

Механизм Хиггса в сверхпроводящих структурах

С.В. Куплевацкий

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: kuplevakhsy@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 17 мая 2016 г., после переработки 1 августа 2016 г.,
опубликована онлайн 24 января 2017 г.

Показано, что в равновесных сверхпроводящих структурах с s -волновым типом спаривания однозначная часть фазы комплексного параметра порядка (квазисреднего) $\langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$ трансформируется в продольную компоненту векторного потенциала, как и в абелевой модели Хиггса релятивистской теории поля. Рассмотрение базируется на микроскопическом гамильтониане системы в присутствии внешнего статического магнитного поля и бесконечно малых источников куперовских пар. Предусмотрено наличие примесей и несверхпроводящих барьеров, а также учтена квантовая природа индуцированного электромагнитного поля. Квантование последнего осуществляется при условии $A_0 = 0$ (A_0 — скалярный потенциал), не нарушающем инвариантность относительно калибровочных преобразований, не зависящих от времени. Установлены точные соотношения, определяющие квазисреднее $\langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$. Эти соотношения играют ключевую роль в изложенном в статье новом выводе уравнений среднего поля. На основании полученных результатов предложена новая физическая трактовка эффекта Джозефсона (без «разности фаз») и обсуждаются некоторые следствия.

Показано, що в рівноважних надпровідних структурах з s -хвильовим типом спаровування однозначна частина фази комплексного параметра порядку (квазисереднього) $\langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$ трансформується в подовжню компоненту векторного потенціалу, як і в абелевій моделі Хіггса релятивістської теорії поля. Розгляд базується на мікроскопічному гамільтоніані системи у присутності зовнішнього статичного магнітного поля і нескінченно малих джерел куперівських пар. Передбачено наявність домішок і ненадпровідних бар'єрів, а також враховано квантову природу індукованого електромагнітного поля. Квантування останнього здійснюється за умови $A_0 = 0$ (A_0 — скалярний потенціал), що не порушує інваріантність відносно калібрувальних перетворень, які не залежні від часу. Встановлено точні співвідношення, які визначають квазисереднє $\langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$. Ці співвідношення грають ключову роль у новому виведенні рівнянь середнього поля, яке викладено у статті. На підставі отриманих результатів запропоновано нове фізичне трактування ефекту Джозефсона (без «різниці фаз») і обговорюються деякі наслідки.

PACS: 74.20.Fg Теория БКШ и ее развитие;
11.15.Ex Спонтанное нарушение калибровочной симметрии;
74.50.+r Эффекты близости, слабые связи, туннелирование, эффект Джозефсона.

Ключевые слова: сверхпроводимость, механизм Хиггса, эффект Джозефсона.

1. Введение: основные физические идеи

Концепция [1–3] «мягкой» генерации масс калибровочных полей вследствие спонтанного нарушения локальной калибровочной симметрии (механизм Хиггса) представляет собой один из краеугольных камней современной теории элементарных частиц (см., например, [4–6]). Хотя в физике высоких энергий фундаментальные идеи работ [1–3] нашли свое окончательное под-

тверждение лишь недавно (в результате экспериментального открытия бозона Хиггса [7,8]), хорошо известно [4–6,9], что механизм Хиггса фактически реализуется в физике низких энергий, а точнее, в явлении сверхпроводимости [10–14]. (Согласно определению [6], «a superconductor is simply a material in which electromagnetic gauge invariance is spontaneously broken».)

В качестве примера обычно приводят [4–6, 9] эффект Мейсснера, заключающийся в непроникновении внеш-

него статического магнитного поля в глубь массивного сверхпроводника, что может быть интерпретировано как «приобретение фотоном массы». Более того, на этом аналогия с ситуацией в физике высоких энергий не исчерпывается. В частности, недавно сообщалось [15] об экспериментальном обнаружении в сверхпроводниках низкоэнергетического аналога бозона Хиггса, существование которого предсказывалось в теоретических работах [16,17]. (Следует, однако, иметь в виду, что в сверхпроводниках отсутствует фундаментальное поле Хиггса, а спонтанное нарушение электромагнитной симметрии происходит динамически, путем формирования конденсата куперовских пар [12–14].)

Мы хотим обратить внимание еще на одну аналогию, ранее не замеченную в литературе, а именно: трансформацию однозначной части фазы комплексного параметра сверхпроводящего порядка («голдстоуновское» поле модели [1]) в продольную компоненту статического магнитного поля (электромагнитного поля модели [1]). Чтобы облегчить восприятие основной части статьи, мы позволим себе напомнить ключевые положения абелевой модели [1], непосредственно касающиеся предмета нашего рассмотрения.

Лагранжиан классической абелевой модели Хиггса комплексного скалярного поля $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ (заряд q), взаимодействующего с электромагнитным полем $A_\mu = (A_0, -\mathbf{A})$, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_H[\Psi^*, \Psi, A_\mu] \equiv \int d^3\mathbf{r} \left[[\partial_\mu - iqA_\mu(\mathbf{r})]\Psi^*(\mathbf{r})[\partial^\mu + iqA^\mu(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) - M^2|\Psi(\mathbf{r})|^2 - |\lambda||\Psi(\mathbf{r})|^4 - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}(\mathbf{r})F^{\mu\nu}(\mathbf{r}) \right], \quad (1)$$

где M^2 — параметр (положительный или отрицательный), а $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор электромагнитного поля. (В этом разделе мы используем метрику и четырехмерные обозначения книги [18], но полагаем $\hbar = c = 1$.) Лагранжиан (1) инвариантен относительно локального калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi, \\ \Psi &\rightarrow \Psi e^{iq\chi}, \quad \Psi^* \rightarrow \Psi^* e^{-iq\chi}, \quad \chi = \chi(\mathbf{r}t). \end{aligned} \quad (2)$$

Однако при $M^2 < 0$ основное состояние системы

$$A_\mu \equiv 0, \quad \Psi_0 = \sqrt{\frac{-M^2}{2|\lambda|}} e^{i\phi_0}, \quad \phi_0 = \text{const} \in [0, 2\pi) \quad (3)$$

этим свойством не обладает. Чтобы понять следствие нарушения локальной калибровочной симметрии, удобно перейти к полярному представлению для поля Ψ . Выбирая основное состояние («вакуум») из условия $\phi_0 = 0$, запишем:

$$\Psi(\mathbf{r}t) = [|\Psi_0| + \rho(\mathbf{r}t)] e^{i\tilde{\phi}(\mathbf{r}t)}, \quad (4)$$

где $\tilde{\phi}/q$ имеет смысл «голдстоуновского» поля. Подстановка (4) в (1) и переход к унитарной калибровке [5,6]

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \tilde{\phi} \quad (5)$$

позволяют избавиться от голдстоуновского поля. Считая «физические» поля ρ и A_μ малыми величинами и проводя разложение лагранжиана (1) до членов второго порядка, находим соответствующие уравнения движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu \rho + m_H^2 \rho = 0, \quad m_H^2 \equiv 4|\lambda||\Psi_0|^2, \quad (6)$$

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = m_A^2 A^\mu, \quad m_A^2 \equiv 8\pi q^2 |\Psi_0|^2. \quad (7)$$

Уравнение (6) описывает массивный бозон Хиггса (m_H — масса), а уравнение (7) представляет собой уравнение Прока для массивного векторного поля (m_A — масса) [5].

Для разрешимости уравнения (7) относительно A_μ требуется выполнение условия

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (8)$$

известного в классической электродинамике как «калибровка Лоренца» [18]. Условие (8) позволяет исключить из рассмотрения скалярный потенциал A_0 , не являющийся динамической переменной. Таким образом, при спонтанном нарушении локальной калибровочной симметрии векторное поле \mathbf{A} , в дополнение к двум независимым поперечным компонентам (\mathbf{A}_\perp) свободного поля, приобретает продольную компоненту (\mathbf{A}_\parallel) за счет фазы Ψ (голдстоуновского поля $\tilde{\phi}/q$).

В случае не зависящего от времени поля $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ уравнение (7) и условие (8) превращаются в следующее:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -m_A^2 \mathbf{A}, \quad (9)$$

$$\nabla \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Уравнение (9) формально совпадает с основным уравнением феноменологической теории сверхпроводимости Лондонов [12,13] (при отождествлении $m_A^2 \rightarrow 1/\lambda_L^2$, где λ_L — лондоновская глубина проникновения). При этом условие (10), означающее исчезновение продольной компоненты векторного потенциала, есть простым

следствием закона сохранения сверхпроводящего тока, который в теории Лондонов имеет вид $\mathbf{j} = -\mathbf{A}/(4\pi\lambda_L^2)$.

Хотя уравнение (9) корректно отражает наличие эффекта Мейсснера, в целом, теория Лондонов не дает адекватного описания других аспектов физики сверхпроводимости.

В более уточненной феноменологической теории Гинзбурга–Ландау [19], справедливой при температурах T , близких к температурам сверхпроводящего перехода T_c , исходят из функционала свободной энергии $\mathcal{F}_{GL} = \mathcal{F}_{GL}[\Psi^*, \Psi, \mathbf{A}]$, где комплексное поле Ψ имеет смысл параметра сверхпроводящего порядка. Функционал \mathcal{F}_{GL} может быть формально получен из лагранжиана (1) для случая не зависящих от времени полей ($\Psi = \Psi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$). Полагая $q = 2e$ (e — заряд электрона) и определяя новые константы

$$a \equiv (T - T_c)|\alpha| = \frac{M^2}{4m}, \quad b = \frac{|\lambda|}{8m^2},$$

где m — «масса электрона», получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{GL}[\Psi^*, \Psi, \mathbf{A}] &= -\mathcal{L}_H \left[\frac{\Psi^*}{2\sqrt{m}}, \frac{\Psi}{2\sqrt{m}}, \mathbf{A} \right] = \\ &= \int_V d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{4m} |(\nabla - 2e\mathbf{A})\Psi|^2 + a|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{8\pi} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

При заданной температуре $T < T_c$ функционал (11) минимизируется равновесными значениями полей Ψ ($|\Psi| \neq 0$) и \mathbf{A} , удовлетворяющими нелинейному дифференциальному уравнению Гинзбурга–Ландау и уравнению Максвелла соответственно. При этом сверхпроводящий ток дается соотношением

$$\mathbf{j} = -\frac{ie}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (12)$$

Как и в случае модели Хиггса (1), в соотношениях (11) и (12) удобно перейти к полярному представлению $\Psi(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})| e^{i\phi(\mathbf{r})}$. В односвязном сверхпроводнике фаза $\phi = \phi(\mathbf{r})$ есть однозначная функция координат ($\phi = \tilde{\phi}$), и поэтому от нее можно избавиться, используя статический аналог унитарной калибровки (5),

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \frac{1}{2e} \nabla \tilde{\phi}. \quad (1)$$

Однако теперь, в отличие от модели Лондонов (9), закон сохранения тока $\nabla \mathbf{j} = 0$ не предполагает исчезновения продольной части векторного потенциала, по-

скольку $|\Psi(\mathbf{r})|$ зависит от координат. Иными словами, должна происходить трансформация $-\frac{1}{2e} \nabla \tilde{\phi} \rightarrow \mathbf{A}_{\parallel}$.

