

Аномальная дисперсия поверхностных и волноводных мод в пластине слоистого сверхпроводника

С.С. Апостолов^{1,2}, В.И. Гавриленко², З.А. Майзелис^{1,2}, В.А. Ямпольский^{1,2}

¹Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины
ул. Академика Проскуры, 12, г. Харьков, 61085, Украина

²Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: yam@ire.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 25 августа 2016 г., опубликована онлайн 26 декабря 2016 г.

Теоретически изучены линейные поверхностные и волноводные моды поперечно-магнитной поляризации, распространяющиеся в пластине слоистого сверхпроводника в однородном диэлектрическом окружении. Предполагается, что сверхпроводящие слои ортогональны поверхности пластины и волны распространяются поперек слоев. Получены дисперсионные соотношения для симметричных и антисимметричных по магнитному полю мод. Показано, что в определенной области частот и волновых чисел дисперсия таких мод оказывается аномальной. Найдены условия, при которых групповая скорость таких мод обращается в нуль.

Теоретично вивчено лінійні поверхневі і хвильоводні моди поперечно-магнітної поляризації, що поширюються в пластині шаруватого надпровідника в однорідному діелектричному оточенні. Передбачається, що надпровідні шари ортогональні поверхні пластины та хвилі поширюються поперек шарів. Отримано дисперсійні співвідношення для симетричних і антисиметричних по магнітному полю мод. Показано, що в певній області частот і хвильових чисел дисперсія таких мод виявляється аномальною. Знайдено умови, за яких групова швидкість таких мод звертається в нуль.

PACS: 74.72.-h Купратные сверхпроводники;
74.50.+g Туннельные эффекты; эффекты Джозефсона;
74.78.Fk Мультислои, сверхрешетки, гетероструктуры.

Ключевые слова: слоистый сверхпроводник, поверхностные волноводные моды, поляризация.

1. Введение

Материалы с аномальной дисперсией привлекают повышенное внимание после недавних наблюдений в них отрицательного преломления микроволн [1] и теоретического предсказания возможности так называемой идеальной фокусировки света [2]. Часто отправным пунктом в исследовании отрицательного преломления считается работа Веселаго 1967 [3], хотя понимание сути этого явления было достигнуто Мандельштамом еще в 1940-х годах [4], подробнее см. обзор [5].

Первые метаматериалы с отрицательным преломлением представляли собой субволновые структуры, обладающие одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями (см., например, [6]). К сожалению, такие структуры, во-первых, требуют специальных методов изготовления, а во-вторых, не

являются полностью субволновыми, страдают из-за сильной пространственной дисперсии и могут приводить к значительным потерям при совпадении магнитного и электрического резонансов (см., например, [7]). Другой способ создания метаматериала с отрицательным преломлением состоит в изготовлении одноосной анизотропной структуры, в которой продольная и поперечная компоненты тензора диэлектрической проницаемости имеют разные знаки [8,9]. Такие материалы более привлекательны с практической точки зрения, поскольку более просты в изготовлении в сравнении с упомянутыми ранее субволновыми структурами, к тому же в отсутствие отрицательной магнитной проницаемости не возникает дополнительных потерь, связанных с совпадением резонансов.

В качестве материала с отрицательным преломлением могут выступать высокотемпературные сверх-

проводники (подробнее см. [10,11]), представляющие собой слоистую структуру с сильной одноосной анизотропией, например, кристаллы $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ или $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$. Продольная ϵ_{ab} и поперечная ϵ_c компоненты тензора диэлектрической проницаемости таких сред могут иметь разные знаки в широком диапазоне частот, приводя к отрицательному преломлению и аномальной дисперсии электромагнитных волн. Экспериментальные исследования проводимости поперек слоев, т.е. вдоль кристаллографической оси c (см., например, [12]), показали, что сверхпроводящие слои в таких структурах электродинамически связаны за счет внутреннего эффекта Джозефсона. Электромагнитные возбуждения в такой сильно анизотропной плазме, так называемые джозефсоновские плазменные волны, возникают на частотах терагерцевого диапазона, перспективного с точки зрения различных приложений в физике, химии, астрономии, системах безопасности, медицинской диагностике, контроле окружающей среды (см., например, [13,14] и ссылки внутри).

Как и волны в обычной плазме, джозефсоновские плазменные волны распространяются при частотах, превышающих пороговую частоту [13] — джозефсоновскую плазменную частоту ω_J . В работах [11,15,16] было показано, что вдоль границы раздела слоистый сверхпроводник–вакуум, как и вдоль границы обычной плазмы, могут распространяться поверхностные колебания — джозефсоновские поверхностные плазменные волны. Однако, в отличие от обычной плазмы, поверхностные волны в слоистых сверхпроводниках могут распространяться с частотами не только ниже, но и выше плазменной частоты [11].

