

Динамические солитоны в антиферромагнетиках (Обзор)

Е.Г. Галкина

Институт физики НАН Украины, пр. Науки, 46, Киев, 03028, Украина

Б.А. Иванов

Институт магнетизма НАН и МОН Украины, пр. Вернадского, 36-б, Киев, 03142, Украина

E-mail: bor.a.ivanov@gmail.com

Статья поступила в редакцию 1 марта 2018 г., опубликована онлайн 28 мая 2018 г.

Представлен обзор теоретических исследований магнитных солитонов в антиферромагнетиках (АФМ). Даны основные понятия физики АФМ и теории солитонов. Рассмотрение нелинейной динамики АФМ проводится с единых позиций на основе нелинейной сигма-модели для вектора антиферромагнетизма. Вывод этого уравнения и его интегралов движения обсуждается с учетом реальной структуры АФМ. Основное внимание уделяется исследованию двухпараметрических солитонов, которые характеризуются как поступательным движением центра солитона, так и внутренней динамикой спинов в солитоне. Рассмотрены солитоны различных типов: одномерные и двумерные, топологические и не обладающие топологическим зарядом. Проведен анализ эффектов понижения динамической симметрии АФМ, которые обусловлены разрушением лоренц-инвариантного характера сигма-модели. Такие эффекты возникают при последовательном учете взаимодействия Дзялошинского–Мория и/или сильного внешнего магнитного поля. Эта проблема ранее не обсуждалась в монографической литературе. Установлены классы универсальности поведения движущихся солитонов.

Представлено огляд теоретичних досліджень магнітних солітонів в антиферомагнетиках (АФМ). Дано основні поняття фізики АФМ та теорії солітонів. Розгляд нелінійної динаміки АФМ проводиться з єдиних позицій на основі нелінійної сигма-моделі для вектора антиферомагнетизму. Це рівняння та його інтеграли руху обговорюється з урахуванням реальної структури АФМ. Основна увага приділяється вивченню двопараметричних солітонів, які характеризуються як поступальним рухом центру солітону, так і внутрішньою динамікою спінів в солітоні. Розглянуто солітони різних типів: одновимірні та двовимірні, топологічні та солітони, що не мають топологічного заряду. Проведено аналіз ефектів зниження динамічної симетрії АФМ, які обумовлені руйнуванням лоренц-інваріантного характеру сигма-моделі. Такі ефекти виникають при послідовному врахуванні взаємодії Дзялошінського–Морія та/або сильного зовнішнього магнітного поля. Ця проблема раніше не обговорювалася в монографічній літературі. Встановлено класи універсальності поведінки рухомих солітонів.

PACS: 75.50.Ee Антиферромагнетики;
75.76.+j Эффекты переноса спина;
75.78.-n Динамика намагничивания.

Ключевые слова: антиферромагнетики, антиферромагнитный вектор, нелинейная сигма-модель, взаимодействие Дзялошинского–Мория, доменная стенка, антиферромагнитный вихрь, солитонная капля, скирмион, терагерцовые магны, спинтроника, осциллятор со спиновой накачкой.

Содержание

1. Введение	795
2. Антиферромагнетизм: основные понятия	796
3. Уравнения спиновой динамики антиферромагнетиков и их интегралы движения	797
4. Двухпараметрические солитоны в одноосных антиферромагнетиках	800

5. Двумерные топологические солитоны (вихри и скирмионы) в антиферромагнетиках	804
6. Эффекты понижения динамической симметрии АФМ и структура солитонов	808
7. Заключение	810
Литература.....	810

1. Введение

Понятие «солитон» является наиболее адекватным для описания широкого класса физических систем, для которых динамика существенно нелинейна. В качестве примера можно привести упорядоченные среды с низкой размерностью, в которых элементарными возбуждениями среды являются не квазичастицы линейной теории, а существенно нелинейные объекты — солитоны. Нелинейность спиновой динамики магнетиков во многом определяется чисто геометрическими свойствами поля намагниченности (намагниченностей подрешеток), и эти свойства порождают топологически-нетривиальные структуры в магнетиках. Для магнетиков исследовано большое число различных солитонных состояний, включающих одномерные солитоны, описывающие движущиеся доменные стенки или волны поворота, двумерные магнитные вихри, нетопологические солитоны различной размерности — так называемые магنونные капли, а также топологические солитоны, как двумерные (их сейчас принято называть скирмионами), так и трехмерные, с ненулевым индексом Хопфа (см. монографии и обзоры [1–6]).