Нужно сказать, что нефизичность однозначной части фазы параметра порядка теории Гинзбурга–Ландау отмечалась давно (см. [20]). Однако эта работа оставила без ответа принципиальный вопрос: куда «исчезла» переменная $\tilde{\phi}$ после выполнения калибровочного преобразования (13)? Приведенные нами соображения (аналогия с моделью [1]) требуют строгого обоснования в рамках последовательной микроскопической теории ввиду динамического характера нарушения электромагнитной симметрии. Особо подчеркнем, что законность использования преобразования (13) может быть доказана только при учете квантовой природы индуцированного в сверхпроводнике электромагнитного поля, поскольку сама процедура квантования последнего существенно зависит от выбора калибровочного условия. Кроме того, феноменологическая теория Гинзбурга–Ландау не в состоянии описать наиболее интересный (с точки зрения предмета нашей статьи) случай сверхпроводящих структур с джозефсоновской связью [14,21] и заведомо неприменима при температурах $T \ll T_c$. Развиваемая в последующих разделах микроскопическая теория свободна от указанных недостатков.

2. Исходная микроскопическая модель

Исходной точкой нашего рассмотрения служит микроскопический гамильтониан в представлении Гейзенберга (см. вывод в Приложении А):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} + \mathcal{H}_{BCS} + \mathcal{H}_{em}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e &= \int_V d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m} \sum_{\alpha} [\nabla + ie\mathbf{A}(\mathbf{r}t) + ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r})] \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}t) \times \right. \\ &\quad \left. \times [\nabla - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}t) - ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r})] \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathcal{H}_b = \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}t) [\hat{U}^b]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}(\mathbf{r}t),$$

$$\mathcal{H}_{\text{imp}} = \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}t) [\hat{U}^{\text{imp}}]_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}(\mathbf{r}t),$$

$$\mathcal{H}_{BCS} = -\frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} |g(\mathbf{r})| \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}t) \psi_{-\alpha}^+(\mathbf{r}t) \psi_{-\alpha}(\mathbf{r}t) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t),$$

$$\mathcal{H}_{em} = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{r}t) + (\nabla \times \mathbf{A})^2(\mathbf{r}t) \right],$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}t), \quad \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}t).$$

Здесь \mathcal{H}_0 — гамильтониан системы невзаимодействующих электронов во внешнем постоянном магнитном поле \mathbf{H}_e :

$$\nabla \times \mathbf{A}_e = \mathbf{H}_e, \quad \nabla \mathbf{A}_e = 0; \quad (2)$$

e, m — заряд и масса электрона соответственно; V — объем сверхпроводящей структуры. Полевые операторы рождения (ψ_α^+) и уничтожения (ψ_α) электрона со спином $\alpha = \uparrow, \downarrow$ удовлетворяют обычным антикоммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\psi_\alpha(\mathbf{r}t), \psi_\beta^+(\mathbf{r}'t)]_+ &= \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ [\psi_\alpha(\mathbf{r}t), \psi_\beta(\mathbf{r}'t)]_+ &= [\psi_\alpha^+(\mathbf{r}t), \psi_\beta^+(\mathbf{r}'t)]_+ = 0, \end{aligned}$$

где $[A, B]_+ = AB + BA$, а $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Вклады \mathcal{H}_b и \mathcal{H}_{imp} описывают возможное присутствие несверхпроводящих слоев (барьеров) [22] и замороженных примесей [23] соответственно. Если соответствующие потенциалы \hat{U}^b и \hat{U}^{imp} необменные, их зависимость от спиновых индексов сводится к $\delta_{\alpha\beta}$. Матричные элементы $[\hat{U}^b]_{\alpha\beta} = U^b_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ и $[\hat{U}^{\text{imp}}]_{\alpha\beta} = U^{\text{imp}}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ считаем гладкими функциями координат: см. пример на рис. 1.

Член \mathcal{H}_{BCS} описывает эффективное электрон-электронное притяжение, приводящее к спариванию [11,14]. Параметр взаимодействия $g = g(\mathbf{r})$, являющийся гладкой функцией координат, отрицателен в сверхпроводящих слоях и равен нулю в несверхпроводящих барьерах (см. рис. 2).

Индукированному электромагнитному полю $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}t)$ соответствует гамильтониан \mathcal{H}_{em} . Согласно разъяснению во Введении, поле \mathbf{A} необходимо считать квантовым. Как явствует из формы \mathcal{H}_{em} , при квантовании \mathbf{A} нами принята калибровка $A_0 = 0$, использование которой требует пояснений. Действительно, в нерелятивистских задачах физики конденсированного состояния более употребительна поперечная (кулоновская) калибровка $\nabla \mathbf{A} = 0$ (см., например, [25]). Однако поперечная калибровка полностью нарушает инвариантность относительно локальных ка-

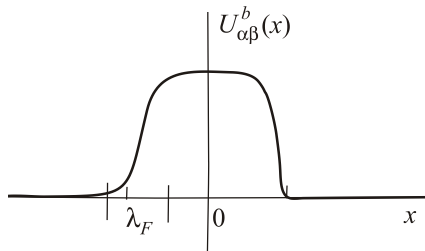


Рис. 1. Пространственная зависимость матричного элемента $[\hat{U}^b]_{\alpha\beta}$. Здесь несверхпроводящий барьер предполагается однородным вдоль координатных осей y и z , а λ_F — длина Ферми ($\lambda_F \sim 1/p_F$). (Способ аналитического построения функций типа $U^b_{\alpha\beta} = U^b_{\alpha\beta}(x)$ см. в книге [24].)

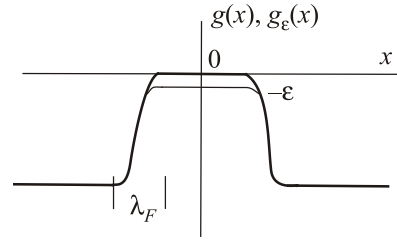


Рис. 2. Пространственная зависимость параметра электрон-электронного взаимодействия ($g \leq 0$) и вспомогательной функции g_ϵ ($g_{\epsilon \rightarrow 0} \rightarrow g$), используемой в разд. 5.

либровочных преобразований, и потому совершенно не пригодна для целей нашей статьи. Напротив, калибровка $A_0 = 0$ оставляет гамильтониан инвариантным относительно не зависящих от времени локальных калибровочных преобразований

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}t) + \nabla \chi(\mathbf{r}),$$

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}t) \rightarrow e^{ie\chi(\mathbf{r})} \psi_\alpha(\mathbf{r}t), \quad \psi_\alpha^+(\mathbf{r}t) \rightarrow \psi_\alpha^+(\mathbf{r}t) e^{-ie\chi(\mathbf{r})}. \quad (17)$$

Кроме того, вопреки имеющимся в литературе [26] утверждениям, калибровка $A_0 = 0$ отнюдь не приводит к «потере» закона Гаусса (см. наше разъяснение ниже и в Приложении Б).

В калибровке $A_0 = 0$ коммутационные соотношения для операторов электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$\left[\frac{\partial A_i}{\partial t}(\mathbf{r}t), A_j(\mathbf{r}'t) \right] = -i4\pi \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$\left[A_i(\mathbf{r}t), A_j(\mathbf{r}'t) \right] = \left[\frac{\partial A_i}{\partial t}(\mathbf{r}t), \frac{\partial A_j}{\partial t}(\mathbf{r}'t) \right] = 0, \quad i, j = x, y, z. \quad (18)$$

Естественно, предполагается коммутативность операторов электромагнитного поля с электронными операторами ψ_α^+ и ψ_α . Если индуцированное электромагнитное поле достаточно быстро убывает на пространственной бесконечности, для оператора \mathbf{A} справедливо следующее разложение [27]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_\parallel, \quad (19)$$

где

$$\nabla \mathbf{A}_\perp = 0, \quad \nabla \times \mathbf{A}_\parallel = 0, \quad \int d^3 \mathbf{r}' \mathbf{r}' \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}t) \mathbf{A}_\parallel(\mathbf{r}t) = 0,$$

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}t) = \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \times \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}'t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

$$\mathbf{A}_\parallel(\mathbf{r}t) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \int d^3 \mathbf{r}' \frac{\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}'t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Учитывая коммутативность поперечных (\perp) компонент операторов с продольными (\parallel) компонентами, из коммутационных соотношений (18) находим:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial A_{\perp i}}{\partial t}(\mathbf{r}t), A_{\perp j}(\mathbf{r}'t) \right] &= -i4\pi\delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + i\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r'_j}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \\ \left[A_{\perp i}(\mathbf{r}t), A_{\perp j}(\mathbf{r}'t) \right] &= \left[\frac{\partial A_{\perp i}}{\partial t}(\mathbf{r}), \frac{\partial A_{\perp j}}{\partial t}(\mathbf{r}') \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial A_{\parallel i}}{\partial t}(\mathbf{r}t), A_{\parallel j}(\mathbf{r}'t) \right] &= -i\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r'_j}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \\ \left[A_{\parallel i}(\mathbf{r}t), A_{\parallel j}(\mathbf{r}'t) \right] &= \left[\frac{\partial A_{\parallel i}}{\partial t}(\mathbf{r}t), \frac{\partial A_{\parallel j}}{\partial t}(\mathbf{r}'t) \right] = 0, \\ \left[A_{\parallel i}(\mathbf{r}t), A_{\perp j}(\mathbf{r}'t) \right] &= \left[\frac{\partial A_{\parallel i}}{\partial t}(\mathbf{r}t), \frac{\partial A_{\perp j}}{\partial t}(\mathbf{r}'t) \right] = \\ &= \left[\frac{\partial A_{\parallel i}}{\partial t}(\mathbf{r}t), A_{\perp j}(\mathbf{r}'t) \right], \quad i, j = x, y, z. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку в гамильтониане \mathcal{H} присутствует равное число электронных операторов рождения и уничтожения, существует очевидный интеграл движения – полное число электронов \mathcal{N} :

$$\begin{aligned} [\mathcal{N}, \mathcal{H}] &= 0, \quad \mathcal{N} = \int_V d^3\mathbf{r}n_e(\mathbf{r}t), \\ n_e(\mathbf{r}t) &= \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}t)\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t), \end{aligned} \quad (21)$$

где $n_e(\mathbf{r}t)$ — плотность числа электронов. Оператор \mathcal{N} генерирует глобальные калибровочные преобразования

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0(\chi_0) \equiv e^{-ie\chi_0\mathcal{N}}, \quad \chi_0 = \text{const}: \\ U_0(\chi_0)\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t)U_0^{-1}(\chi_0) &= e^{ie\chi_0}\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t), \\ U_0(\chi_0)\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}t)U_0^{-1}(\chi_0) &= e^{-ie\chi_0}\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}t), \\ U_0(\chi_0)\mathbf{A}(\mathbf{r}t)U_0^{-1}(\chi_0) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}t), \end{aligned} \quad (22)$$

оставляющие гамильтониан \mathcal{H} инвариантным. Используя уравнения движения для операторов в представлении Гейзенберга, получаем закон сохранения заряда,

$$\frac{e\partial n_e(\mathbf{r}t)}{\partial t} + \nabla\mathbf{j}(\mathbf{r}t) = 0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}t) &\equiv \sum_{\alpha} \left[\frac{ie}{2m} \left[\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}t)\nabla\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) - [\nabla\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}t)]\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{m} [\mathbf{A}(\mathbf{r}t) + \mathbf{A}_e(\mathbf{r}t)]\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}t)\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

