множитель  $C_1 = 0,335$ .

Предел низкой плотности соответствует размеру пар меньшему, чем среднее расстояние между парами. Это означает, что используемый в работе формализм применим, если выполняется условие

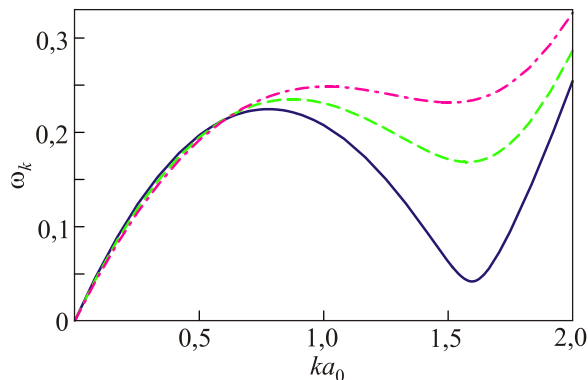


Рис. 4. Спектр возбуждений в сверхтекучем газе электрон-дырочных пар при  $na_0^2 = 0,2$  для  $d/a_0 = 1,21; 1,1; 1,0$  (сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые соответственно). Энергия в тех же единицах, что и на рис. 3.

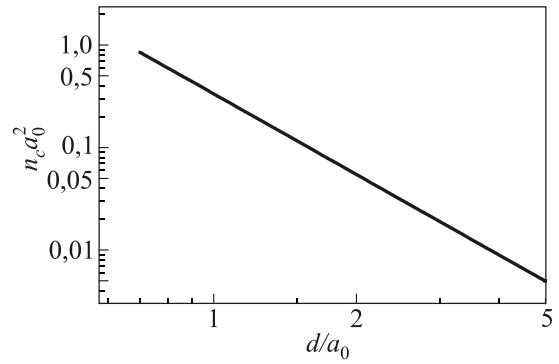


Рис. 5. Зависимость критической плотности пар от расстояния между слоями в двойном логарифмическом масштабе.

$$na_0^2 \lesssim \begin{cases} \left( \frac{d}{a_0} \right)^{-3/2}, & d > a_0 \\ 1, & d < a_0 \end{cases}. \quad (52)$$

Другими словами, говорить о критической плотности (51) имеет смысл, только если плотность удовлетворяет неравенству (52). Это имеем место при  $d \gtrsim 0,7a_0$ . При меньших  $d$  выражение (51) неприменимо. Можно ожидать, что с увеличением плотности будет иметь место БЭК–БКШ кроссовер, а не фазовый переход с образованием волны плотности.

Неустойчивость, связанную с появлением мягкой моды, можно интерпретировать как нестабильность по отношению к образованию дипольного вигнеровского кристалла. Представляет интерес сравнить условие (51) с условием образования такого кристалла, которое можно получить из полуклассических соображений. Плотность, соответствующая переходу в кристаллическую фазу, по порядку величины равна плотности, при которой средняя кинетическая энергия будет меньше энергии диполь-дипольного взаимодействия, т.е.  $\hbar^2 n/M \lesssim e^2 d^2 n^{3/2}/\epsilon$ . Это дает

$$n_c a_0^2 \approx \frac{m}{M} \left( \frac{d}{a_0} \right)^{-4}. \quad (53)$$

Сравнивая (53) с (51), приходим к выводу, что полуклассическая оценка дает заниженную величину критической плотности.

#### 4. Критическая температура и влияние на нее примесей

Оценим температуру сверхтекучего перехода в рассмотренной системе. Для двумерной системы этот переход является переходом Березинского–Костерлица–Таулеса и его температура определяется уравнением

$$T_c = \frac{\pi \hbar^2 n_s(T_c)}{2M}, \quad (54)$$

где  $n_s(T)$  — сверхтекучая плотность при температуре  $T$ . Сверхтекучую плотность можно найти как разницу между полной плотностью пар  $n$  и плотностью нормальной компоненты

$$n_s(T) = n - \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{MT} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} k^2 N_B(\hbar\omega_k) [1 + N_B(\hbar\omega_k)], \quad (55)$$