Следует отметить, что изучение магнитных солитонов проводилось в течение многих десятилетий, практически с начала развития современной теории магнетизма. Х. Бете нашел решения, описывающие магنونные комплексы для спиновой цепочки [7], Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц описали движение доменной стенки [8]. Уокер (L. Walker) построил точное решение, описывающее динамику доменной стенки с немалой скоростью, и нашел предельное значение скорости стенки (это решение было получено в пятидесятых годах, но не было тогда опубликовано; сейчас оно описано во многих монографиях и обзорах, см., например, [2,3,9]). Интенсивное исследование одномерных солитонов, описывающих доменные стенки, было инициировано разработкой приборов на основе цилиндрических магнитных доменов (magnetic bubbles) [9,10]. Тогда же было сформулировано представление о неодномерных магнитных структурах с нетривиальной топологией, блоховских линиях и блоховских точках [9]. К концу семидесятых годов были исследованы основные типы локализованных магнитных солитонов [11–29] и сформулированы общие методы топологической классификации солитонов [30–32]. Отметим, что на этом этапе солитоны исследовались не только в ферромагнетиках, но и в антиферромагнетиках (АФМ) [12,20,29]. В этот период было начато экспериментальное и теоретическое исследование динамики доменных стенок в АФМ со слабым ферромагнетизмом [33–35], см. также [36,37].

Были предсказаны особые топологические дефекты в АФМ, спиновые дисклинации [38,39], обусловленные наличием дислокации в кристаллической решетке АФМ. В указанный период значительный вклад в исследование магнитных солитонов внесен группой А.М. Косевича в Физико-техническом институте низких температур, которая имела большой опыт анализа нелинейных самокализованных возбуждений кристаллов [40,41] и дислокаций в кристаллах [42].

В конце XX столетия наблюдается быстрый рост числа работ, посвященных экспериментальному и теоретическому исследованию магнитных солитонов различных типов. Это естественно связано с ростом возможностей эксперимента и потенциальными применениями. Особо отметим создание искусственных магнитных материалов, магнитных наночастиц и их массивов [43–45]. Было обнаружено, что двумерные топологические солитоны, магнитные вихри, реализуют основное состояние магнитных частиц цилиндрической формы и субмикронного размера [43–45]. Появилась новая область электроники и прикладной физики магнетизма, спинтроника (spintronics — SPINelecTRONICS), в которой главная роль отводится не заряду, а спину электрона [46–48]; здесь ключевое понятие — спиновый ток. Один из наиболее впечатляющих эффектов действия спинового тока состоит в том, что он может создавать в магнетике специфическое «антизатухание» и компенсировать естественное затухание спиновой динамики. В результате под воздействием спинового тока магнитный момент наночастицы может переходить в состояние устойчивых немалых колебаний с частотой порядка собственных частот магнетика (в диапазоне единиц и десятков гигагерц для ферромагнетиков). Это дает возможность создать так называемый осциллятор со спиновой накачкой (spin-torque oscillator), для которого источником питания служит обычный постоянный электрический ток, преобразованный в спиновый ток. Оказалось, что в спинтронике ферромагнетиков большую роль играют магнитные солитоны различного типа. Спиновый ток возбуждает прецессионное движение вихрей в наноразмерных столбчатых спин-вентильных структурах [49–51], причем вихревые структуры обладают наименьшим порогом возбуждения осцилляций [51]. Было найдено, что для создания наногенераторов, возбуждаемых спин-поляризованным током, возбуждение двумерных солитонов типа магنونных капель в тонких пленках с перпендикулярной анизотропией имеет серьезные преимущества перед системами с однородно намагниченными частицами [52,53]. Продемонстрирована эффективность возбуждения одномерных

солитонов в пленках в форме узких полосок [54] и возможность возбуждения двумерных динамических топологических солитонов [55].