— оператор тока, и уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (26)$$

Из закона сохранения (23) и уравнения Максвелла (25) находим

$$[\mathcal{H}, \nabla\mathbf{E} - 4\pi en_e] = 0. \quad (27)$$

Полученное условие, а также условие

$$[\mathcal{N}, \nabla\mathbf{E} - 4\pi en_e] = 0 \quad (28)$$

гарантируют наличие общей системы собственных векторов у операторов \mathcal{H} , \mathcal{N} и $\nabla\mathbf{E} - 4\pi en_e$. Для физически реализуемых состояний имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{N}|N, E_{k,N}, n_i\rangle &= N|N, E_{k,N}, n_i\rangle, \\ \mathcal{H}|N, E_{k,N}, n_i\rangle &= E_{k,N}|N, E_{k,N}, n_i\rangle, \end{aligned} \quad (29)$$

$$(\nabla\mathbf{E} - 4\pi en_e)|N, E_{k,N}, n_i\rangle =$$

$$-4\pi en_i|N, E_{k,N}, n_i\rangle, \quad n_i = n_i(\mathbf{r}).$$

Третье из соотношений (29) (уравнение связи) представляет собой закон Гаусса, где n_i — заданная плотность распределения заряда ионов. Динамический инвариант $\nabla\mathbf{E} - 4\pi en_e$ генерирует локальное калибровочное преобразование (17) с c -числовой функцией $\chi = \chi(\mathbf{r})$:

$$U_1 = U_1[\chi] = U_{\mathbf{A}}[\chi]U_{\Psi}[\chi] = U_{\Psi}[\chi]U_{\mathbf{A}}[\chi],$$

$$U_{\mathbf{A}}[\chi] \equiv \exp\left[\frac{i}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\chi(\mathbf{r})\nabla\mathbf{E}(\mathbf{r}t)\right],$$

$$U_{\Psi}[\chi] \equiv \exp\left[-ie\int_V d^3\mathbf{r}\chi(\mathbf{r})n_e(\mathbf{r}t)\right]: \quad (30)$$

$$U_1[\chi] \mathbf{A}(\mathbf{r}t) U_1^{-1}[\chi] = \mathbf{A}(\mathbf{r}t) + \nabla \chi(\mathbf{r}),$$

$$U_1[\chi] \Psi_\alpha(\mathbf{r}t) U_1^{-1}[\chi] = e^{iex(\mathbf{r})} \Psi_\alpha(\mathbf{r}t),$$

$$U_1[\chi] \Psi_\alpha^+(\mathbf{r}t) U_1^{-1}[\chi] = e^{-iex(\mathbf{r})} \Psi_\alpha^+(\mathbf{r}t),$$

где функция $\chi = \chi(\mathbf{r})$ задана во всем пространстве, принадлежит классу C_2 (непрерывна вместе со всеми частными производными вплоть до второго порядка включительно) и убывает при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Сформулированные математические условия обеспечивают однозначность функции $\chi = \chi(\mathbf{r})$, что может быть представлено в виде условия

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} (\nabla \chi \cdot d\mathbf{l}) = 0 \quad (31)$$

для произвольного замкнутого контура Γ .

Если система находится в нормальном состоянии ($T > T_c$), для получения полного набора уравнений для наблюдаемых величин будем производить усреднение ($\langle \dots \rangle$) по большому каноническому ансамблю:

$$\langle \dots \rangle \equiv \text{Tr}(\dots \rho), \quad \rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\mathcal{H} - \mu \mathcal{N}}{T}},$$

$$Z = \text{Tr} \exp\left(-\frac{\mathcal{H} - \mu \mathcal{N}}{T}\right) = \sum_{k,N} \exp\left(-\frac{E_{k,N} - \mu N}{T}\right), \quad (32)$$

где μ — химический потенциал, Tr — след в пространстве действия всех операторов, Z — большая статистическая сумма. Используя тождество для операторов в представлении Гейзенберга

$$i \left\langle \frac{dO}{dt} \right\rangle = \langle [O, \mathcal{H}] \rangle = \text{Tr}([O, \mathcal{H}]) = 0,$$

немедленно находим:

$$\nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle, \quad \nabla \langle \mathbf{H} \rangle = 0, \quad \nabla \langle \mathbf{j} \rangle = 0,$$

$$\nabla \times \langle \mathbf{E} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{E} \rangle = 0, \quad (33)$$

где $\langle \mathbf{H} \rangle = \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}) \rangle$ и $\langle \mathbf{j} \rangle = \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle$. Для согласования последнего соотношения с законом Гаусса

$$\nabla \langle \mathbf{E} \rangle - 4\pi e \langle \mathbf{n}_e \rangle = -4\pi en_i \quad (34)$$

необходимо выполнение условия электронейтральности:

$$\langle \mathbf{n}_e \rangle = n_i. \quad (35)$$

Отметим еще полезное для дальнейшего соотношение

$$\langle \mathbf{j} \rangle \equiv \text{Tr}(\mathbf{j}\rho) = -\text{Tr}\left(\frac{\delta \mathcal{H}_e}{\delta \mathbf{A}_e} \rho\right) = \frac{T}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \mathbf{A}_e} = -\frac{\delta \Omega}{\delta \mathbf{A}_e}, \quad (36)$$

где $\Omega = -T \ln Z$ — термодинамический потенциал ($\Omega = \Omega(T, P, \mu; \mathbf{H}_e)$).

Поскольку в нормальном состоянии обязан выполняться закон Ома $\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma \langle \mathbf{E} \rangle$, имеем также $\langle \mathbf{H} \rangle = 0$. Таким образом, используя калибровочное преобразование (30), всегда можно добиться выполнения условия $\langle \mathbf{A} \rangle = 0$.

Как хорошо известно, сверхпроводящее состояние ($T < T_c$) характеризуется появлением аномального среднего $\langle \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow \rangle$ ($\langle \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow \rangle^* = \langle \Psi_\uparrow^+ \Psi_\downarrow^+ \rangle$) (параметра сверхпроводящего порядка). Напомним [28], что аномальное среднее не может быть вычислено путем усреднения по большому каноническому ансамблю ρ . Действительно, в силу инвариантности гамильтониана \mathcal{H} относительно калибровочных преобразований (22) и (30) с произвольными χ_0 и χ имеем

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rho] &= \text{Tr}[U_0(\chi_0) \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) U_0^{-1}(\chi_0) U_0(\chi_0) \rho U_0^{-1}(\chi_0)] = \\ &= \text{Tr}[U_0(\chi_0) \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) U_0^{-1}(\chi_0) \rho] = \exp(i2e\chi_0) \text{Tr}[\Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rho] = 0; \\ \text{Tr}[\Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rho] &= \text{Tr}[U_1[\chi] \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) U_1^{-1}[\chi] U_1[\chi] \rho U_1^{-1}[\chi]] = \\ &= \text{Tr}[U_1[\chi] \Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) U_1^{-1}[\chi] \rho] = \exp(i2e\chi(\mathbf{r})) \text{Tr}[\Psi_\downarrow(\mathbf{r}) \Psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rho] = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Как было разъяснено Боголюбовым [28], для корректного определения подобных аномальных средних (или квазисредних в терминологии [28]) необходимо нарушить соответствующую непрерывную симметрию путем введения в гамильтониан бесконечно малых «источников». Впоследствии этот прием был существенно обобщен в квантовой теории поля и широко применялся при исследованиях различных механизмов и типов спонтанного нарушения симметрии [6]. (Отметим, что в теории ферромагнетизма «источники» имеют реальный фи-

зический смысл бесконечно малого внешнего магнитного поля [29].)

3. Гамильтониан с источниками куперовских пар и квазисредние

Поскольку в основополагающей работе [28] рассматривался лишь случай структурно-однородного сверхпроводника в отсутствие электромагнитных взаимодействий, использование гамильтониана (14) требует обобщения определения квазисреднего, а именно:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle &= \langle \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \rangle^* \equiv \lim_{\|\eta\| \rightarrow 0} \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta}, \\
 \langle \dots \rangle_{\eta} &\equiv \text{Tr}(\dots \rho_{\eta}[\mathbf{A}_t]), \quad \rho_{\eta}[\mathbf{A}_t] = \frac{1}{Z_{\eta}} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_{\eta}[\mathbf{A}_t] - \mu \mathcal{N}}{T}\right), \quad Z_{\eta} = \text{Tr} \exp\left(-\frac{\mathcal{H}_{\eta}[\mathbf{A}_t] - \mu \mathcal{N}}{T}\right), \\
 \mathcal{H}_{\eta}[\mathbf{A}_t] &= \mathcal{H}[\mathbf{A}_t] + \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \left[\eta(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \eta^*(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right], \quad \mathbf{A}_t \equiv \mathbf{A} + \mathbf{A}_e; \\
 [\mathcal{H}_{\eta}, \mathcal{N}] &\neq 0, \quad [\mathcal{H}_{\eta}, \nabla \mathbf{E} - 4\pi e n_e] \neq 0,
 \end{aligned} \tag{38}$$

где «источник куперовских пар» $\eta = \eta(\mathbf{r})$ — гладкая комплексная функция координат и $\|\eta\| = \max_{\mathbf{r} \in V} |\eta(\mathbf{r})|$. Отметим, что предельный переход $\|\eta\| \rightarrow 0$ в формуле (38) выполняется после перехода к термодинамическому пределу.

Кроме того, в определении квантово-статистического оператора ρ_{η} , для удобства дальнейшего, явно указана функциональная зависимость от оператора полного векторного потенциала $\mathbf{A}_t \equiv \mathbf{A} + \mathbf{A}_e$. Этот оператор входит в определение \mathcal{H}_e (см. (15)). Только это слагаемое в исходном гамильтониане \mathcal{H} подвергается локальным калибровочным преобразованиям.

Определению (38) можно придать несколько иную форму, если разложить полевые операторы ψ_{α} по полной системе нормированных собственных функций оператора $\mathcal{H}_e + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}}$ (предварительно положив $\mathbf{A} = 0$):

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_n c_{n\alpha} u_n(\mathbf{r}), \tag{39}$$

где $c_{n\alpha}$ — оператор уничтожения электрона в состоянии $n\alpha$. Имеем:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle &= \sum_{n,n'} u_n(\mathbf{r}) u_{n'}(\mathbf{r}) \langle c_{n\downarrow} c_{n'\uparrow} \rangle \equiv \\
 &\equiv \lim_{\|\eta\| \rightarrow 0} \sum_{n,n'} u_n(\mathbf{r}) u_{n'}(\mathbf{r}) \langle c_{n\downarrow} c_{n'\uparrow} \rangle_{\eta}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Отсюда понятно наше требование гладкости потенциалов, входящих в определение операторов \mathcal{H}_b и \mathcal{H}_{imp} : в полярном представлении для квазисреднего

$$\langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle = \left| \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \right| e^{i\phi(\mathbf{r})}, \tag{41}$$

оно обеспечивает принадлежность фазы $\phi = \phi(\mathbf{r})$ к классу C_2 .