Аналогично поверхностным волнам в полубесконечном слоистом сверхпроводнике, в пластине слоистого сверхпроводника также могут распространяться волны, которые локализованы на пластине и затухают вне ее при удалении от поверхности. В зависимости от структуры электромагнитного поля этих волн мы будем говорить либо о поверхностных модах, если поле затухает в глубь пластины, либо о волноводных модах, если поле осциллирует внутри нее. В работе [17] теоретически изучены такие волны для случая, когда сверхпроводящие слои параллельны граням пластины. В настоящей работе мы рассматриваем собственные локализованные электромагнитные волны в пластине, сверхпроводящие слои которой перпендикулярны ее границам. Вследствие анизотропии слоистого сверхпроводника дисперсия мод в такой геометрии будет зависеть от направления их распространения. Мы сконцентрируем внимание на волнах, распространяющихся перпендикулярно слоям, поскольку в этом случае, во-первых, мы будем наблюдать аномальную дисперсию волн, и, во-вторых, мы можем ограничиться рассмотрением волн с поперечно-магнитной (ТМ) поляризацией, что существенно упрощает решение задачи. Предсказание в такой системе

аномальной дисперсии говорит о возможности отрицательного преломления поверхностных волн, распространяющихся вдоль поверхности пластин.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе обсуждается постановка задачи и определяются зависимости компонент электромагнитного поля от координат и времени в пластине слоистого сверхпроводника и в окружающем пространстве. В конце этого раздела выведены дисперсионные соотношения для изучаемых собственных мод ТМ-поляризации. В третьем разделе проводится подробный анализ полученных дисперсионных соотношений. Последний раздел посвящен определению диапазонов параметров, при которых наблюдается аномальная дисперсия собственных мод.

2. Распределение электромагнитного поля

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим пластину слоистого сверхпроводника толщины L , слои которого перпендикулярны ее граням. Пластина помещена в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_d . Система координат выбрана следующим образом: оси x и y направлены параллельно слоям сверхпроводника, перпендикулярно и параллельно поверхностям пластины соответственно, а ось z сонаправлена с кристаллографической осью c . Поверхностям пластины соответствуют плоскости $x = \pm L/2$. Геометрия задачи схематично изображена на рис. 1.

Объектом изучения являются собственные электромагнитные моды ТМ поляризации с частотой ω , распространяющиеся вдоль пластины с продольной компонентой волнового вектора k_{\parallel} строго перпендикулярной слоям сверхпроводника. Магнитное и электрическое поля в такой волне представляются в виде

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \{0, H(x), 0\} \exp(ik_{\parallel}z - i\omega t),$$

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \{E_x(x), 0, E_z(x)\} \exp(ik_{\parallel}z - i\omega t). \quad (1)$$

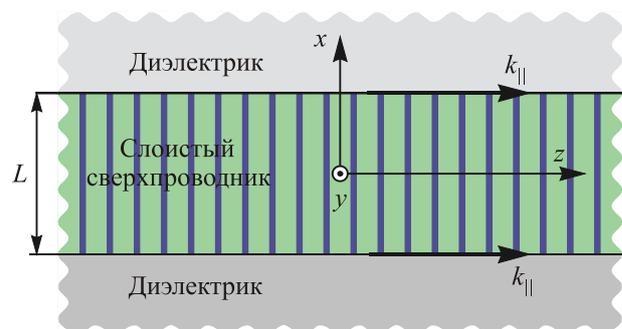


Рис. 1. (Онлайн в цвете) Геометрия задачи. Волна с продольной компонентой волнового вектора k_{\parallel} распространяется вдоль пластины слоистого сверхпроводника толщины L , помещенной в диэлектрик с проницаемостью ϵ_d .

Обратим внимание на то, что в силу симметрии задачи относительно плоскости $x = 0$ собственные моды также обладают симметрией. В данном случае мы можем искать решение задачи в виде симметричных и антисимметричных по магнитному полю мод.

2.2. Поля в диэлектрике

Как уже упоминалось во Введении, электромагнитное поле искомой волны затухает в диэлектрике при удалении от поверхности пластины, т.е. волна локализована вблизи пластины. Уравнения Максвелла дают следующие выражения для компонент электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_x^\pm(x) &= \frac{ck_{\parallel}}{\omega\epsilon_d} h^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)], \\ E_z^\pm(x) &= \mp \frac{ick_d}{\omega\epsilon_d} h^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)], \\ H^\pm(x) &= h^\pm \exp[k_d(\mp x + L/2)], \end{aligned} \quad (2)$$

где верхний индекс $+$ или $-$ подразумевает верхнее ($x > L/2$) или нижнее ($x < -L/2$) полупространство, заполненное диэлектриком, параметр

$$k_d = \sqrt{k_{\parallel}^2 - \omega^2/c^2 \epsilon_d} > 0 \quad (3)$$

определяет скорость убывания электромагнитного поля при удалении от пластины, h^+ и h^- — амплитуды магнитного поля на верхней и нижней гранях пластины соответственно, c — скорость света. В силу симметрии задачи $h^+ = h^-$ для симметричных и $h^+ = -h^-$ для антисимметричных по магнитному полю мод.