где  $N_B(E) = (e^{E/T} - 1)^{-1}$  — бозевская функция распределения. Основной вклад в интеграл в (55) вносят длинноволновые возбуждения. Аппроксимируя спектр  $\omega_k$  акустическим законом со скоростью  $s = \sqrt{\gamma_{11}n/M}$ , получаем следующее уравнения для  $T_c$

$$T_c = T_0 \left( 1 - C \frac{T_c^3}{T_0^3} \right), \quad (56)$$

где

$$T_0 = \frac{\pi \hbar^2 n}{2M} \quad (57)$$

и

$$C = \frac{3\pi^2 \zeta(3)}{16} \frac{\hbar^4}{M^2 \gamma_{11}^2}. \quad (58)$$

При  $d = a_0$  константа взаимодействия равна  $\gamma_{11} \approx 5e^2 a_0 / \varepsilon = 5\hbar^2 / m$  (см. рис. 2). Соответственно, константа  $C$  очень мала ( $C < 10^{-2}$ ), и уравнение (56) с хорошей точностью дает  $T_c = T_0$ . Если спектр возбуждений содержит глубокий минимум (при  $d \rightarrow d_c$ ), то критическая температура падает, обращаясь в нуль в точке неустойчивости.

Оценим теперь, как на температуру перехода в сверхтекучее состояние влияет взаимодействие пар с примесями. Как было показано в работах [48,49], взаимодействие бозе-частиц с короткодействующими примесями (потенциал примесей  $U_{\text{imp}}(\mathbf{R}) = \sum_i U_0 \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_i)$ , где  $\mathbf{R}_i$  — координаты примесей) приводит к уменьшению сверхтекучей плотности бозе-газа  $n_s = n_s^0 - \Delta n_s$  с

$$\Delta n_s = n_{\text{imp}} \frac{MU_0^2}{2\pi\hbar^2\gamma}, \quad (59)$$

где  $n_{\text{imp}}$  — концентрация примесей,  $M$  — масса бозе-частицы и  $\gamma$  — константа взаимодействия между частицами, которое предполагается точечным. Аналогичный результат можно получить и для электрон-дырочной системы, если добавить в правую часть уравнения (23) слагаемое, которое описывает взаимодействие пар с примесями. Это приводит к уравнению для  $\Psi(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}(\mathbf{R}_{12}) = & -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}_{12}}^2 \Psi(\mathbf{R}_{12}) + U_{\text{imp}}(\mathbf{R}_{12}) \Psi(\mathbf{R}_{12}) + \\ & + \int d\mathbf{r}_{12} d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \left[ A[\mathbf{r}_i] \Psi(\mathbf{R}_{12}) |\Psi(\mathbf{R}_{34})|^2 + B[\mathbf{r}_i] \Psi(\mathbf{R}_{32}) \Psi^*(\mathbf{R}_{34}) \Psi(\mathbf{R}_{14}) \right]. \end{aligned} \quad (60)$$

Считая взаимодействие с примесями слабым, будем искать решение (60) в виде

$$\Psi(\mathbf{R}) = \Psi_0 + \Psi_1(\mathbf{R}), \quad (61)$$

где  $\Psi_0 = \sqrt{n}$ . Подстановка (61) в (60) дает в линейном приближении следующее выражение для фурье-компоненты поправки  $\Psi_1$

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{q}) = & \frac{\sqrt{n}}{S[\hbar\omega(q)]^2} [U_{\text{imp}}(\mathbf{q})(\varepsilon_q + [\gamma_d(q) + \gamma_{ex}^{(1)}(q)]n) - \\ & - U_{\text{imp}}^*(-\mathbf{q})[\gamma_d(q) + \gamma_{ex}^{(2)}(q)]n]. \end{aligned} \quad (62)$$

Сверхтекучая плотность при  $T = 0$  определяется соотношением [48,49]

$$n_s = n - \frac{1}{2n} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \langle n_{\mathbf{q}} n_{-\mathbf{q}} \rangle, \quad (63)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по положению примесей и  $n_{\mathbf{q}} = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}} |\Psi(\mathbf{R})|^2$  есть фурье-

компонента плотности пар. Выражая  $n_{\mathbf{q}}$  через  $\Psi_1(\mathbf{q})$ , подставляя ее в (63) и вычисля среднее по положению примесей, приходим к выражению для поправки к сверхтекучей плотности

$$\Delta n_s = \frac{n_{\text{imp}}}{\pi} \int_0^\infty dq |U_{\mathbf{q}}^{(0)}|^2 \frac{nq}{[\varepsilon_q + 2\gamma(q)n]^2}, \quad (64)$$