Хотя комплексная функция $\eta = \eta(\mathbf{r})$ в известном смысле произвольна (см. разд. 3), она не может нарушать никаких симметрий гамильтониана, за исключением калибровочных. Например, если $\mathcal{H}_b = \mathcal{H}_{\text{imp}} = 0$, $g(\mathbf{r}) = \text{const}$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}_e = 0$, «хорошим» квантовым числом будет импульс электрона \mathbf{k} , и «источник куперовских пар» равен комплексной константе $\eta = |\eta| e^{i\phi_0}$, где $|\eta|$ и ϕ_0 не зависят от координат. Отсюда

$$\langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \psi_{\downarrow}(0)\psi_{\uparrow}(0) \rangle = \lim_{|\eta| \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \langle c_{\mathbf{k}\downarrow} c_{-\mathbf{k}\uparrow} \rangle_{\eta}.$$

Поскольку квазисреднее $\langle \psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow} \rangle$ дается предельным значением среднего $\langle \psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow} \rangle_{\eta}$, полезно начать с изучения свойств последнего. Прежде всего, установим законы преобразования $\langle \psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow} \rangle_{\eta}$ при унитарных преобразованиях $\rho_{\eta} \rightarrow U_0 \rho_{\eta} U_0^{-1}$ и $\rho_{\eta} \rightarrow U_{\psi} \rho_{\eta} U_{\psi}^{-1}$ (см. определения (22) и (30)):

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} &= \text{Tr}[\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\rho_{\eta}[\mathbf{A}_t]] = \text{Tr}[U_0(\chi_0)\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})U_0^{-1}(\chi_0)U_0(\chi_0)\rho_{\eta}[\mathbf{A}_t]U_0^{-1}(\chi_0)] = \\
 &= \text{Tr}[U_0(\chi_0)\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})U_0^{-1}(\chi_0)\rho_{\eta \exp(-i2e\chi_0)}[\mathbf{A}_t]] = \exp(i2e\chi_0) \text{Tr}[\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\rho_{\eta \exp(-i2e\chi_0)}[\mathbf{A}_t]]; \\
 \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} &= \text{Tr}[U_{\psi}(\chi)\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})U_{\psi}^{-1}(\chi)U_{\psi}(\chi)\rho_{\eta}[\mathbf{A}_t]U_{\psi}^{-1}(\chi)] = \\
 &= \text{Tr}[U_{\psi}(\chi)\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})U_{\psi}^{-1}(\chi)\rho_{\eta \exp(-i2e\chi)}[\mathbf{A}_t - \nabla\chi]] = \exp(i2e\chi(\mathbf{r})) \text{Tr}[\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\rho_{\eta \exp(-i2e\chi_0)}[\mathbf{A}_t - \nabla\chi]].
 \end{aligned} \tag{42}$$

Запишем источник в полярном представлении: $\eta = |\eta| e^{i\theta}$, где $|\eta| = |\eta(\mathbf{r})|$ и $\theta = \theta(\mathbf{r})$. Используя аналог (41) для $\langle \psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow} \rangle_{\eta}$ и формулы (42), легко устанавливаем принципиальное равенство: $\phi(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r})$. Таким об-

разом, фаза $\langle \psi_{\downarrow}\psi_{\uparrow} \rangle_{\eta}$ полностью определяется фазой источника η . Отсюда немедленно следует важный физический результат.

Определим «термодинамический потенциал в присутствии источников»

$$\Omega_\eta \equiv -T \ln Z_\eta, \quad (43)$$

и вычислим вариационную производную $\delta\Omega_\eta/\delta\phi(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega_\eta}{\delta\phi(\mathbf{r})} &= \int_V d^3\mathbf{r}' \langle \psi_\uparrow^+(\mathbf{r}') \psi_\downarrow^+(\mathbf{r}') \rangle_\eta \frac{\delta\eta(\mathbf{r}')}{\delta\phi(\mathbf{r})} + \\ &+ \int_V d^3\mathbf{r}' \langle \psi_\downarrow(\mathbf{r}') \psi_\uparrow(\mathbf{r}') \rangle_\eta \frac{\delta\eta^*(\mathbf{r}')}{\delta\phi(\mathbf{r})} = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, из соотношений (42) следует:

$$\Omega_\eta[\eta, \eta^*, \mathbf{A}_e] = \Omega_{|\eta|} \left[|\eta|, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right]. \quad (44)$$

Используя аналог (36), находим:

$$\frac{\delta\Omega_\eta}{\delta\phi} = -\frac{1}{2e} \nabla \frac{\delta\Omega_{|\eta|}}{\delta\mathbf{A}_e} = \frac{1}{2e} \nabla \langle \mathbf{j} \rangle_\eta = 0. \quad (45)$$

Соотношение (45), представляющее собой закон сохранения тока в присутствии источников, есть следствие двух фактов: равенства $\theta = \phi$; вхождение ϕ в функциональный аргумент $\Omega_{|\eta|}$ в виде $\nabla\phi$ (отсутствие функциональной зависимости от нулевой фурье-компоненты $\phi_0 = \frac{1}{V} \int_V d^3\mathbf{r} \phi(\mathbf{r})$). Наличие закона сохранения (45) указывает на внутреннюю согласованность развиваемой теории.

На основании определения (38) имеем

$$\frac{\delta\Omega_{|\eta|}}{\delta|\eta(\mathbf{r})|} = \left| \langle \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle_\eta \right|. \quad (46)$$

Выполняя функциональное преобразование Лежандра, перейдем от потенциала $\Omega_{|\eta|} = \Omega_{|\eta|} \left[|\eta|, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right]$ к «эффективному потенциалу» $\Omega = \Omega \left[\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle_\eta, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right]$ (ср. с определением «эффективного действия» в квантовой теории поля [4,6,26]):

$$\begin{aligned} \Omega \left[\left\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \right\rangle_\eta, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right] &= \Omega_{|\eta|} \left[|\eta|, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right] - \\ &- \int_V d^3\mathbf{r} \left| \langle \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle_\eta \right| |\eta(\mathbf{r})|. \end{aligned} \quad (47)$$

В силу общих свойств преобразований Лежандра [30] варьирование (47) дает

$$\frac{\delta\Omega}{\delta \left| \langle \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle_\eta \right|} = -|\eta(\mathbf{r})|. \quad (48)$$

Учитывая определение (38), в отсутствие источников ($\|\eta\| \rightarrow 0$) получим:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta \left| \langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle_\eta \right|} \Big|_{\left| \langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle_\eta \right| = \left| \langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle \right|} = 0. \quad (49)$$

Иными словами, квазисреднее $|\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle|$ удовлетворяет условию стационарности эффективного потенциала Ω .

Если бы функциональная зависимость $\Omega = \Omega \left[\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle_\eta, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right]$ была известна точно, мы могли бы найти $|\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle|$ из условия стационарности (49). Подстановка $|\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle|$ в эффективный потенциал дала бы непосредственно измеримый термодинамический потенциал сверхпроводящей структуры. Хотя определение точной функциональной зависимости $\Omega = \Omega \left[\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle, \mathbf{A}_e - \frac{1}{2e} \nabla\phi \right]$ принципиально невозможно, задача допускает простое решение в приближении среднего поля (см. разд. 5).

4. «Исчезновение» однозначной части фазы квазисреднего (механизм Хиггса)

Как должно быть ясно из предыдущего, нулевая компонента фазы ϕ_0 среднего $\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle_\eta$ без ущерба для общности может быть положена равной нулю. (В модели (1) это, очевидно, соответствует определенному выбору «вакуума» (3).) Представим теперь фазу $\phi = \phi(\mathbf{r})$ среднего $\langle \psi_\downarrow \psi_\uparrow \rangle_\eta$ в следующем виде: $\phi = \tilde{\phi} + \phi_s$, где $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\mathbf{r})$ — однозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma (\nabla\tilde{\phi} \cdot d\mathbf{l}) = 0 \quad (50)$$

для произвольного замкнутого контура $\Gamma \in V$, а $\phi_s = \phi_s(\mathbf{r})$ — неоднозначная функция, удовлетворяющая на некоторых замкнутых контурах $\Gamma_n \in V$ условию

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_n} (\nabla\phi_s \cdot d\mathbf{l}) = n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (51)$$

(Напомним [12,13], что контуры Γ_n типа существуют в сверхпроводящих структурах с неоднозначной геометрией и даже односвязных структурах в присутствии вихрей Абрикосова.) Подчеркнем, что выбор функции $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\mathbf{r})$ пока еще произволен: этот произвол отражает инвариантность исходного гамильтониана \mathcal{H} относительно локального калибровочного преобразования U_1 . Напротив, функцию $\phi_s = \phi_s(\mathbf{r})$ следует считать заданной.

Рассмотрим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
 \left| \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} \right| &= \exp(-i\phi(\mathbf{r})) \text{Tr} \left[\Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rho_{\eta}[\mathbf{A}_t] \right] = \\
 &= \exp(-i\phi(\mathbf{r})) \text{Tr} \left[U_{\Psi} \left[\frac{\phi}{2e} \right] \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) U_{\Psi}^{-1} \left[\frac{\phi}{2e} \right] U_{\Psi} \left[\frac{\phi}{2e} \right] \rho_{\eta}[\mathbf{A}_t] U_{\Psi}^{-1} \left[\frac{\phi}{2e} \right] \right] = \\
 &= \exp(-i\phi(\mathbf{r})) \text{Tr} \left[U_{\Psi} \left[\frac{\phi}{2e} \right] \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) U_{\Psi}^{-1} \left[\frac{\phi}{2e} \right] \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[\Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] \right].
 \end{aligned} \tag{52}$$

Определим функцию $\alpha_{\parallel} = \alpha_{\parallel}(\mathbf{r})$, заданную во всем пространстве, достаточно быстро убывающую при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ и совпадающую с $\tilde{\phi}$ для $\mathbf{r} \in V$. Продолжим преобразование (52):

$$\begin{aligned}
 \left| \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} \right| &= \text{Tr} \left[\Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[\Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[\Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] \right].
 \end{aligned} \tag{53}$$

Объясним проделанные выкладки. На первом этапе использование унитарного преобразования U_{Ψ} под знаком Tr (формулы (52)) позволило нам избавиться от фазы ϕ источника η и среднего $\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle_{\eta}$. Однако в

гамильтониане \mathcal{H}_e вместо оператора \mathbf{A}_t появилась комбинация $\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi$ (см. определения (14) и (38)).

На втором этапе мы использовали унитарное преобразование $U_{\mathbf{A}}$, в результате в гамильтониане \mathcal{H}_0 вместо комбинации $\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi$ осталась лишь комбинация

$\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s$ с неоднозначной (физической) частью фазы.

Чтобы понять, куда «исчезла» однозначная часть фазы $\tilde{\phi}$ из последней строки (53), рассмотрим величину $\langle \widetilde{\mathbf{A}(\mathbf{r})} \rangle_{\eta}$, определяемую как среднее по квантово-статистическому ансамблю $\rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right]$ (см. последнюю строку (52)). Имеем

$$\begin{aligned}
 \langle \widetilde{\mathbf{A}(\mathbf{r})} \rangle_{\eta} &\equiv \text{Tr} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \mathbf{A}(\mathbf{r}) U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \mathbf{A}(\mathbf{r}) U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] \right] + \frac{1}{2e} \nabla \alpha_{\parallel} \equiv \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} + \frac{1}{2e} \nabla \alpha_{\parallel}.
 \end{aligned} \tag{54}$$

С другой стороны, мы еще не использовали остающуюся в выборе $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\mathbf{r})$ калибровочную свободу. Учитывая представление (19), запишем

$$\begin{aligned}
 \langle \widetilde{\mathbf{A}(\mathbf{r})} \rangle_{\eta} &= \langle \widetilde{\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r})} \rangle_{\eta} + \langle \widetilde{\mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r})} \rangle_{\eta} \equiv \text{Tr} \left[\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] \right] + \text{Tr} \left[\mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] \right] = \\
 &= \text{Tr} \left[U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\alpha_{\parallel}}{2e} \right] \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] \right] + \text{Tr} \left[U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\tilde{\chi}}{2e} \right] \mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r}) U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\tilde{\chi}}{2e} \right] U_{\mathbf{A}} \left[\frac{\tilde{\chi}}{2e} \right] \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi \right] U_{\mathbf{A}}^{-1} \left[\frac{\tilde{\chi}}{2e} \right] \right] = \\
 &= \langle \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} + \text{Tr} \left[\mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r}) \rho_{\eta} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla (\phi - \tilde{\chi}) \right] \right] + \frac{1}{2e} \nabla \tilde{\chi} \equiv \langle \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} + \langle \widetilde{\mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r})} \rangle_{\eta} + \frac{1}{2e} \nabla \tilde{\chi},
 \end{aligned} \tag{55}$$

где использована инвариантность $U_{\mathbf{A}}\mathbf{A}_{\perp}U_{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{A}_{\perp}$. Поскольку величину $\langle \widetilde{\mathbf{A}}_{\parallel}(\mathbf{r}) \rangle_{|\eta|}$ можно представить в виде градиента скаляра, всегда можно выбрать функцию $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}(\mathbf{r})$ так, чтобы в последней строке (55) выполнялось равенство $\langle \widetilde{\mathbf{A}}_{\parallel}(\mathbf{r}) \rangle_{|\eta|} + \frac{1}{2e}\nabla\tilde{\chi} = 0$. (Такой выбор $\tilde{\chi}$ означает полное устранение оставшейся калибровочной свободы.)