2.3. Поля в пластине слоистого сверхпроводника

При определении полей в слоистом сверхпроводнике мы будем считать пространственный масштаб изменения поля вдоль оси z существенно большим периода структуры. Это позволяет перейти к непрерывному пределу и использовать привычное волновое уравнение для векторного потенциала (см., например, [19]):

$$\text{grad div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\frac{\epsilon_s}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (4)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал, \mathbf{J} — плотность тока, ϵ_s — диэлектрическая проницаемость в промежутках между сверхпроводящими слоями. Векторный потенциал связан с электрическим \mathbf{E} и магнитным \mathbf{H} полями стандартными соотношениями:

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5)$$

скалярный потенциал предполагается равным нулю. Плотность тока вдоль слоев имеет ту же природу, что и в массивных сверхпроводниках, и может быть описана в терминах лондоновской модели:

$$J_x = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_x, \quad J_y = -\frac{c}{4\pi\lambda_{ab}^2} A_y, \quad (6)$$

где λ_{ab} — лондоновская глубина проникновения магнитного поля поперек слоев. Ток поперек слоев определяется эффектом Джозефсона и связан с калибровочно-инвариантной разностью фаз параметра порядка ϕ между соседними сверхпроводящими слоями:

$$J_z = J_c \sin \phi. \quad (7)$$

Здесь J_c — максимальная плотность джозефсоновского тока.

Отметим, что компонента E_z электрического поля может вызывать нарушение электронейтральности сверхпроводящих слоев, что приводит к дополнительной, так называемой емкостной, связи между ними. Этой связью можно пренебречь в тех случаях, когда мал параметр емкостной связи $\alpha = R_D^2 \epsilon_s / sd$, где R_D — дебаевский радиус экранировки (см. работу [20], в которой получено дисперсионное уравнение для джозефсоновских плазменных волн с учетом емкостной связи). Согласно теоретическим оценкам для кристаллов $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ величина $\alpha \sim 0,05-0,1$. Экспериментальные исследования [21,22] показали, что емкостная связь может оказывать влияние на распространение только продольных волн с волновым вектором, направленным поперек слоев. В рассматриваемой же здесь задаче о распространении волн вдоль пластины можно пренебречь нарушением электронейтральности сверхпроводящих слоев, и записать соотношение между векторным потенциалом и разностью фаз в следующем виде:

$$A_z = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \phi, \quad (8)$$

где $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока.

Обычно электромагнитные поля ТМ поляризации в слоистом сверхпроводнике находятся с помощью решения системы связанных синусоидальных уравнений Гордона для калибровочно-инвариантной разности фаз ϕ (см., например, [13]). Эта система в непрерывном пределе эквивалентна уравнению (4) с материальными соотношениями (6), (7) и (8), на которые мы и опираемся в дальнейших вычислениях. Для линейных волн разность фаз мала, $|\phi| \ll 1$, и слагаемое $\sin \phi$ в уравнении (7) может быть заменено на ϕ . Тогда волновое уравнение (4) становится линейным и электромагнитные поля в пластине слоистого сверхпроводника (при $|x| < L/2$) могут быть представлены в виде

$$H^s(x) = h_{\text{even}} \cos k_s x + h_{\text{odd}} \sin k_s x, \quad (1 - \Omega^{-2}) \frac{\epsilon \kappa_d}{\kappa_s} = \text{tg}(\kappa_s \Lambda) \quad (15)$$

$$E_x^s(x) = \frac{ck_{\parallel}}{\epsilon_{ab} \omega} H^s(x), \quad (9) \quad \text{для симметричных по магнитному полю и}$$

$$E_z^s(x) = \frac{ick_s}{\epsilon_c \omega} [h_{\text{even}} \sin k_s x - h_{\text{odd}} \cos k_s x], \quad (\Omega^{-2} - 1) \frac{\epsilon \kappa_d}{\kappa_s} = \text{ctg}(\kappa_s \Lambda) \quad (16)$$

где индексы «even» и «odd» обозначают четную и нечетную по магнитному полю компоненты электромагнитных полей как функции x относительно середины пластины $x = 0$; k_s — поперечная по отношению к оси x проекция волнового вектора,

$$k_s^2 = \frac{\epsilon_c k_{\parallel}^2}{\epsilon_{ab}} - \frac{\epsilon_c \omega^2}{c^2}, \quad (10)$$

$\omega_J = (8\pi edJ_c / \hbar \epsilon_c)^{1/2}$ — джозефсоновская плазменная частота, d — толщина диэлектрических слоев, e — элементарный заряд. Продольная ϵ_{ab} и поперечная ϵ_c компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости слоистого сверхпроводника, $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{ab}$ и $\epsilon_{zz} = \epsilon_c$, определяются следующим образом:

$$\epsilon_{ab}(\omega) = \epsilon_s - \frac{c^2}{\lambda_{ab}^2 \omega^2}, \quad \epsilon_c(\omega) = \epsilon_s - \frac{c^2}{\lambda_c^2 \omega^2}, \quad (11)$$

где введена в рассмотрение $\lambda_c = c / (\omega_J \epsilon_s^{1/2})$ — глубина проникновения магнитного поля вдоль слоев.

2.4. Дисперсионные соотношения для симметричных и антисимметричных мод

Для вывода дисперсионных соотношений нам необходимо записать условия непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах пластины. Как уже было сказано, система обладает симметрией относительно плоскости $x = 0$, что приводит к симметричности/антисимметричности собственных мод. В этом случае нам достаточно использовать непрерывность поля только на верхней грани пластины,

$$H^+(x = L/2) = H^s(x = L/2),$$

$$E_z^+(x = L/2) = E_z^s(x = L/2), \quad (12)$$

и условие четности

$$h^- = h^+, \quad h_{\text{odd}} = 0, \quad (13)$$

или нечетности

$$h^- = -h^+, \quad h_{\text{even}} = 0, \quad (14)$$

магнитного поля.