где  $\gamma_q = \gamma_d(q) + [\gamma_{ex}^{(1)}(q) + \gamma_{ex}^{(2)}(q)]/2$  и  $U_{\mathbf{q}}^{(0)}$  — фурье-компонента потенциала примеси, расположенной в начале координат. Относительное изменение критической температуры можно оценить как  $\Delta T_c / T_c = -\Delta n_s / n$ . Заменяя  $\gamma_q$  на константу  $\gamma = \gamma_{11}$  и полагая  $U_{\mathbf{q}}^{(0)} = U_0$ , приходим к ответу (59).

В гетероструктурах со слоями доноров и акцепторов атомы допантов являются заряженными примесями. Обычно слои допантов находятся на достаточном удалении  $D$  от проводящих слоев ( $D \gg d$ ). Для таких примесей фурье-компонента  $U_{\mathbf{q}}^{(0)}$  равна

$$U_{\mathbf{q}}^{(0)} = (4\pi e^2 / \varepsilon q) \text{snh}(qd) \exp(-qD). \quad (65)$$

Будем считать, что значение  $d$  не очень близко к критическому, а расстояние  $D$  много больше длины «залечивания»  $\xi = \hbar/\sqrt{M\gamma_{11}n}$ . Подставляя (65) в (64), получаем

$$\frac{\Delta n_s}{n} \approx \pi \frac{n_{imp}}{n} \frac{M}{m} \left( \frac{e^2 a_0}{\varepsilon \gamma_{11}} \right) \left( \frac{\xi}{D} \right)^2 \left( \frac{d}{a_0} \right)^2. \quad (66)$$

Для  $n_{imp} = 2n$  (плотность допантов совпадает с плотностью носителей в проводящих слоях),  $d = a_0$  и  $M = 4m$  оценка (66) дает  $\Delta n_s/n \approx 5(\xi/D)^2$ . Найденная величина пропорциональна квадрату малого параметра и при условии  $\xi \ll D/\sqrt{5}$  влиянием заряженных примесей можно пренебречь. Отметим, что последнее неравенство задает ограничение снизу на плотность пар.

Для оценки влияния нейтральных примесей (структурных дефектов) можно воспользоваться уравнением (59), положив в нем  $U_0 = e^2 a$ , где  $a$  по порядку величины совпадает с параметром решетки. В результате получаем

$$\frac{\Delta n_s}{n} = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \frac{n_{imp}}{n} \frac{M}{m} \left( \frac{e^2 a_0}{\varepsilon \gamma_{11}} \right) \left( \frac{a}{a_0} \right)^2. \quad (67)$$

Полагая  $M = 4m$ ,  $\varepsilon = 13$  и  $\gamma_{11} = 5e^2 a_0/\varepsilon$  (что соответствует  $d = a_0$ ), имеем  $\Delta n_s/n \approx 20(n_{imp}/n)(a/a_0)^2$ . Так как  $a \ll a_0$ , то условия малости  $\Delta n_s/n$  сводится к требованию, чтобы плотность пар не снижалась до значений, существенно меньших плотности нейтральных дефектов.

Если расстояние между слоями близко к критическому и спектр возбуждений имеет глубокий минимум, то появляется значительный дополнительный вклад в интеграл в области волновых векторов, лежащих вблизи минимума. В этом случае приведенные выше оценки для  $\Delta n_s/n$  будут заниженными. При приближении  $d$  к  $d_c$  отрицательная перенормировка критической температуры за счет примесей должна возрасти.

Представляет интерес сравнить влияние примесей на сверхтекучесть пар в системах, рассмотренных в настоящей работе, и в квантовых холловских системах [50,51]. Особенностью последних является то, что при  $d = 0$  газ электрон-дырочных пар (магнитоэкситонов) становится идеальным [52]. В этом случае нормальная плотность (55) расходится и критическая температура обращается в нуль. С другой стороны, эффективная масса магнитоэкситонов растет при увеличении межслоевого расстояния, т.е. уменьшается параметр  $T_0$  в уравнении для критической температуры (56). Это приводит к тому, что существует оптимальное  $d$ , при котором влияние примесей и других неоднородностей на спаривание будет минимальным. В [50] этот результат получен в пределе низкой плотности пар  $v = 2\pi\ell_H^2 n \ll 1$ . В работе [51] аналогичный результат

получен для случая половинного заполнения уровня Ландау  $\nu = 1/2$ . В [51] также показано, что при наличии примесей в квантовых холловских системах, как и в системах, рассмотренных в настоящей работе, приближение расстояния между слоями к критическому приводит к резкому росту отрицательной поправки к сверхтекучей плотности и падению критической температуры.