До последних лет спинтроника рассматривалась как «сугубо ферромагнитная» область прикладного магнетизма. В последние годы возникла идея спинтроники АФМ, в которых частоты магнитного резонанса лежат в терагерцовом диапазоне (типичные значения — от сотен гигагерц до единиц терагерц [56,57] и даже до десятков терагерц [58,59]. Этот факт обусловлен так называемым «обменным усилением» всех динамических параметров АФМ, не только частот магнитного резонанса, но и предельной скорости движения солитонов, см. монографию Турова с соавторами [60]. В АФМ наблюдались также рекордно высокие скорости нелинейного вращения спинов подрешеток (до 0,5 радиан/пс) [61]. В последние годы возрастает потребность в освоении диапазона терагерцовых волн [62–64]. Возможные приложения терагерцовых волн включают астрофизику и физику атмосферы, биологию и медицину, обеспечение безопасности и поиск запрещенных материалов, связь в космосе, информационные технологии, сверхбыструю обработку данных. В работе [65] было показано, что эффекты спинового тока в АФМ могут быть столь же заметными, как и в ферромагнетиках, см. также обзор [66]. Это породило идеи создания спинтронного автоосциллятора, использующего АФМ в качестве активного элемента. Предложены конкретные схемы приборов спинтроники, основанных на АФМ и работающих в диапазоне терагерц [67–69]. Пока обсуждалось только применение однородных спиновых колебаний в малых частицах АФМ, но можно ожидать, что для развития будущей ТГц-спинтроники важным будет возбуждение различных солитонных состояний, АФМ вихрей или АФМ магнетонных капель.

В настоящем обзоре проведено систематическое изложение проблем нелинейной спиновой динамики, прежде всего динамических солитонов в АФМ. Очерченный круг вопросов составляет целостный раздел нелинейной физики магнетизма, развитие которого актуально как для фундаментальной физики, так и в прикладном аспекте.

2. Антиферромагнетизм: основные понятия

Магнитный порядок ферромагнетиков характеризуется появлением ненулевого среднего значения спиновой плотности $\langle \mathbf{S} \rangle$ или намагниченности \mathbf{M} , в простейшем случае $\mathbf{M} = -g\mu_B \langle \mathbf{S} \rangle$, g -фактор Ланде, $g \approx 2$ для ионов в s -состоянии, μ_B — модуль магнетона Бора. На языке теории симметрии это означает, что имеет место спонтанное нарушение симметрии относительно отражения времени $t \rightarrow -t$, при этом значение намагниченности меняет знак. Стандартная феноменологическая теория ферромагнетизма базируется на предположении $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$.

Для АФМ симметрия относительно инверсии времени спонтанно нарушена, но спонтанная намагниченность \mathbf{M} отсутствует. Эту ситуацию проще всего представить, полагая, что кристаллическая решетка АФМ содержит конечное число n магнитных подрешеток, каждая из которых имеет отличную от нуля намагниченность \mathbf{M}_α , но эти намагниченности компенсируют друг друга [60]. Ограничимся простейшим примером двухподрешеточного АФМ, в основном состоянии которого намагниченности подрешеток \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в точности равны по длине, $|\mathbf{M}_1| = |\mathbf{M}_2| = M_0$, но ориентированы антипараллельно. При таком определении подразумевается, что магнитные подрешетки эквивалентны кристаллографически, т.е. существует элемент кристаллической группы симметрии (группы симметрии парамагнитной фазы), переводящий их одну в другую. Следуя Турову, будем называть операции симметрии, не переставляющие магнитные подрешетки, четными, а переставляющие — нечетными, и обозначать их знаками (+) и (–) соответственно [60]. Возможность строго нулевого значения намагниченности $\mathbf{M} = 0$ при отличном от нуля среднем значении спинов, т.е. точной компенсации намагниченностей отдельных спинов при изменении внешних параметров в конечной области значений, связана именно с этой симметрией. Симметричный аспект предельно важен для физики антиферромагнетизма [60].