В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных амплитуд полей. Определитель этой системы должен равняться нулю, что дает нам дисперсионные соотношения

для антисимметричных собственных мод. Здесь мы ввели безразмерные параметры,

$$\kappa_s = k_s \lambda_c = \sqrt{(\Omega^2 - 1)[1 + \kappa^2 / (1 - \Omega^2 / \gamma^2)]},$$

$$\kappa_d = k_d \lambda_c = \sqrt{\gamma^2 \kappa^2 - \epsilon^{-1} \Omega^2}, \quad \kappa = k_{\parallel} \lambda_{ab}, \quad (17)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_J}, \quad \Lambda = \frac{L}{2\lambda_c}, \quad \gamma = \frac{\lambda_c}{\lambda_{ab}}, \quad \epsilon = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_d}.$$

Эти два дисперсионных соотношения могут быть объединены в одно:

$$\frac{1}{2} \left[(\Omega^{-2} - 1) \frac{\epsilon \kappa_d}{\kappa_s} - (\Omega^{-2} - 1)^{-1} \frac{\kappa_s}{\epsilon \kappa_d} \right] = \text{ctg}(2\kappa_s \Lambda). \quad (18)$$

3. Анализ дисперсионных соотношений

Мы начнем анализ дисперсионных соотношений (15) и (16) с определения областей параметров, в которых изучаемые волны являются либо поверхностными, либо волноводными модами. Поверхностные моды, которым соответствует $\kappa_s^2 < 0$, могут существовать только с частотами ниже джозефсоновской плазменной частоты,

$$\Omega < 1. \quad (19)$$

Волноводные моды ($\kappa_s^2 > 0$) существуют как при частотах ниже γ ,

$$1 < \Omega < \gamma, \quad (20)$$

так и при более высоких частотах в области

$$\Omega > \gamma \sqrt{\kappa^2 + 1}. \quad (21)$$

Область над световой линией $\Omega = \sqrt{\epsilon} \gamma \kappa$ запрещена, поскольку величина κ_d в уравнении (3) должна быть вещественной, т.е. частота волноводных мод ограничена следующим условием:

$$\Omega < \sqrt{\epsilon} \gamma \kappa. \quad (22)$$

Обратим внимание на то, что в случае, когда проницаемость ϵ_s диэлектрических слоев в пластине меньше проницаемости ϵ_d окружающего диэлектрика, т.е. при $\epsilon < 1$, высокочастотная область (21) для волноводных мод оказывается запрещенной благодаря условию (22).

Промежуточная область частот

$$\gamma < \Omega < \gamma\sqrt{\kappa^2 + 1} \quad (23)$$

является запрещенной, поскольку в этой области κ_s принимает мнимые значения, и дисперсионные соотношения (15) и (16) становятся неразрешимыми.

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые, описываемые уравнениями (15) для симметричных (сплошные линии) и (16) для антисимметричных (штриховые линии) собственных мод. Серой заливкой обозначены запрещенные области.

В дальнейшем анализе мы будем предполагать, что параметр анизотропии γ достаточно велик, $\gamma \gg 1$, например, $\gamma \gtrsim 100$ для $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$. Это означает, что область (21) высокочастотных мод соответствует очень высоким частотам, при которых может разрушаться сверхпроводимость. Для таких больших γ мы ограничимся исследованием только низкочастотной области (20) с частотами $\Omega \ll \gamma$. В конце раздела мы кратко обсудим область частот $\Omega \sim \gamma$ для слоистых сверхпроводников с не очень сильной анизотропией, например, $\gamma \gtrsim 5$ для $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$. Также мы будем предполагать, что внешнее окружение не слишком оптически плотное, $\epsilon \gg \gamma^{-1}$, т.е. $\epsilon_d \ll \gamma\epsilon_s$.

3.1. Поверхностные моды, $\Omega < 1$

В области $\Omega < 1$ дисперсионные соотношения (15) и (16) определяют кривые, поведение которых качественно отличается.

Кривая, соответствующая антисимметричным собственным модам (см. штриховую кривую на рис. 3 и в области $\Omega < 1$ на рис. 2), начинается в точке с $\Omega = 0$ и $\kappa = 0$, монотонно возрастает при увеличении κ и стремится асимптотически к $\Omega = \Omega_\infty$, где

$$\Omega_\infty \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2\epsilon^2}. \quad (24)$$

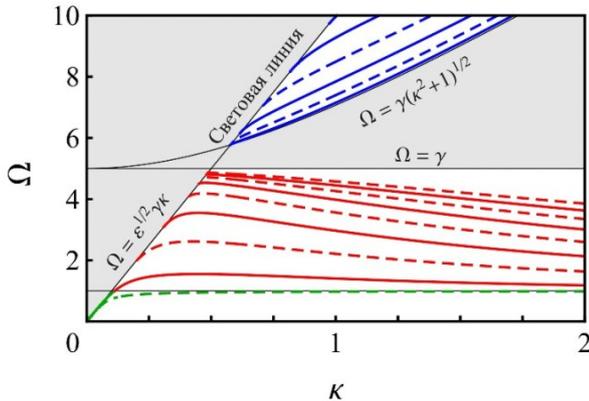


Рис. 2. (Онлайн в цвете) Дисперсионные кривые $\Omega(\kappa)$ для симметричных (сплошные линии, уравнение (15)) и антисимметричных (штриховые линии, уравнение (16)) собственных мод. Параметры: $\gamma = 5$, $\epsilon = 4$, $\Lambda = 1$.