Полученный только что результат следует сопоставить с результатом последней строки (54), справедливым при любом выборе $\tilde{\phi}$. Отсюда находим

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle_{|\eta|} = \langle \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle_{|\eta|} - \frac{1}{2e}\nabla\alpha_{\parallel},$$

или, после перехода к пределу $|\eta| \rightarrow 0$,

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle - \frac{1}{2e}\nabla\alpha_{\parallel} \equiv \langle \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}) \rangle + \langle \mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (56)$$

Формула (56) представляет собой основной результат нашего рассмотрения. Она означает, что однозначная часть фазы сверхпроводящего параметра порядка «обменивается» на индуцируемую во всем пространстве продольную компоненту векторного потенциала, в полной аналогии с тем, что происходит в абелевой модели Хиггса (1).

Уточним теперь, в каком смысле понимается усреднение в формуле (56). Согласно введенным выше определениям,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle &= \lim_{|\eta| \rightarrow 0} \text{Tr} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rho_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] \right] \\ \rho_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] &= \frac{1}{Z_{|\eta|}} \exp \left(\frac{\mathcal{H}_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] - \mu\mathcal{N}}{T} \right), \quad Z_{|\eta|} = \text{Tr} \exp \left(\frac{\mathcal{H}_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] - \mu\mathcal{N}}{T} \right), \\ \mathcal{H}_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] &= \mathcal{H} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] + \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} |\eta(\mathbf{r})| \left[\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right], \\ \mathcal{H} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] &= \mathcal{H}_e \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} + \mathcal{H}_{BCS} + \mathcal{H}_{\text{em}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Ввиду инвариантности \mathbf{A} относительно глобального калибровочного преобразования ($U_0\mathbf{A}U_0^{-1} = \mathbf{A}$) в формуле (57) можно поменять местами операции \lim и Tr . В результате получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle &= \text{Tr} \lim_{|\eta| \rightarrow 0} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rho_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] \right] = \text{Tr} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rho \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] \right], \\ \rho \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] &= \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{\mathcal{H} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] - \mu\mathcal{N}}{T} \right), \quad Z = \text{Tr} \exp \left(-\frac{\mathcal{H} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right] - \mu\mathcal{N}}{T} \right), \end{aligned} \quad (58)$$

где гамильтониан $\mathcal{H} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right]$ определен последней строкой (57).

Совершенно очевидно, что усреднение остальных электродинамических операторов (n_e , \mathbf{j} , \mathbf{H} и \mathbf{E}) при $T < T_c$ также сводится к усреднению по большому каноническому ансамблю $\rho \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right]$. Поэтому формулы (35)–(35) остаются в силе. В частности, вопреки имеющимся в литературе утверждениям [31], из строгого равенства $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$ однозначно следует отсут-

ствии каких-либо статических электрических потенциалов в равновесных сверхпроводящих структурах.

5. Приближение среднего поля

Как обычно [10–14], замкнутая система уравнений теории сверхпроводимости может быть получена только в приближении среднего поля. Точные результаты разд. 3 и 4 позволяют дать строгий и последовательный вывод этих уравнений. Начнем с приближения среднего поля для величин $\mathcal{H}_{|\eta|} = \mathcal{H}_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right]$

$$\text{и } \Omega_{|\eta|} = \Omega_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e}\nabla\phi_s \right].$$

Учитывая, что квантовые флуктуации индуцированного векторного потенциала \mathbf{A} малы в меру малости отношения $\frac{v_F}{c}$ (v_F — скорость Ферми, c — скорость света), в слагаемом $\mathcal{H}_e \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right]$ гамильтониана $\mathcal{H}_{|\eta|} \left[\mathbf{A}_t - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right]$ произведем замену

$$\mathcal{H}_e \rightarrow \mathcal{H}_e^{MF} : \mathbf{A} + \mathbf{A}_e \rightarrow \langle \mathbf{A} \rangle \equiv \langle \mathbf{A} \rangle_{\perp} + \langle \mathbf{A} \rangle_{\parallel}, \quad (59)$$

где средние $\langle \dots \rangle$ определяются формулой (56). Поскольку векторный потенциал внешнего поля \mathbf{A}_e удовлетворяет условию поперечности $\nabla \mathbf{A}_e = 0$, здесь и далее считаем его включенным в определение $\langle \mathbf{A} \rangle_{\perp}$. Опустим энергию электромагнитного поля \mathcal{H}_{em} . (При этом считаем, конечно, что уравнения Максвелла (33) выполняются.)

В слагаемом \mathcal{H}_{BCS} , прежде всего, заменим реальный параметр электрон–электронного взаимодействия $g = g(\mathbf{r})$ на вспомогательную функцию $g_{\varepsilon} = g_{\varepsilon}(\mathbf{r})$ (см. рис. 2), причем в уравнениях среднего поля будет выполнен предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$. Далее рассмотрим элементарное тождество

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} &= \left(\psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} - \left| \langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right| \right) \left(\psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} - \left| \langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right| \right) + \\ &+ \left(\psi_{\uparrow}^{\dagger} \psi_{\downarrow}^{\dagger} + \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \right) \left| \langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right| - \left| \langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right|^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Считая, что первый член в правой части (60) в некотором смысле «мал», приходим к квадратичной (по электронным операторам рождения и уничтожения) аппроксимации для \mathcal{H}_{BCS} :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{BCS} \rightarrow \mathcal{H}_{BCS}^{MF} &= \int_V d^3 \mathbf{r} |g_{\varepsilon}(\mathbf{r})| \left[\left| \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} \right|^{MF} \right]^2 - \\ &- \int_V d^3 \mathbf{r} |g_{\varepsilon}(\mathbf{r})| \left| \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} \right|^{MF} \left[\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Чтобы определить среднее $\left| \langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right|^{MF}$, потребуем выполнения в приближении среднего поля соотношений (46)–(49). Введем определения

$$\Omega_{|\eta|}^{MF} = -T \ln Z_{|\eta|}^{MF}, \quad Z_{|\eta|}^{MF} = \text{Tr} \exp \left(\frac{-\mathcal{H}_{|\eta|}^{MF} - \mu \mathcal{N}}{T} \right),$$

$$\mathcal{H}_{|\eta|}^{MF} = \mathcal{H}_e^{MF} \left[\langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} + \mathcal{H}_{BCS}^{MF} + \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r} |\eta(\mathbf{r})| \left[\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right]. \quad (62)$$

Соотношения (46)–(49) будут сохранены, если потенциал $\Omega_{|\eta|}^{MF}$ не зависит от $\left| \langle \psi_{\downarrow} \psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right|^{MF}$:

$$\frac{\delta \Omega_{|\eta|}^{MF}}{\delta \left| \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} \right|^{MF}} = 0. \quad (63)$$

Отсюда приходим к условию самосогласования:

$$\left| \langle \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle_{\eta} \right|^{MF} = \frac{1}{2 Z_{|\eta|}^{MF} \Big|_{\varepsilon=0}} \text{Tr} \left[\left[\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right] \exp \left(\frac{\mathcal{H}_{|\eta|}^{MF} \Big|_{\varepsilon=0} - \mu \mathcal{N}}{T} \right) \right], \quad (64)$$

где в правой части (64) мы перешли к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$. (Из приведенного вывода условия самосогласования ясна роль вспомогательной функции g_{ε} : эта функция необходима для возможности взятия вариационной производной (63) во всей области V , включая несверхпроводящие барьеры.)

Приведенные выше соображения позволяют установить равенство

$$\Omega^{MF} \left[\left| \langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle_{\eta} \right|^{MF}, \langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] = \Omega_{|\eta|=0}^{MF} \left[\left| \langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle \right|^{MF}, \langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] = \Omega_{|\eta|=0}^{MF} \left[\langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right],$$

$$\Omega_{|\eta|=0}^{MF} = -T \ln Z^{MF}, \quad Z^{MF} \equiv Z_{|\eta|=0}^{MF} = \text{Tr} \exp \left(- \frac{\mathcal{H}_{|\eta|}^{MF} \Big|_{\epsilon=0} - \mu \mathcal{N}}{T} \right), \quad (65)$$

где $|\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle_{\eta}|^{MF} \equiv |\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle_{\eta=0}|^{MF}$, удовлетворяет условию самосогласования в отсутствие источников ($|\eta| \rightarrow 0$),

$$\left| \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \right|^{MF} = \frac{1}{2 Z_{|\eta|=0}^{MF}} \text{Tr} \left[\left[\Psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right] \exp \left(- \frac{\mathcal{H}_{|\eta|}^{MF} \Big|_{\epsilon=0} - \mu \mathcal{N}}{T} \right) \right]. \quad (66)$$

Перед взятием следа по электронным полям в формулах (65) и (66) целесообразно несколько обобщить только что полученные результаты. Введем с этой целью вещественную непрерывную и неотрицательную функцию $|\widetilde{F}| = |\widetilde{F}|(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} \in V$. Не выполняя предельный переход $\epsilon \rightarrow +0$ и отбрасывая условие самосогласования (66), определим неравновесный эффективный потенциал $\Omega = \Omega \left[|\widetilde{F}|, \langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right]$ формулой

$$\Omega \left[|\widetilde{F}|, \langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] = \Omega_{|\eta|=0}^{MF} \left[|\widetilde{F}|, \langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right]. \quad (67)$$

В состоянии термодинамического равновесия будем иметь

$$\frac{\delta \Omega}{\delta |\widetilde{F}(\mathbf{r})|} \Big|_{|\widetilde{F}|=|F|} = 0, \quad |F(\mathbf{r})| = \left| \langle \Psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \Psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \right|^{MF}. \quad (68)$$

След по электронным полям, фигурирующий в определении правой части (67), легко вычисляется методом функционального интегрирования [4–6, 26, 32, 33]. В результате получим:

$$\Omega \left[|\widetilde{F}|, \langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s \right] = \int_V d^3 \mathbf{r} |g_{\epsilon}(\mathbf{r})| |\widetilde{F}(\mathbf{r})|^2 - \frac{T}{2} \text{Tr} \ln \hat{G}^{-1} + \frac{1}{4} \text{Tr} \left[(\hat{1} + \hat{\tau}_3) \hat{1} \hat{H}_{|g_{\epsilon}|=0} \right], \quad (69)$$

$$\hat{G}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau') = \left[-\hat{1} \frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{H}_{|g_{\epsilon}|}(\mathbf{r}) \right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau - \tau'),$$

$$\hat{H}_{|g_{\epsilon}|}(\mathbf{r}) = -\mu \hat{\tau}_3 \hat{1} - \frac{1}{2m} \left[\hat{1} \nabla + \frac{i}{2} [\nabla \phi_s(\mathbf{r}) - 2e \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle] \hat{\tau}_3 \hat{1} \right] \hat{\tau}_3 \hat{1} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\hat{1} + \hat{\tau}_3) \hat{U}(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} (\hat{1} - \hat{\tau}_3) \hat{U}^t(\mathbf{r}) - \hat{\tau}_2 \hat{\sigma}_2 |g_{\epsilon}(\mathbf{r})| |\widetilde{F}(\mathbf{r})|,$$

$$\hat{U}(\mathbf{r}) \equiv \hat{U}^b(\mathbf{r}) + \hat{U}^{\text{imp}}(\mathbf{r}), \quad 0 < \tau < \frac{1}{T}. \quad (70)$$

Здесь $\hat{\tau}_i, \hat{\sigma}_i$ ($i = 1, 2, 3$) — матрицы Паули в пространстве Горькова–Намбу и в спиновом пространстве соответственно; $\hat{1}$ — единичная матрица 2×2 ; $\hat{1}$ — единичная матрица 4×4 , а выражения $\hat{\tau}_i \hat{\sigma}_k$ и $\hat{\tau}_i \hat{1}, \hat{1} \hat{\sigma}_i$ следует понимать как прямое произведение соответствующих матриц:

$$\hat{\tau}_1 \hat{\sigma}_2 \equiv \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 & \hat{0} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\tau}_3 \hat{1} \equiv \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Последний член в правой части (69) происходит из необходимости симметризации электронных операторов рождения и уничтожения перед взятием функционального интеграла (см. по этому поводу [33]).