## 5. Выводы

Использование формализма, основанного на волновой функции Келдыша, позволило определить область устойчивости сверхтекучего газа электрон-дырочных пар в двухслойных системах. Газ синглетных электрон-дырочных пар в рассматриваемых системах является двухкомпонентным. Компоненты можно различать, например, по спине электрона, входящего в пару. Мы установили, что при межслоевом расстоянии  $d \gtrsim 0,2a_0$  ( $a_0$  — эффективный борковский радиус пары) должно иметь место расслоение системы на компоненты. При меньшем  $d$  однородная смесь двух компонент будет устойчива относительно расслоения, однако в этом случае ожидается неустойчивость относительно образования газа биэкситонов. При большом межслоевом расстоянии развивается другой тип неустойчивости, а именно, неустойчивость относительно образования фазы типа вигнеровского кристалла (или волны плотности). Критическое расстояние  $d_c$ , отвечающее такой неустойчивости, растет при уменьшении плотности носителей. При фиксированном  $d$  неустойчивость наступает при достижении критической плотности  $n_c$ , которая является степенной функцией  $d$  с отрицательным показателем. При увеличении плотности носителей температура перехода системы в сверхтекучее состояние  $T_c$  возрастает прямо пропорционально плотности, но при приближении к критической плотности  $T_c$  резко падает. Взаимодействие с примесями приводит к понижению  $T_c$ , однако такой эффект будет существенным, только если концентрация примесей такого же порядка или больше, чем плотность пар.

Из всего перечисленного следует, что подбор параметров системы, при которых можно получить сверхтекучее состояние пар, является достаточно деликатной задачей. Расстояние между слоями ограничено как сверху, так и снизу, причем эти границы могут сдвигаться при изменении плотности. При уменьшении плотности интервал допустимых  $d$  расширяется, но при этом возрастает негативная роль примесей. Тем не менее, опираясь на полученные в работе результаты, мы считаем реальным достижения достаточно высоких критических температур. Приведем некоторые оценки. Гетероструктурам на основе AlGaAs отвечают параметры  $m_e = 0,067m_0$ ,  $m_h = 0,45m_0$  и  $\varepsilon = 13$  ( $m_0$  — масса свободного электрона). Эффективный борковский ради-

ус равен  $a_0 \approx 12$  нм. С учетом того, что в данном случае  $m/M \approx 0,11$  (а не 0,25, как в случае  $m_e = m_h$ ), критическая плотность  $n_c$  будет примерно в 2 раза меньше, чем следует из (51). Полагая  $d = 0,7a_0$  и  $n = 0,4a_0^{-2}$ , получаем оценку для критической температуры  $T_c \approx 15$  К. Для системы MoS<sub>2</sub>-MoTe<sub>2</sub> в матрице гексагонального BN  $m_e = 0,47m_0$ ,  $m_h = 0,62m_0$  и  $\varepsilon = 5$ . Эффективный боровский радиус равен  $a_0 \approx 1$  нм. Ввиду незначительного различия эффективных масс электрона и дырки соотношение (51) применимо без дополнительной поправки. Полагая  $n = 0,04a_0^{-2}$  (что соответствует  $d_c \approx 2,3a_0$ ), получаем  $T_c \approx 102$  К.