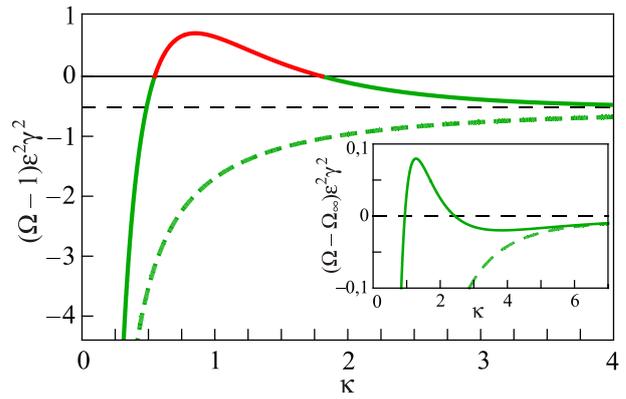


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Дисперсионные кривые $\Omega(\kappa)$ для симметричных (сплошная кривая) и антисимметричных (штриховая кривая) собственных мод, расположенных в области $\Omega < 1$ и частично в области $\Omega > 1$. Горизонтальные прямые соответствуют $\Omega = 1$ (сплошная прямая) и $\Omega = \Omega_\infty$ (штриховая прямая), где Ω_∞ определяется уравнением (24). На вертикальных осях частота Ω отсчитана от 1 (основная панель) и от Ω_∞ (вставка), а также нормирована на $1/\epsilon^2\gamma^2$. Параметры: $\gamma = 5$, $\epsilon = 4$, $\Lambda = 8,5$ (основная панель) и $\Lambda = 12$ (вставка).

Здесь и далее приближенное равенство \approx обозначает асимптотическое выражение, справедливое в условиях сильной анизотропии, при $\gamma \gg 1$.

Дисперсионная кривая для антисимметричных мод при малых значениях $\kappa \ll 1$ может быть описана как функция $\kappa(\Omega)$ в явном виде,

$$\kappa(\Omega) = \frac{\Omega}{\gamma\epsilon} \sqrt{\epsilon + \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2} \text{cth}^2(\Lambda\sqrt{1 - \Omega^2})}. \quad (25)$$

При $\kappa \gtrsim 1$ это выражение также приближенно описывает дисперсионную кривую, но оказывается недостаточно точным, если нам важно отклонение кривой от $\Omega = 1$. Для той части кривой, где Ω близко к 1, более точной является следующая асимптотика:

$$\Omega(\kappa) = \Omega_\infty \sqrt{1 - \frac{\alpha_\infty}{\kappa^2}}, \quad \alpha_\infty \approx \frac{1}{\gamma^2\epsilon^2}. \quad (26)$$

Кривая, соответствующая симметричным собственным модам (см. сплошную кривую на рис. 3), также начинается в точке с $\Omega = 0$, $\kappa = 0$ и ведет себя при малых $\kappa \ll 1$, как

$$\kappa(\Omega) = \frac{\Omega}{\gamma\epsilon} \sqrt{\epsilon + \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2} \text{th}^2(\Lambda\sqrt{1 - \Omega^2})}, \quad (27)$$

а при достаточно больших $\kappa \gg \gamma\epsilon/\Lambda$ — как функция (26). Однако ее поведение в промежуточной области качественно зависит от безразмерной толщины пластины Λ . Если толщина пластины относительно мала, $\Lambda < \Lambda_1$, где

$$\Lambda_1 = \frac{(\gamma^2 - 1)\epsilon}{2\sqrt{\gamma^2 - 1 + \epsilon^{-1}}} \approx \frac{\gamma\epsilon}{2}, \quad (28)$$

то дисперсионная кривая для симметричных мод располагается не только в частотной области поверхностных волн, $\Omega < 1$, а частично заходит в область более высоких частот, $\Omega > 1$, где она описывает волноводную моду (см. сплошную кривую на главной панели рис. 3). При этом она пересекает прямую $\Omega = 1$ дважды: первый раз при $\kappa = \kappa_0$,

$$\kappa_0 \approx \frac{2\sqrt{\Lambda^2 + \epsilon}}{\gamma\epsilon + \sqrt{\gamma^2\epsilon^2 - 4\Lambda^2}}, \quad (29)$$

когда $\Omega(\kappa)$ возрастает, а второй раз при $\kappa = \kappa'_0$,

$$\kappa'_0 \approx \frac{\gamma\epsilon + \sqrt{\gamma^2\epsilon^2 - 4\Lambda^2}}{2\Lambda}, \quad (30)$$

где $\Omega(\kappa)$ убывает.

Если же толщина пластины принимает достаточно большие значения, $\Lambda > \Lambda_1$, то дисперсионная кривая для симметричных мод полностью лежит в области поверхностных волн, $\Omega > 1$. При значениях толщины меньших определенного критического значения, $\Lambda < \Lambda_2 \approx \beta\gamma\epsilon$, где постоянная $\beta = 0,706\dots$, дисперсионная кривая имеет точки максимума и минимума (см. вставку к рис. 3). Если же $\Lambda > \Lambda_2$, то дисперсионная кривая становится монотонной и при $\Lambda \rightarrow \infty$ сливается с кривой, соответствующей поверхностным антисимметричным модам. Последнее обстоятельство легко объясняется с физической точки зрения: при такой большой толщине пластины поля, локализованные вблизи разных ее поверхностей, не взаимодействуют друг с другом, и пластину можно рассматривать как полубесконечный образец. Такие поверхностные моды изучались в работе [18].