Спектр интегрального (в смысле теории обобщенных функций) оператора \hat{G}^{-1} , определенного формулами (70), не содержит нуля, и потому этот оператор имеет однозначный определенный обратный оператор \hat{G} , ядро которого $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau')$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^\beta d\tau_1 \int_V d^3\mathbf{r}_1 \hat{G}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \tau - \tau_1) \hat{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'; \tau_1 - \tau') = \int_0^\beta d\tau_1 \int_V d^3\mathbf{r}_1 \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; \tau - \tau_1) \hat{G}^{-1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'; \tau_1 - \tau') = \hat{1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau - \tau'),$$

$$\hat{G}\left(\mathbf{r}; \mathbf{r}'; \tau + \frac{1}{T}\right) = -\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau), \quad \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau') = \begin{bmatrix} \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau') & \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau') \\ \hat{F}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau') & -[\hat{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \tau' - \tau)]^t \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Условия (71) означают, что ядро $\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau - \tau')$ представляет собой матричную термодинамическую функцию Грина, удовлетворяющую уравнениям типа уравнений Горькова (первая строка (71)): см. [11].

Условие стационарности (68) теперь дает

$$|F(\mathbf{r})| = \frac{T}{2} \left| \text{Sp} \left[i \hat{\sigma}_2 \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; 0) \right] \right|, \quad (72)$$

где Sp обозначает взятие следа по спиновым индексам. Кроме того, варьирование (69) по $\langle \mathbf{A} \rangle$ дает наблюдаемый ток:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle &= -\frac{\delta \Omega}{\delta \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle} = \\ &= \frac{ie}{2m} T \lim_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}}) \text{Sp} \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; -0^+) - \\ &\quad - \frac{e^2 \langle \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle}{m} T \text{Sp} \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; -0^+). \end{aligned} \quad (73)$$

Функции \hat{F} и \hat{G} находятся из решения уравнений (71), в которых предварительно следует перейти к пределу $\epsilon \rightarrow +0$. Таким образом, уравнения (71)–(73), дополненные уравнениями Максвелла $\nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle = 4\pi \langle \mathbf{j} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle = \nabla \times \langle \mathbf{A} \rangle$ и надлежащими граничными условиями, образуют полную и замкнутую систему и позволяют решить любую задачу теории равновесной сверхпроводимости. В частности, использование формулы (69), совместно с условием самосогласования (72), в простейшем случае структурно-однородного сверхпроводника в отсутствие примесей и электромагнитных взаимодействий дает известное выражение [13] для термодинамического потенциала, полученное методом канонического преобразования Боголюбова [34].

6. Эффекты Джозефсона без «разности фаз»

Развитая в предыдущих разделах теория относилась в равной степени как к структурно-однородным сверхпроводникам, так и к любым типам сверхпроводящих структур, содержащих джозефсоновские контакты (при условии, конечно, что корреляция между электронами с антипараллельными спинами не будет нарушена внутри несверхпроводящих барьеров: см. разд. 7). Однако принципиальный интерес представляет вопрос, что изменится

в интерпретации эффектов Джозефсона в отсутствие привычной из литературы [14,21,35] «разности фаз».

Без существенного ограничения общности достаточно изучить односвязную джозефсоновскую структуру при наличии внешних полей и токов. Более конкретно, рассмотрим (рис. 3) плоско-параллельную джозефсоновскую структуру, однородную вдоль оси z , с малопрозрачным туннельным барьером толщины d ($x \in [-d/2, d/2]$) и ширины L ($y \in [-L/2, L/2]$). Внешнее магнитное поле H_e приложено вдоль оси z . Вдоль оси x пропускается транспортный ток I . Требуется определить распределение магнитного поля внутри барьера $\langle \mathbf{H}(x, y) \rangle = \langle \mathbf{H}(0, y) \rangle \equiv \langle \mathbf{H}(y) \rangle$ ($x \in [-d/2, d/2]$) и максимальный транспортный ток $I_c = I_c(H_e)$.

Если магнитное поле H_e и ток I слабо влияют на функцию $|F|$ (параметр сверхпроводящего порядка), с достаточной точностью справедлива аппроксимация [32]:

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)_{\langle \mathbf{A} \rangle} \approx \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n)_{\langle \mathbf{A} \rangle=0} \exp \left[ie \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} (d\mathbf{l} \cdot \langle \mathbf{A}(\mathbf{l}) \rangle) \right], \quad (74)$$

где интегрирование ведется по прямой, соединяющей

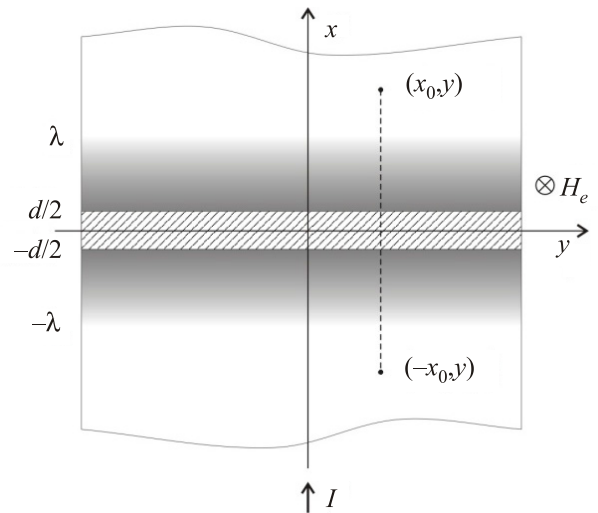


Рис. 3. Геометрия плоско-параллельного туннельного джозефсоновского контакта (схематически). Здесь $\mathbf{H}_e = (0, 0, H_e)$ — внешнее магнитное поле, λ — глубина проникновения поля в глубь сверхпроводящих берегов, d — толщина туннельного барьера ($d \ll 2\lambda$), L — ширина барьера ($0 < L < \infty$), $\mathbf{I} = (I, 0, 0)$ — заданный транспортный ток.

точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' . В силу геометрии задачи $\langle \mathbf{H} \rangle = (0, 0, \langle H \rangle)$. Пусть магнитное поле $\langle H \rangle$ проникает в глубь сверхпроводящих берегов (вдоль оси x) на глубину λ , определяемую как

$$\lambda = \frac{1}{\langle H_0 \rangle} \int_0^{+\infty} dx \langle H(x) \rangle. \quad (75)$$

Поскольку $I = \int_{-L/2}^{L/2} dy j_J(y)$, где $j_J(y) \equiv \langle j_x(0, y) \rangle$ — джозефсоновский ток через контакт, начнем с вычисления j_J . Используя (74) и методику работ [36,37], находим

$$\begin{aligned} j_J &= j_c \sin \Phi(y), \\ \Phi(y) &= -2e \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \langle A_x(\xi, y) \rangle = \\ &= \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \left[\frac{\partial \alpha_{\parallel}(\xi, y)}{\partial \xi} - 2e \langle A_{\perp x}(t, y) \rangle \right], \\ &= \alpha_{\parallel}(x_0, y) - \alpha_{\parallel}(-x_0, y) - 2e \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \langle A_{\perp x}(\xi, y) \rangle, \end{aligned} \quad (76)$$

где $j_c > 0$ — критический ток [14,21], и $x_0 \gg \lambda$ (см. рис. 3).

Чтобы найти зависимость $\langle H_0 \rangle = \langle H_0(y) \rangle$, воспользуемся общим определением

$$\begin{aligned} \langle H(x, y) \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} \langle A_y(x, y) \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle A_x(x, y) \rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \langle A_{\perp y}(x, y) \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle A_{\perp x}(x, y) \rangle. \end{aligned} \quad (77)$$

Проинтегрируем (77) по интервалу $x \in (-x_0, x_0)$, предполагая, что $2\lambda \gg d$:

$$\begin{aligned} \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \langle H(\xi, y) \rangle &\approx 2\lambda \langle H_0(y) \rangle = \\ &= \langle A_{\perp y}(x_0, y) \rangle - \langle A_{\perp y}(-x_0, y) \rangle - \\ &- \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \frac{\partial \langle A_{\perp x}(\xi, y) \rangle}{\partial y}. \end{aligned} \quad (78)$$

Учтем теперь, что в точках (x_0, y) и $(-x_0, y)$ отсутствует компонента сверхпроводящего тока, параллельная туннельному барьеру, и, следовательно,

$$\langle A_y(x_0, y) \rangle = \langle A_y(-x_0, y) \rangle = 0. \quad (79)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle A_{\perp y}(x_0, y) \rangle &= \frac{1}{2e} \frac{\partial \alpha_{\parallel}(x_0, y)}{\partial y}, \\ \langle A_{\perp y}(-x_0, y) \rangle &= \frac{1}{2e} \frac{\partial \alpha_{\parallel}(-x_0, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (80)$$

Теперь вычислим $\frac{1}{2e} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, используя (80):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2e} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} &= \frac{1}{2e} \frac{\partial \alpha_{\parallel}(x_0, y)}{\partial y} - \frac{1}{2e} \frac{\partial \alpha_{\parallel}(-x_0, y)}{\partial y} - \\ &- \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \frac{\partial \langle A_{\perp x}(\xi, y) \rangle}{\partial y} = \\ &= \langle A_{\perp y}(x_0, y) \rangle - \langle A_{\perp y}(-x_0, y) \rangle - \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \frac{\partial \langle A_{\perp x}(\xi, y) \rangle}{\partial y}. \end{aligned} \quad (81)$$

Сравнивая с формулой (78), приходим к результату Джозефсона [35]:

$$\langle H_0(y) \rangle = \frac{1}{4e\lambda} \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y}. \quad (82)$$

(Наш вывод формулы (82) следует сравнить с тем, который имеется в литературе [21,35].)

Подставляя (82) в уравнение Максвелла $\nabla \times \langle \mathbf{H} \rangle = 4\pi \langle \mathbf{j} \rangle$, получаем хорошо известное уравнение Ферреля–Прэйнджа [21]:

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \Phi, \quad \lambda_J^2 = \frac{1}{16\pi |e| \lambda j_c}, \quad (83)$$

где λ_J — джозефсоновская глубина проникновения магнитного поля вдоль туннельного барьера. Полное и строгое решение этого уравнения при сформулированных выше внешних условиях получено в работах [38–40].