Намагниченность АФМ может быть отличной от нуля при наличии внешнего поля $\mathbf{H} \neq 0$, при сохранении спонтанного нарушения симметрии. Параметром порядка является вектор антиферромагнетизма $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$. Переменные \mathbf{L} и намагниченность \mathbf{M} удобны при записи феноменологической энергии АФМ. Для чисто изотропного АФМ вызванная полем намагниченность отлична от нуля и параллельна внешнему полю, $\mathbf{M} = M_s \mathbf{H}/H_{\text{ex}}$ при $|\mathbf{H}| \leq H_{\text{ex}}$ и $\mathbf{M} = M_s \mathbf{H}/|\mathbf{H}|$ при $|\mathbf{H}| > H_{\text{ex}}$. Здесь максимальное (насыщенное) значение намагниченности АФМ $M_s = 2M_0$ отвечает параллельной ориентации подрешеток и введено обменное поле H_{ex} , одна из важнейших характеристик АФМ. Энергию однородного обменного взаимодействия в АФМ записывают в виде $w_{\text{ex},u} = H_{\text{ex}}^2 \mathbf{M}^2 / 2M_s$ (для ферромагнетиков с учетом условия $\mathbf{M}^2 = \text{const}$ вклад однородного обмена учитывать не нужно). Значение обменного поля $H_{\text{ex}} \sim JSZ/g\mu_B$, где $J > 0$ — обменный интеграл, порядка температуры Нееля АФМ T_N , Z — число ближайших соседей, S — спин атома. Для типичных значений $T_N \sim 100\text{--}1000$ К значения обменного поля огромные, порядка единиц или десятков мегаэрстед. Это значение намного больше, чем характерные поля релятивистских взаимодействий, например, полей анизотропии H_a , которые не превышают нескольких килоэрстед.

Вместо векторов \mathbf{M} , \mathbf{L} удобно ввести нормированные векторы

$$\mathbf{l} = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)/2M_0, \quad \mathbf{m} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)/2M_0, \quad (1)$$

которые связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{l}^2 + \mathbf{m}^2 = 1, \quad \mathbf{ml} = 0. \quad (2)$$

В некоторых кристаллических АФМ при учете релятивистских взаимодействий вдоль определенных направлений возникает слабый спонтанный магнитный момент, обусловленный взаимодействием Дзялошинского (об этом речь пойдет дальше). Такие АФМ называются слабыми ферромагнетиками или скошенными АФМ (canted AFM), к ним относятся, например, ортоферриты с формулой $R\text{FeO}_3$, где R обозначает ион редкоземельного элемента или иттрия, гематит $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ и борат железа FeBO_3 . Теорию слабого ферромагнетизма на основе феноменологического подхода построил Дзялошинский [70], который обнаружил, что в феноменологической энергии АФМ могут присутствовать слагаемые, линейные по намагниченности \mathbf{m} . Их вклад в плотность энергии АФМ можно записать как $w_D = D_{ik} M_i l_k$, где тензор $D_{ik}(\mathbf{l})$ определяется симметрией АФМ и может, вообще говоря, зависеть от вектора \mathbf{l} . При анализе таких членов особо важна четность элементов симметрии АФМ; в частности, эти члены запрещены для АФМ с нечетным центром инверсии или нечетной трансляцией (детали см. в [60]). Простейшая форма такого инварианта имеет вид $w_D = H_D (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{M} \times \mathbf{l}])$, где единичный вектор \mathbf{n} параллелен четной оси симметрии АФМ и H_D — параметр материала. Мория нашел микроскопический механизм реализации такого взаимодействия [71], которое сейчас принято называть взаимодействием Дзялошинского–Мории (ВДМ). Энергия ВДМ линейна по \mathbf{M} и может быть переписана через некоторое эффективное поле Дзялошинского, $w_{DMI} = -\mathbf{M}\mathbf{H}_D$, где в общем случае $H_i = -D_{ik} l_k$. Для антисимметричного ВДМ $\mathbf{H}_D = H_D [\mathbf{n} \times \mathbf{l}]$. \mathbf{H}_D можно рассматривать как некоторое внутреннее эффективное поле, присутствующие в АФМ и зависящее от направления вектора \mathbf{l} . Даже в отсутствие внешнего магнитного поля наличие ВДМ может привести к ненулевой намагниченности, что и позволило описать явление слабого ферромагнетизма. Не менее важно то, что наличие ВДМ может приводить к принципиальной модификации спиновой динамики и, в частности, динамических свойств солитонов.