Обратим внимание на то, что изучаемые дисперсионные кривые при значениях Ω близких к 1, $|\Omega - 1| \ll 1$, могут быть описаны следующим единым асимптотическим выражением:

$$\Omega(\kappa) = \sqrt{1 - \frac{1}{\Lambda^2(\kappa^2 + 1)} I^2 \left[\frac{\gamma\epsilon\kappa}{\Lambda(\kappa^2 + 1)} \right]}, \quad (31)$$

где функция $I[y]$ — это обратная функция к $\text{th } x/x$, т.е.

$$I \left[\frac{\text{th } x}{x} \right] = x, \quad (32)$$

для симметричных и к $\text{cth } x/x$,

$$I \left[\frac{\text{cth } x}{x} \right] = x, \quad (33)$$

для антисимметричных собственных мод.

Если толщина Λ имеет порядок $\gamma\epsilon$, то выражение (31) описывает дисперсионную кривую при всех $\kappa \gg 1/\gamma\epsilon$.

3.2. Волноводные низкочастотные моды, $\Omega \ll \gamma$

Все дисперсионные кривые, соответствующие волноводным низкочастотным модам (кроме участка дисперсионной кривой для симметричной моды, описанной в предыдущем подразделе), начинаются на световой линии $\Omega = \epsilon^{1/2}\gamma\kappa$ в точках $\Omega = \bar{\Omega}_n$,

$$\bar{\Omega}_n = \sqrt{(\pi n/2\Lambda)^2 + 1}, \quad 1 \leq n \ll \gamma\Lambda. \quad (34)$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \dots$ нумерует кривые снизу вверх, причем нечетные номера, $n = 1, 3, 5, \dots$, соответствуют антисимметричным собственным модам, уравнение (16), а четные, $n = 2, 4, 6, \dots$, — симметричным, уравнение (15).

Вблизи световой линии кривые возрастают с ростом κ , и их асимптотическое поведение при $\kappa \ll 1$ может быть описано следующей формулой:

$$\kappa(\Omega) = \frac{\Omega}{\gamma\epsilon} \sqrt{\epsilon + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - 1} J^2(\Lambda\sqrt{\Omega^2 - 1})}. \quad (35)$$

Здесь n -й дисперсионной кривой соответствуют значения частоты в интервале $\bar{\Omega}_n \leq \Omega < \bar{\Omega}_{n+1}$, а функция $J(x)$ периодична, $J(x + \pi/2) = J(x)$, и определена на периоде как

$$J(x) = \text{tg } x, \quad \text{при } 0 \leq x < \pi/2. \quad (36)$$

Дисперсионные кривые убывают и стремятся к $\Omega = 1$ при больших $\kappa \rightarrow \infty$. Асимптотическое поведение n -й кривой вблизи $\Omega = 1$, при

$$\sqrt{\Omega^2 - 1} \ll 1/\epsilon\gamma, \quad (37)$$

таково:

$$\Omega_n(\kappa) = \sqrt{\frac{(\pi n/2\Lambda)^2}{\kappa^2 + 1} + 1}. \quad (38)$$

Однако в промежуточной области, вдали как от световой линии, так и от частоты $\Omega = 1$,

$$\gamma \gg \sqrt{\Omega^2 - 1} \gg 1/\epsilon\gamma, \quad \kappa \gtrsim 1, \quad (39)$$

предыдущее выражение должно быть подкорректировано следующим образом,

$$\Omega_n(\kappa) = \sqrt{\frac{[\pi(n+1)/2\Lambda]^2}{\kappa^2 + 1} + 1}. \quad (40)$$

Видно, что в промежуточной области (39) асимптотика n -й дисперсионной кривой (40) совпадает с асимптотикой (38) для $(n + 1)$ -й кривой в области больших κ (37).

На рис. 4 показаны дисперсионные кривые (сплошные линии), соответствующие уравнениям (15) и (16), и их асимптотики (штриховые линии), описываемые

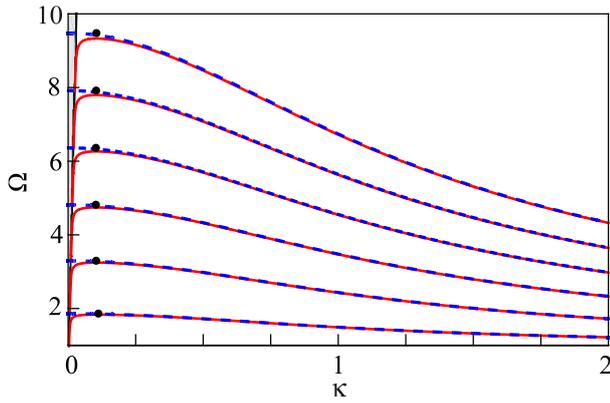


Рис. 4. (Онлайн в цвете) Дисперсионные кривые $\Omega(\kappa)$ для низкочастотных волноводных мод (сплошные линии), расположенные в области $1 < \Omega \ll \gamma$, и асимптотические кривые, заданные уравнением (40) (штриховые линии). Кружочками отмечены приближенные положения точек максимума, определяемые уравнениями (52) и (53). Параметры: $\gamma = 100$, $\varepsilon = 10$, $\Lambda = 1$.