В случае «малых» контактов ($L \ll 2\lambda_J$) в отсутствие внешнего поля собственным полем джозефсоновского тока можно пренебречь [39], и выражение (76) сводится к классическому результату Джозефсона

$$j_J = j_c \sin [\alpha_{\parallel}(x_0, 0) - \alpha_{\parallel}(-x_0, 0)], \quad (84)$$

интерпретируемому в терминах «разности фаз» [14,21,35]. Если сверхпроводящая структура с туннельным контактом имеет двухсвязную геометрию (случай СКВИДа), общее выражение для джозефсо-

новского тока (76) остается в силе, однако теперь величина $\Phi(y)$ имеет более сложную структуру:

$$\Phi(y) = \alpha_{\parallel}(x_0, y) - \alpha_{\parallel}(-x_0, y) - \int_{(-x_0, y)}^{(x_0, y)} d\xi \langle A_{\perp x}(\xi, y) \rangle + \phi_s(x_0, y) - \phi_s(-x_0, y), \quad (85)$$

где $\phi_s = \phi_s(x, y)$ — неоднозначная функция координат, определенная в разд. 4 и имеющая смысл внешнего условия.

7. Обсуждение и несколько заключительных замечаний

В работе показано, что однозначная часть фазы параметра сверхпроводящего порядка (квазисреднего) $\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle$ трансформируется в определенную во всем пространстве продольную компоненту векторного потенциала индуцированного магнитного поля. Таким образом, установлена полная аналогия между эффектом Мейсснера в физике сверхпроводимости [12–14] и механизмом Хиггса [1] в физике высоких энергий [6].

Отправной точкой нашего рассмотрения (разд. 2) служит микроскопический гамильтониан системы в присутствии примесей, несверхпроводящих барьеров и внешнего статического магнитного поля (14). (Обоснование гамильтониана (14) дано в Приложении А.) Отличительная особенность нашего подхода (по сравнению с подходами, известными из литературы [10–14,21]) — учет в гамильтониане (14) квантовой природы индуцированного электромагнитного поля. Квантование последнего осуществляется при условии $A_0 = 0$ (A_0 — скалярный потенциал), не нарушающем инвариантность относительно калибровочных преобразований, не зависящих от времени. (Сравнение калибровки $A_0 = 0$ с «традиционной» нековариантной калибровкой $\nabla \mathbf{A} = 0$ дано в Приложении Б.)

В разд. 3 мы перешли от гамильтониана (14) к соответствующему гамильтониану с внешними «источниками куперовских пар» (формулы (38)) и дали строгое определение параметра сверхпроводящего порядка $\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle$ как квазисреднего, обобщающее известное определение Боголюбова для пространственно-однородного случая [28]. В этом же разделе получено строгое доказательство закона сохранения сверхпроводящего тока (формула (45)) и показано, что величина $|\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle|$ удовлетворяет условию стационарности термодинамического потенциала (соотношение (49)). Используя унитарные преобразования (30) под знаком взятия следа, фигурирующего в определении квантово-статистических средних $\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle$ и $\langle \mathbf{A} \rangle$, мы получили алгебраическое доказательство реализации механизма Хиггса (разд. 4).

Строгие результаты разд. 2–4 послужили основой для новой вариационной формулировки приближения среднего поля в разд. 5. В формулы этого раздела входят лишь имеющие физический смысл величины $|\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle|$, $\langle \mathbf{A} \rangle$ и $(1/2e)\nabla\phi_s$, а сам вариационный метод равным образом применим как для структурно-однородных сверхпроводников, так и для систем, содержащих несверхпроводящие барьеры.

В разд. 6 предложена новая, теоретико-полевая, интерпретация эффекта Джозефсона, не использующая традиционное [14,21,35] понятие «разности фаз», и рассмотрены некоторые примеры. Как следует из этих примеров, несмотря на изменение физической интерпретации (появление продольной компоненты индуцированного векторного потенциала вместо «разности фаз»), основные физические результаты, относящиеся к джозефсоновским структурам с неферромагнитными барьерами (расчеты критического тока [14,21], критического поля проникновения джозефсоновских вихрей [38–40], осцилляционных эффектов в СКВИДах [21] и т.д.) остаются без изменений. (Особый случай джозефсоновских контактов с ферромагнитными барьерами, когда возможно нарушение корреляции между электронами с антипараллельными спинами [41], требует отдельного обсуждения.)

Однако наше рассмотрение ясно показывает, что аргумент синуса в правой части формулы (76), являющийся классической величиной по определению, имеет чисто электромагнитное происхождение для любых джозефсоновских структур, с барьерами произвольного типа (в том числе, и ферромагнитного [41]). Кроме того, в силу предполагаемой гладкости потенциалов $g = g(\mathbf{r})$ и $\hat{U}^b = \hat{U}^b(\mathbf{r})$ (разд. 2) для существования линейного интеграла в определении величины $\Phi(y)$ из формул (76) необходимо и достаточно, чтобы параметр сверхпроводящего порядка $|\langle \Psi_{\downarrow} \Psi_{\uparrow} \rangle|$ не обращался в нуль нигде в области барьера. (Последнее утверждение можно рассматривать как строгую математическую формулировку необходимого и достаточного условия существования джозефсоновской связи между берегами контакта.)

Автор благодарит всех участников экспериментального семинара А.Н. Омелянчука и теоретического семинара Л.А. Пастура за конструктивное обсуждение.

Приложение А: «Классические» лагранжиан и гамильтонианы

«Классический» лагранжиан сверхпроводящей структуры с s -волновым типом спаривания в произвольной калибровке определим следующими формулами:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_{\text{imp}} + \mathcal{L}_{BCS} + \mathcal{L}_{\text{em}} + e \int_V d^3\mathbf{r} A_0(\mathbf{r}t) n_i(\mathbf{r}), \quad (A.1)$$

$$\mathcal{L}_e = \int_V d^3\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha} i\psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \left[\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0(\mathbf{r}t) \right] \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) - \frac{1}{2m} \left[\nabla + ie\mathbf{A}(\mathbf{r}t) + ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \right] \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \left[\nabla - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}t) - ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \right] \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right], \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{L}_b + \mathcal{L}_{\text{imp}} = - \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \left[U_{\alpha\beta}^b(\mathbf{r}) + U_{\alpha\beta}^{\text{imp}}(\mathbf{r}) \right] \psi_{\beta}(\mathbf{r}t), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{L}_{BCS} = - \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} g(\mathbf{r}) \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \psi_{-\alpha}^*(\mathbf{r}t) \psi_{-\alpha}(\mathbf{r}t) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t). \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\mathbf{r} \left[\left[\nabla A_0(\mathbf{r}t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}t)}{\partial t} \right]^2 - \left[\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}t) \right]^2 \right]. \quad (\text{A.5})$$

Здесь $A_{\mu} = (A_0, -\mathbf{A})$ — классический 4-векторный потенциал индуцированного электромагнитного поля; Ψ_{α} и ψ_{α}^* — «классические» грасмановы поля, удовлетворяющие антикоммутиационным соотношениям

$$\begin{aligned} \left[\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t), \Psi_{\beta}(\mathbf{r}'t) \right]_{+} &= \left[\psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t), \psi_{\beta}^*(\mathbf{r}'t) \right]_{+} = \\ &= \left[\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t), \psi_{\beta}^*(\mathbf{r}'t) \right]_{+} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Считаем, что поля A_{μ} и $\Psi_{\alpha}, \psi_{\alpha}^*$ заданы на конечном временном интервале $t \in [t_1, t_2]$, причем выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} A_{\mu}(\mathbf{r}t_2) &= A_{\mu}(\mathbf{r}t_1), \quad \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t_2) = -\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t_1), \\ \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t_2) &= -\psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t_1). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Последний член в правой части формулы (A.1) описывает электромагнитное взаимодействие с ионным «фоном» в модели «желе» [13]. Все остальные обозначения в формулах (A.1)–(A.5) ясны из сравнения с соответствующими обозначениями разд. 2.

Плотность лагранжиана (подынтегральное выражение в формулах (A.1)–(A.5)) инвариантна относительно глобального калибровочного преобразования

$$\Psi_{\alpha} \rightarrow e^{ie\chi_0} \Psi_{\alpha}, \quad \psi_{\alpha}^* \rightarrow e^{-ie\chi_0} \psi_{\alpha}^*, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}, \quad \chi_0 = \text{const}. \quad (\text{A.8})$$

Это свойство приводит к закону сохранения заряда:

$$\frac{e\partial n_e}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \quad (\text{A.9})$$

где

$$n_e(\mathbf{r}t) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}t) &= \sum_{\alpha} \left[\frac{ie}{2m} \left[\psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \nabla \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) - \left[\nabla \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \right] \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{m} \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}t) + \mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \right] \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

В отсутствие последнего члена в правой части (A.1) плотность лагранжиана инвариантна также относительно локального калибровочного преобразования

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha} &\rightarrow e^{ie\chi} \Psi_{\alpha}, \quad \psi_{\alpha}^* \rightarrow e^{-ie\chi} \psi_{\alpha}^*, \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad A_0 \rightarrow A_0 - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \chi = \chi(\mathbf{r}t). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

В общем случае инвариантным относительно преобразования (A.11) будет лишь действие $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}$ (в силу граничных условий (A.7)).

Найдем импульсы p_{Ψ}, p_{ψ^*} и $p_{A_0}, p_{\mathbf{A}}$, канонически сопряженные полям Ψ, ψ^* и A_0, \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} p_{\Psi_{\alpha}} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial t}} = i\psi_{\alpha}^*, \quad p_{\psi_{\alpha}^*} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial \psi_{\alpha}^*}{\partial t}} \equiv 0; \\ p_{A_0} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial A_0}{\partial t}} \equiv 0, \quad p_{\mathbf{A}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} = \frac{1}{4\pi} \left(\nabla A_0 + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\mathbf{E}}{4\pi}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

где символы $\frac{\delta}{\delta \frac{\partial \Psi_{\alpha}}{\partial t}}$ и $\frac{\delta}{\delta \frac{\partial \psi_{\alpha}^*}{\partial t}}$ обозначают левую и правую вариационные производные, соответственно [5]. Используя (A.12) и определение

$$\mathcal{H} \equiv \int_V d^3\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha} p_{\psi_{\alpha}}(\mathbf{r}t) \frac{\partial \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t)}{\partial t} \right] + \int_V d^3\mathbf{r} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{r}t) \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}t)}{\partial t} - \mathcal{L},$$

приходим к «классическому» гамильтониану в произвольной калибровке:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} + \mathcal{H}_{BCS} + \mathcal{H}_{\text{em}} + \\ & + \int_V d^3\mathbf{r} \left[\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}t) \nabla A_0(\mathbf{r}t)}{4\pi} + e[n_e(\mathbf{r}t) - n_i(\mathbf{r})] A_0(\mathbf{r}t) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_e = & \int_V d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m} \sum_{\alpha} [\nabla + ie\mathbf{A}(\mathbf{r}t) + ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r})] \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \times \right. \\ & \left. \times [\nabla - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}t) - ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r})] \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} = \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{\alpha, \beta} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) [U_{\alpha\beta}^b(\mathbf{r}) + U_{\alpha\beta}^{\text{imp}}(\mathbf{r})] \psi_{\beta}(\mathbf{r}t),$$

$$\mathcal{H}_{BCS} = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} g(\mathbf{r}) \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}t) \psi_{-\alpha}^*(\mathbf{r}t) \psi_{-\alpha}(\mathbf{r}t) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t), \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{em}} = & \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E}^2(\mathbf{r}t) + (\nabla \times \mathbf{A})^2(\mathbf{r}t) \right], \\ \mathbf{E} = & -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Полезно отметить, что при переходе к нековариантной схеме квантования \mathcal{H} можно не учитывать последний член в правой части (A.13). Действительно, первое слагаемое в квадратной скобке допускает интегрирование по частям, причем проинтегрированный поверхностный член исчезает в силу предположении о быстром убывании поля \mathbf{E} на пространственной бесконечности. Остающееся выражение тождественно равно нулю как в калибровке $A_0 = 0$, так и в калибровке $\nabla \mathbf{A} = 0$ (ввиду наличия операторного закона Гаусса).