Важно отметить, что ВДМ не ограничивается указанным выше антисимметричным видом. Например, для тетрагонального кристалла MnF_2 с нечетной главной осью четвертого порядка антисимметричное ВДМ запрещено, но есть инвариант вида $w_D = H'_D (M_x l_y + M_y l_x)$. Для двухосных АФМ типа ортоферритов с четной осью вдоль оси y присутствуют два инварианта: антисимметричный $(M_x l_z - M_z l_x)$ и симметричный $(M_x l_z + M_z l_x)$. Следует ожидать, что наибольшее (обменно-релятивистское) значение константы H_D будет отвечать антисимметричному ВДМ, а

прочие инварианты являются чисто релятивистскими [70]. Следует заметить, что значение обменного поля существенно превышает все остальные характерные поля для АФМ, поэтому как восприимчивость АФМ, пропорциональная параметру M_0/H_{ex} , так и магнитный момент, наведенный за счет ВДМ, малы для всех АФМ.

3. Уравнения спиновой динамики антиферромагнетиков и их интегралы движения

Динамику АФМ можно описать при помощи замкнутого уравнения для единичного вектора антиферромагнетизма \mathbf{l} . При этом вектор намагниченности АФМ является подчиненной переменной и определяется вектором \mathbf{l} и его производной по времени $d\mathbf{l}/dt$. Это уравнение получается при условии малости намагниченности \mathbf{m} , $\mathbf{m}^2 \ll \mathbf{l}^2$, и можно считать, что $\mathbf{l}^2 = 1$. Динамические уравнения движения для поля единичного вектора \mathbf{l} принято называть уравнениями сигма-модели. Использование уравнений сигма-модели существенно упрощает анализ как линейных, так и нелинейных динамических эффектов в АФМ. Вывод уравнений сигма-модели для АФМ подробно описан в ряде монографий и обзоров [36,37,60,72], и мы не будем на нем останавливаться.

Для общей модели АФМ с произвольной формой ВДМ лагранжиан сигма-модели, описывающий динамику вектора \mathbf{l} в бездиссипативном пределе, может быть представлен в виде [57]

$$L = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{M_0}{\gamma^2 H_{\text{ex}}} \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right)^2 - \frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} \left(\mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \left[\mathbf{l} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} \right] \right) - \frac{A}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_i} \right)^2 - w_r(\mathbf{l}) \right\}. \quad (3)$$

Здесь $\int (...) d\mathbf{r}$ означает интегрирование по всему объему магнетика. Для двумерного (2D) солитона в тонкой магнитной пленке или одномерного (1D) в тонкой проволоке подразумевается замена $\int d\mathbf{r} \rightarrow L \int dx dy$ или $\int d\mathbf{r} \rightarrow S \int dx$, где L или S — толщина пленки или площади поперечного сечения проволоки соответственно. Далее в работе интегралы движения в 2D и 1D случаях будут записываться без множителей S и L .