уравнением (40), в частотном диапазоне $\Omega \ll \gamma$. Кружочки отмечают приближенные положения точек максимума (подробнее см. разд. 4).

3.3. Высокочастотные дисперсионные кривые, $\Omega \sim \gamma$

В этом подразделе мы кратко обсудим свойства дисперсионных кривых при $\Omega \sim \gamma \gg 1$. Кривые $\Omega_n(\kappa)$ начинаются на световой линии в точках $\Omega = \bar{\Omega}_n$ в области $\Omega < \gamma$,

$$\bar{\Omega}_n = \gamma - \frac{2\gamma^3 \Lambda^2}{\pi^2 n^2 \varepsilon}, \quad \text{при } n \gg \gamma \Lambda, \quad (41)$$

и в точках $\Omega = \tilde{\Omega}_n$ в области $\Omega > \gamma \sqrt{\kappa^2 + 1}$,

$$\tilde{\Omega}_n = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^{-1}}} \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{2\Lambda^2 \gamma^2 \varepsilon} \right), \quad \text{при } 0 \leq n \ll \gamma \Lambda. \quad (42)$$

Дисперсионные кривые в области $\Omega < \gamma$ ведут себя качественно так же, как кривые $\Omega_n(\kappa)$, описанные в предыдущем подразделе: возрастают вблизи световой линии, согласно уравнению (35), а затем убывают в области $1 \lesssim \kappa \ll n/\gamma \Lambda$ по закону

$$\Omega_n(\kappa) = \gamma - \frac{2\gamma^3 \Lambda^2}{\pi^2 n^2} \kappa^2. \quad (43)$$

Дисперсионные кривые в области $\Omega > \gamma \sqrt{\kappa^2 + 1}$ монотонно возрастают. Напомним также, что эти кривые существуют только в случае $\varepsilon > 1$.

4. Аномальная дисперсия

В предыдущем разделе показано, что волноводные моды характеризуются аномальной дисперсией в определенном диапазоне волновых чисел, где

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial \kappa} < 0, \quad (44)$$

(см., например, уравнения (38), (40) и (43)). При произвольном значении частоты в интервале $1 < \Omega < \gamma$ и достаточно далеко от световой линии, при $\kappa \gtrsim 1$, можно представить выражение для n -й дисперсионной кривой в виде

$$\kappa_n(\Omega) = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \Omega^2}}{\gamma} \sqrt{\frac{[\pi n/2 + \alpha_n(\Omega)]^2}{(\Omega^2 - 1)\Lambda^2} - 1}, \quad (45)$$

$$\alpha_n(\Omega) = \text{arctg} \frac{\varepsilon \sqrt{\gamma^2 - \Omega^2} \sqrt{\Omega^2 - 1}}{\Omega^2}.$$

Точки максимума на дисперсионных кривых, в которых групповая скорость собственных волн обращается в нуль, могут быть найдены решением следующей системы уравнений:

$$D(\kappa, \Omega) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \kappa} D(\kappa, \Omega) = 0, \quad (46)$$

где

$$D(\kappa, \Omega) = \left(1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \frac{\varepsilon \kappa_d}{\kappa_s} - \text{tg}(\kappa_s \Lambda), \quad (47)$$

для симметричных по магнитному полю мод (см. уравнение (15)), и

$$D(\kappa, \Omega) = \left(1 - \frac{1}{\Omega^2} \right) \frac{\varepsilon \kappa_d}{\kappa_s} + \text{ctg}(\kappa_s \Lambda), \quad (48)$$

для антисимметричных мод (см. уравнение (16)).

Исключая из уравнений (46) члены с тригонометрическими функциями, можно свести систему к полиномиальному уравнению, например, кубическому уравнению относительно $\kappa_d = \sqrt{\gamma^2 \kappa^2 - \varepsilon^{-1} \Omega^2}$,

$$\kappa_d^2 [\varepsilon - \Lambda \varepsilon^2 (1 - \Omega^{-2}) \kappa_d] (\gamma^2 - \Omega^2) = [\varepsilon (\gamma^2 - \Omega^2) - \Lambda \kappa_d \Omega^2] [\kappa_d^2 + \gamma^2 - \Omega^2 (1 - \varepsilon^{-1})]. \quad (49)$$

В предположении, что частота не слишком близка к 1 или γ , и что толщина пластины не слишком велика,

$$1 \lesssim \Omega - 1 \ll \gamma, \quad \Lambda \ll \gamma^2 \varepsilon^2 / \Omega^3, \quad (50)$$

можно привести уравнение (49) к виду

$$\kappa_d^3 = \frac{\gamma^2 \Omega^2}{\Lambda \varepsilon (\Omega^2 - 1)}. \quad (51)$$

Его решение может быть записано в форме

$$\kappa_{\max}(\Omega) = \frac{\Omega}{\varepsilon \gamma} \sqrt{\varepsilon + \left[\frac{\gamma^2 \varepsilon^2}{\Lambda \Omega (\Omega^2 - 1)} \right]^{2/3}}. \quad (52)$$

Линия, определяемая данной функцией, ограничивает область $\kappa > \kappa_{\max}(\Omega)$, в которой наблюдается аномальная дисперсия. Эта линия пересекает дисперсионные кривые в точках максимума. В условиях (50), точки максимума расположены при частотах Ω равных

$$\Omega_n^{\max} = \sqrt{[\pi(n+1)/2\Lambda]^2 + 1}, \quad n \ll \Lambda\gamma. \quad (53)$$

Соответствующие значения волновых чисел могут быть найдены из уравнения (52). На рис. 4 кружочками изображены приближенные положения точек максимума, определяемые уравнениями (52) и (53).