Приложение Б: Сравнение калибровочных условий $\nabla \mathbf{A} = 0$ и $A_0 = 0$

При использовании калибровки $\nabla \mathbf{A} = 0$ к квантовым уравнениям Максвелла (23)–(26) добавляется еще закон Гаусса в операторной форме:

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (\text{B.1})$$

Уравнение (B.1) позволяет исключить скалярный потенциал A_0 :

$$A_0(\mathbf{r}t) = e \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{[n_e(\mathbf{r}'t) - n_i(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{B.2})$$

Соответственно, квантовый гамильтониан в этой калибровке имеет вид

$$\mathcal{H}_{\nabla \mathbf{A}=0} = \mathcal{H}_e[\mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_e] + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} + \mathcal{H}_{BCS} + \mathcal{H}_{\text{em}}, \quad (\text{B.3})$$

где

$$\mathcal{H}_e[\mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_e] = \int_V d^3\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m} \sum_{\alpha} [\nabla + ie\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}t) + ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r})] \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}t) [\nabla - ie\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}t) - ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r})] \psi_{\alpha}(\mathbf{r}t) \right], \quad (\text{B.4})$$

а электромагнитная энергия распадается на два слагаемых:

$$\mathcal{H}_{\text{em}} \equiv \mathcal{H}_{\text{em}\perp} + \mathcal{H}_C = \frac{1}{8\pi} \int d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E}_{\perp}^2(\mathbf{r}t) + [\nabla \times \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}t)]^2 \right] + \frac{e^2}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{[n_e(\mathbf{r}t) - n_i(\mathbf{r})][n_e(\mathbf{r}'t) - n_i(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{\perp}}{\partial t}. \quad (\text{B.5})$$

Операторы \mathbf{A}_{\perp} и $\partial \mathbf{A}_{\perp} / \partial t$, фигурирующие в формулах (B.4) и (B.5), подчиняются коммутационным соотношениям двух первых строк (20). Остальные члены гамильтониана (B.3) такие же, как и в гамильтониане (14).

Покажем теперь, что используемый в этой статье квантовый гамильтониан \mathcal{H} в калибровке $A_0 = 0$ (формула (14)) приводит к такому же значению боль-

шой статистической суммы (32), как и введенный выше квантовый гамильтониан $\mathcal{H}_{\nabla \mathbf{A}=0}$ (формула (B.3)). Будем исходить из определения уровней энергии $E_{k,N}$:

$$E_{k,N} = \langle N, E_{k,N}, n_i | \mathcal{H} | N, E_{k,N}, n_i \rangle,$$

где операторы, входящие в \mathcal{H} , считаем независимыми от времени (т.е. заданными в шредингеровском представлении).

Разложим вектор-потенциал \mathbf{A} и электрическое поле \mathbf{E} на поперечную и продольную составляющие (ср. (19)):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_\parallel, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel,$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. Учитывая соотношение

$$\int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}) = 0$$

и уравнение на собственные значения

$$(\nabla \mathbf{E} - 4\pi e n_e) |N, E_{k,N}, n_i\rangle = -4\pi e n_i |N, E_{k,N}, n_i\rangle,$$

получаем:

$$E_{k,N} = \langle N, E_{k,N}, n_i | \widetilde{\mathcal{H}} | N, E_{k,N}, n_i \rangle,$$

где

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} + \mathcal{H}_{BCS} + \mathcal{H}_{\text{em}\perp} + \mathcal{H}_C,$$

$$\mathcal{H}_e = \int_V d^3\mathbf{r} \frac{1}{2m} \left[\sum_\alpha \left[\nabla + ie(\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_\parallel(\mathbf{r})) + ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \right] \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \left[\nabla - ie(\mathbf{A}_\perp(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_\parallel(\mathbf{r})) - ie\mathbf{A}_e(\mathbf{r}) \right] \psi_\alpha(\mathbf{r}) \right],$$

$$\mathcal{H}_b + \mathcal{H}_{\text{imp}} = \int_V d^3\mathbf{r} \sum_{\alpha,\beta} \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \left[U_{\alpha\beta}^b(\mathbf{r}) + U_{\alpha\beta}^{\text{imp}}(\mathbf{r}) \right] \psi_\beta(\mathbf{r}),$$

$$\mathcal{H}_{BCS} = -\frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} |g(\mathbf{r})| \sum_\alpha \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_{-\alpha}^+(\mathbf{r}) \psi_{-\alpha}(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}),$$

$$\mathcal{H}_{\text{em}\perp} + \mathcal{H}_C = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\mathbf{r} \left[\mathbf{E}_\perp^2(\mathbf{r}) + [\nabla \times \mathbf{A}_\perp(\mathbf{r})]^2 \right] + \frac{e^2}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{[n_e(\mathbf{r}) - n_i(\mathbf{r})][n_e(\mathbf{r}') - n_i(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

Как видим, уровни энергии $E_{k,N}$ могут быть представлены как средние от нового гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}}$, в котором вместо продольной части энергии электрического поля $\int_V d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_\parallel^2(\mathbf{r})$ присутствует кулоновская энергия

\mathcal{H}_C . Фигурирующая в определении \mathcal{H}_e продольная переменная \mathbf{A}_\parallel коммутирует со всеми операторами, входящими в гамильтониан $\widetilde{\mathcal{H}}$, и может быть устранена с помощью унитарного преобразования

$$U_\Psi[v] = \exp \left[ie \int d^3\mathbf{r} v(\mathbf{r}) n_e(\mathbf{r}) \right],$$

$$v(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{r}' \frac{\nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad [U_\Psi, \mathcal{N}] = 0.$$

Окончательно находим

$$\begin{aligned} E_{k,N} &= \langle N, E_{k,N}, n_i | U_\Psi^{-1}[v] U_\Psi[v] \widetilde{\mathcal{H}} U_\Psi^{-1}[v] U_\Psi[v] | N, E_{k,N}, n_i \rangle = \\ &= \langle N, E_{k,N} | \mathcal{H}_{\nabla \mathbf{A}=0} | N, E_{k,N} \rangle, \end{aligned}$$

где гамильтониан $\mathcal{H}_{\nabla \mathbf{A}=0}$ дается формулой (Б.3) (с не зависящими от времени операторами).

Как было указано в разд. 2, калибровка $A_0 = 0$ предпочтительнее по физическим соображениям. Действительно, если бы мы использовали условие $\nabla \mathbf{A} = 0$, во все формулы разд. 5 вместо комбинации $\langle \mathbf{A} \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi_s$ входила бы комбинация

$$\langle \mathbf{A}_\perp \rangle - \frac{1}{2e} \nabla \phi, \quad (\text{Б.6})$$

содержащая нефизическую однозначную часть фазы $\tilde{\phi}$ ($\phi = \tilde{\phi} + \phi_s$). Кроме того, выражение (Б.6) противоречило бы физической интерпретации эффекта Мейсснера как «приобретение фотоном массы» [4–5,9], поскольку полный векторный потенциал содержал бы лишь две независимые компоненты ($\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{A}_\perp \rangle$).

Заметим, наконец, что условие электронейтральности (35) в калибровке $\nabla \mathbf{A} = 0$ не получается автоматически из усреднения $\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \partial \mathbf{A} / \partial t$ по большому каноническому ансамблю. Выполнение этого условия следует потребовать дополнительно, чтобы согласовать результат с ситуацией при $A_0 = 0$.

1. P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508 (1964).
2. F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321 (1964).
3. G.S. Guralnik, C.R. Hagen, and T.W.B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585 (1964).

4. J.C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge (1976).
5. L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
6. S. Weinberg, *Quantum Theory of Fields*, vol.1, 2, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
7. G. Aad et al. (ATLAS Collab.), *Phys. Lett. B* **716**, 1 (2012).
8. S. Chatrchyan et al. (CMS Collab.), *Phys. Lett. B* **716**, 30 (2012).
9. Д.А. Киржниц, *УФН*, **125**, 169 (1978).
10. J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
11. А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
12. J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Benjamin, New York (1964).
13. P.G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, Benjamin, New York (1966).
14. А.В. Свидзинский, *Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости*, Наука, Москва (1982).
15. D. Sherman et al., *Nature Phys.* **11**, 188 (2015).
16. P.B. Littlewood and C.M. Varma, *Phys. Rev. B* **26**, 4883 (1982).
17. T. Cea et al., *Phys. Rev. B* **89**, 174506 (2014).
18. Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).
19. В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1064 (1950).
20. В.Л. Гинзбург, Г.Ф. Жарков, *УФН* **125**, 19 (1978).
21. A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York (1982).
22. S.V. Kuplevakhsky and S.V. Naydenov, *Phys. Rev. B* **56**, 2764 (1997).
23. Yu.A. Izyumov and Yu.N. Skryabin, *Phys. Status Solidi B* **61**, 9 (1974).
24. L.C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia (1969).
25. C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, Wiley, New York (1963).
26. P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Benjamin, London (1981).
27. P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics, 4th Ed*, Clarendon, Oxford (1958).
28. Н.Н. Боголюбов, *Квазисредние в задачах статистической механики*, Препринт R-1451, Дубна (1963).
29. R. Brout, *Phase Transitions*, University of Brussels, New York (1965).
30. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics, University of Toronto*, Toronto (1962).
31. S.J. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1974).
32. В.Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, Москва (1976).
33. Ф.А. Березин, *УФН* **139**, 497 (1980).
34. Н.Н. Боголюбов, *DAH СССР* **119**, 224 (1958).
35. B.D. Josephson, *Adv. Phys.* **14**, 419 (1965).
36. S.V. Kuplevakhsky, S.V. Naydenov, and A.A. Galiautdinov, *Phys. Rev. B* **56**, 7858 (1997).
37. S.V. Kuplevakhsky, A.V. Naduev, and S.V. Naydenov, *Superlattices and Microstructures* **25**, 819 (1999).
38. S.V. Kuplevakhsky and A.M. Glukhov, *Phys. Rev. B* **73**, 024513 (2006).
39. S.V. Kuplevakhsky and A.M. Glukhov, *Phys. Rev. B* **76**, 174515 (2007).
40. S.V. Kuplevakhsky and A.M. Glukhov, *Fiz. Nizk. Temp.* **36**, 1253 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 1012 (2010)].
41. С.В. Куплевацкий, И.И. Фалько, *ТМФ* **67**, 252 (1986); *ТМФ*, **84**, 146 (1990); *ТМФ* **86**, 272 (1991).

The Higgs mechanism in superconducting structures

S.V. Kuplevakhsky

It is shown that in equilibrium superconducting structures with *s*-wave-type pairing the single-valued part of the complex order parameter (quasi-average) $\langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$ is transformed into the longitudinal component of the vector potential as in the Abelian Higgs model of the relativistic field theory. The consideration is based on the microscopic Hamiltonian of the system in the presence of an external static magnetic field and infinitesimally small sources of Cooper pairs. The presence of impurities and non-superconducting barriers is envisaged and quantum nature of the induced electromagnetic field is also taken into account. The quantization of the latter is carried out under the condition $A_0 = 0$ (with A_0 being the scalar potential), which does not violate invariance with respect to gauge transformations that do not depend on time. Exact relations determining the quasi-average $\langle \psi_{\uparrow} \psi_{\downarrow} \rangle$ are established. These relations play a key role in a new derivation of the mean-field equations that is presented in the paper. On the basis of the obtained results, a new physical interpretation of the Josephson effect (without “phase differences») is proposed and some consequences are discussed.

PACS: 74.20.Fg BCS theory and its development;
11.15.Ex Spontaneous breaking of gauge symmetries;
74.50.+r Tunneling phenomena; Josephson effects.

Keywords: superconductivity, Higgs mechanism, Josephson effect.