### Приложение

#### Общее выражение для спектра

Приведем общие выражения для функций, входящих в полученный выше ответ для спектра (44). Считаем, что потенциалы взаимодействия электронов и дырок удовлетворяют соотношению  $V_{ee}(r) = V_{hh}(r)$ . Искомые функции выражаются через фурье-компоненты потенциалов взаимодействия  $V_S(q) = \int d\mathbf{r} V_{ee}(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ ,  $V_D(q) = \int d\mathbf{r} V_{eh}(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$  и фурье-компоненту волновой функции связанного состояния  $\varphi_q = \int d\mathbf{r} \varphi(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ :

$$\gamma_k^{(d)} = V_S(k) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \left[ \varphi_{\mathbf{p}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}'-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}'} + \varphi_{\mathbf{p}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}'+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}'} \right] + V_D(k) \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \left[ \varphi_{\mathbf{p}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}'+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}'} + \varphi_{\mathbf{p}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}'-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{p}'} \right], \quad (\text{П.1})$$

$$\gamma_k^{(1)} = - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} V_S(p) \left[ \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} - \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \right] + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} V_D(p) \left[ \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_e \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}} \varphi_{\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^* \varphi_{\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} - \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \right], \quad (\text{П.2})$$

$$\gamma_k^{(2)} = - \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} V_S(p) \left[ \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \right] + \frac{1}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} V_D(p) \left[ \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}} + \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} + \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_e \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{q}-\frac{m_h \mathbf{k}}{M}}^* \varphi_{\mathbf{q}} \right] \quad (\text{П.3})$$

Если двухслойная система находится в однородной диэлектрической среде и диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$  совпадает с диэлектрической проницаемостью прослойки между электронным и дырочным проводящими слоями, а массы электрона и дырки одинаковы ( $m_e = m_h$ ), то интегралы (П.1)–(П.3) можно записать в более компактной форме:

$$\gamma_k^{(d)} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon k} (1 - e^{-kd}) \left[ \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \varphi_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \right]^2, \quad (\text{П.4})$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{(1)} = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} \left[ (\varphi_{\mathbf{q}}^2 \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}}^2 + \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varphi_{\mathbf{q}}^2 \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^2) - e^{-pd} \left( 2\varphi_{\mathbf{q}}^2 \varphi_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} - \varphi_{\mathbf{q}}^3 \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} \right) \right], \quad (\text{П.5})$$

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{(2)} = -\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \frac{1}{p} \left[ \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \frac{e^{-pd}}{2} \left( \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{q}}^2 \varphi_{\mathbf{q}+\frac{\mathbf{k}}{2}} \varphi_{\mathbf{q}+\mathbf{p}-\frac{\mathbf{k}}{2}} \right) \right]. \quad (\text{П.6})$$

В (П.4)–(П.6) функции  $\varphi_{\mathbf{q}}$  считаются вещественными.

1. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 556 (1975).
2. С.И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 251 (1976)].
3. Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
4. Н.А. Fertig, *Phys. Rev. B* **40**, 1087 (1989).
5. D. Yoshioka and A.H. MacDonald, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 4211 (1990).
6. X.G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1811 (1992).
7. K. Moon, H. Mori, K. Yang, S.M. Girvin, A.H. MacDonald, L. Zheng, D. Yoshioka, and S.C. Zhang, *Phys. Rev. B* **51**, 5138 (1995).
8. M. Kellogg, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036801 (2004).
9. E. Tutuc, M. Shayegan, and D.A. Huse, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 036802 (2004).
10. R.D. Wiersma, J.G.S. Lok, S. Kraus, W. Dietsche, K. von Klitzing, D. Schuh, M. Bichler, H.-P. Tranitz, and W. Wegscheider, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 266805 (2004).
11. B. Spielman, J.P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5808 (2000).
12. B. Spielman, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 036803 (2001).
13. D. Nandi, A.D.K. Finck, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Nature* **488**, 481 (2012).
14. H. Min, R. Bistritzer, J.-J. Su, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **78**, 121401(R) (2008).
15. Yu.E. Lozovik and A.A. Sokolik, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 61 (2008).
16. B. Seradjeh, H. Weber, and M. Franz, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 246404 (2008).
17. С.Н. Zhang and Y.N. Joglekar, *Phys. Rev. B* **77**, 233405 (2008).
18. Д.В. Филь, Л.Ю. Кравченко, *ФНТ* **35**, 904 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 712 (2009)].
19. M.Y. Kharitonov and K.B. Efetov, *Phys. Rev. B* **78**, 241401(R) (2008).
20. M.Y. Kharitonov and K.B. Efetov, *Semicond. Sci. Technol.* **25**, 034004 (2010).
21. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **3**, 428 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 116 (1977)].
22. Yu.E. Lozovik and V.I. Yudson, *Solid State Commun.* **21**, 211 (1977).
23. I. Sodemann, D.A. Pesin, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **85**, 195136 (2012).
24. Yu.E. Lozovik, S.L. Ogarkov, and A.A. Sokolik, *Phys. Rev. B* **86**, 045429 (2012).
25. R.V. Gorbachev, A.K. Geim, M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov, T. Tudorovskiy, I.V. Grigorieva, A.H. MacDonald, S.V. Morozov, K. Watanabe, T. Taniguchi, and L.A. Ponomarenko, *Nat. Phys.* **8**, 896 (2012).
26. M.P. Mink, H.T.C. Stoof, R.A. Duine, M. Polini, and G. Vignale, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 186402 (2012).
27. A.F. Croxall, K. Das Gupta, C.A. Nicoll, M. Thangaraj, H.E. Beere, I. Farrer, D.A. Ritchie, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 246801 (2008).
28. J.A. Seamons, C.P. Morath, J.L. Reno, and M.P. Lilly, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026804 (2009).
29. A. Gamucci, D. Spirito, M. Carrega, B. Karmakar, A. Lombardo, M. Bruna, L.N. Pfeiffer, K.W. West, A.C. Ferrari, M. Polini, and V. Pellegrini, *Nat. Commun.* **5**, 5824 (2014).
30. Y.N. Joglekar and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **64**, 155315 (2001).
31. A.R. Champagne, J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer, and K.W. West, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 096801 (2008).
32. Ю.Е. Лозовик, О.М. Берман, *ЖЭТФ* **111**, 1879 (1997).
33. M.Y.J. Tan, N.D. Drummond, and R.J. Needs, *Phys. Rev. B* **71**, 033303 (2005).
34. C. Schindler and R. Zimmermann, *Phys. Rev. B* **78**, 045313 (2008).
35. A.D. Meyerholen and M.M. Fogler, *Phys. Rev. B* **78**, 235307 (2008).
36. R.M. Lee, N.D. Drummond, and R.J. Needs, *Phys. Rev. B* **79**, 125308 (2009).
37. Л.В. Келдыш, *Когерентные состояния экситонов*. в кн: *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972).
38. J.R. Klauder and B.S. Skagerstam, *Coherent States Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore (1985).
39. A.I. Bezuglyj and S.I. Shevchenko, *Phys. Rev. B* **75**, 075322 (2007).
40. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **35**, 479 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 373 (2009)].
41. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
42. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].

43. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 596 (2010)].
44. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **38**, 1147 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 905 (2012)].
45. C.J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, London (2002).
46. F.-C. Wu, F. Xue, and A.H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **92**, 165121 (2015).
47. L.Yu. Kravchenko and D.V. Fil, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 612 (2008).
48. С.И. Шевченко, *ФНТ* **9**, 139 (1983) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **9**, 69 (1983)].
49. С.И. Шевченко, *ФНТ* **9**, 1013 (1983) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **9**, 523 (1983)].
50. А.И. Безуглый, С.И. Шевченко, *ФНТ* **37**, 736 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 583 (2009)].
51. A.A. Pikalov and D.V. Fil, *Nanoscale Research Lett.* **7**, 145 (2012).
52. И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик, *ЖЭТФ* **80**, 1488 (1981).

## Superfluidity of a rarefied gas of electron-hole pairs in a bilayer system

D.V. Fil and S.I. Shevchenko

The conditions of stability of the superfluid phase in double layer systems with pairing of spatially separated electrons and holes in the low density limit are studied. The general expression for the collective excitation spectrum is obtained. It is shown that under increase in the distance  $d$  between the layers the minimum emerges in the excitation spectrum. When  $d$  reaches the critical value the superfluid state becomes unstable relative to the formation of a kind of the Wigner crystal state. The same instability occurs at fixed  $d$  under increase in the density of carries. It is established that the critical distance and the critical density are related to each other by the inverse power function. The impact of the impurities on the temperature of the superfluid transition is investigated and the conditions of small impact are established. It is shown that in the rarefied system the critical temperature  $T_c \approx 100$  K can be reached.

PACS: **73.21.-b** Electron states and collective excitations in multilayers, quantum wells, mesoscopic, and nanoscale systems.

Keywords: electron-hole pairing, exciton superfluidity, coherent states.