5. Заключение

В настоящей работе теоретически изучено распространение собственных электромагнитных волн вдоль пластины слоистого сверхпроводника, слои которого перпендикулярны поверхности пластины. Определены дисперсионные соотношения для волн ТМ поляризации, распространяющихся строго перпендикулярно слоям. Показано, что при частотах ниже джозефсоновской плазменной частоты, $\omega < \omega_J$, в пластине могут распространяться поверхностные моды, поля которых затухают по мере удаления от поверхностей пластины как в глубь окружающей диэлектрической среды, так и в глубину пластины, а при более высоких частотах, $\omega > \omega_J$, в пластине могут распространяться волноводные моды, поля которых осциллируют внутри пластины. Главным результатом работы является предсказание аномальной дисперсии поверхностных и волноводных мод в пластине слоистого сверхпроводника, что обеспечивает возможность наблюдения явлений, аналогичных известным эффектам в левосторонних (lefthanded) средах. Найдены условия наблюдения аномальной дисперсии в диапазоне частот $\omega_J \lesssim \omega < c/\lambda_{ab}\epsilon_s^{1/2}$, а также условия обращения в нуль групповой скорости поверхностных и волноводных мод.

1. R.A. Shelby, D.R. Smith, and S. Schultz, *Science* **292**, 77 (2001).
2. J.B. Pendry, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000).
3. В.Г. Веселаго, *УФН* **92**, 517 (1967).
4. К.В. Мандельштам, *ЖЭТФ* **15**, 475 (1945).
5. В.М. Агранович, Ю.Н. Гартштейн, *УФН* **176**, 1051 (2006).
6. V.M. Shalaev, *Nature Photonics* **1**, 41 (2007).
7. H.O. Moser, B.D.F. Casse, O. Wilhelm, and B.T. Saw, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 063901 (2005).
8. O.V. Ivanov and D.I. Sementsov, *Crystallogr. Rep.* **45**, 487 (2000).
9. J.B. Pendry, *Science* **306**, 1353 (2004).
10. A.L. Rakhmanov, V.A. Yampol'skii, J.A. Fan, F. Capasso, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **81**, 075101 (2010).

11. V.A. Golick, D.V. Kadygrob, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, B.A. Ivanov, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 187003 (2010).
12. R. Kleiner and P. Müller, *Phys. Rev. B* **49**, 1327 (1994).
13. S. Savel'ev, V.A. Yampol'skii, A.L. Rakhmanov, and F. Nori, *Rep. Prog. Phys.* **73**, 026501 (2010).
14. X. Hu and S.-Z. Lin, *Supercond. Sci. Technol.* **23**, 053001 (2010).
15. S. Savel'ev, V. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 187002 (2005).
16. V.A. Yampol'skii, D.R. Gulevich, S. Savel'ev, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **78**, 054502 (2008).
17. T.M. Slipchenko, D.V. Kadygrob, D. Bogdanis, V.A. Yampol'skii, and A.A. Krokhin, *Phys. Rev. B* **84**, 224512 (2011).
18. Yu.O. Averkov, V.M. Yakovenko, V.A. Yampol'skii, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **87**, 054505 (2013).
19. С.И. Ханкина, В.М. Яковенко, В.А. Ямпольский, *ФНТ* **38**, 245 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 193 (2012)].
20. Ch. Helm and L.N. Bulaevskii, *Phys. Rev. B* **66**, 094514 (2002).
21. R. Kleiner, F. Steinmeyer, G. Kunkel, and P. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2394 (1992).
22. S. Rother, Y. Koval, P. Müller, R. Kleiner, D.A. Ryndyk, J. Keller, and C. Helm, *Phys. Rev. B* **67**, 024510 (2003).

Anomalous dispersion of the surface and waveguide modes in plate of layered superconductor

S.S. Apostolov, V.I. Havrilenko,
Z.A. Maizelis, and V.A. Yampol'skii

The linear surface and waveguide modes of transverse magnetic polarization propagating in the plate of the layered superconductor placed in a homogeneous dielectric environment are theoretically studied. It is assumed that the superconducting layers are orthogonal to the plate surface and the waves propagate across the layers. The dispersion relations for the symmetric and antisymmetric modes by the magnetic field are derived. It is shown that the dispersion of these modes is anomalous in a certain range of frequencies and wave numbers. The conditions of vanishing the mode group velocity are found.

PACS: **74.72.-h** Cuprate superconductors;
74.50.+r Tunneling phenomena; Josephson effects;
74.78.Fk Multilayers, superlattices, heterostructures.

Keywords: layered superconductor, surface and waveguide modes, polarization.