Для лагранжиана АФМ можно применить простую механическую аналогию и представить его в виде $L = T + G - W$, где динамические члены, «кинетическая энергия» T и гироскопическое слагаемое G , определяются первым и вторым слагаемыми в (3). Первое слагаемое, квадратичное по временной производной $(\partial \mathbf{l} / \partial t)^2$, определяет «инерционные» свойства спиновой динамики АФМ, $\gamma = g\mu_B/\hbar$ — гиромагнитное отношение, H_{ex} — обменное поле, здесь и далее выбрано $\gamma > 0$. Это слагаемое является универсальным для лю-

бого АФМ. Уместно заметить, что инерционные свойства спиновой динамики отсутствуют для ферромагнетиков, лагранжиан которых содержит только гироскопическое слагаемое, линейное по $\partial \mathbf{M}/\partial t$. Второе слагаемое определяет гироскопическую динамику, которая для АФМ может возникать только за счет эффективного поля $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_D$. Два последних слагаемых определяют «потенциальную энергию» W . Здесь введена константа неоднородного обмена A , $w_r(\mathbf{l})$ описывает энергию релятивистских взаимодействий, которая включает энергию анизотропии АФМ $w_a(\mathbf{l})$ и вклад внешнего магнитного поля,

$$w_r(\mathbf{l}) = w_a(\mathbf{l}) + \frac{M_0}{H_{\text{ex}}} [(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})^2 - \mathbf{H}^2]. \quad (4)$$

Второе слагаемое, квадратичное по компонентам поля, присутствует для любого АФМ, оно связано с анизотропией восприимчивости АФМ. Роль этого слагаемого может быть представлена как появление наведенной полем одноосной анизотропии с трудной осью вдоль магнитного поля. Конкуренция этой наведенной анизотропии с исходной кристаллической анизотропией типа легкая ось ответственна за существование спин-флор перехода, см., например, [60]. В принципе, в энергии $w_r(\mathbf{l})$ есть еще одно слагаемое, билинейное по компонентам внешнего поля \mathbf{H} и поля Дзялошинского $\mathbf{H}^{(D)}$ и описывающее взаимодействие слабого ферромагнитного момента с внешним магнитным полем. Оно важно для описания вынужденного движения доменных стенок в слабых ферромагнетиках [36,37], но не проявится во всех рассмотренных ниже «солитонных» задачах, и здесь не рассматривается.

Уравнения сигма-модели получаются варьированием лагранжиана (3), с учетом условия $\mathbf{l}^2 = 1$ их можно записать в виде $[\mathbf{l} \times (\delta L / \delta \mathbf{l})] = 0$. Для анализа солитонов удобнее использовать угловые переменные для единичного вектора \mathbf{l} :

$$l_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad l_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad l_3 = \cos \theta, \quad (5)$$

где $l_{1,2,3}$ — проекции вектора \mathbf{l} на ортогональные оси 1, 2 и 3, и полярная ось 3 выбрана вдоль легкой оси АФМ, так что основному состоянию отвечает $\theta = 0, \pi$.

В угловых переменных выражения для слагаемых в лагранжиане приобретают вид

$$T = \frac{M_0}{\gamma^2 H_{\text{ex}}} \int d\mathbf{r} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$W = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{A}{2} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right] + w_r(\theta, \varphi) \right\}. \quad (7)$$

При учете в лагранжиане только универсального инерционного динамического слагаемого спиновая дина-

мика в АФМ является лоренц-инвариантной, что существенно упрощает анализ движения солитонов.

Обсудим теперь свойства «гироскопического» слагаемого, линейного по $\partial \mathbf{l}/\partial t$, которое при наличии магнитного поля и/или некоторых видов ВДМ может приводить к разрушению лоренц-инвариантности и, как следствие, к понижению динамической симметрии АФМ. Заметим, что, введя вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{l}$, не связанный условием $\mathbf{r}^2 = 1$, гироскопическое слагаемое можно представить в виде

$$-\frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{H}^{(\text{eff})}}{r^2}. \quad (8)$$

Это выражение имеет такую же структуру, что и слагаемое в нерелятивистском лагранжиане, описывающем взаимодействие классической заряженной частицы, движущейся в трехмерном пространстве с координатой \mathbf{r} и скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, с фиктивным магнитным полем $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (дифференцирование проводится в пространстве \mathbf{r}). Магнитное поле входит в лагранжиан заряженной частицы через вектор-потенциал \mathbf{A} в точке \mathbf{r} , который определен только с точностью до некоторой калибровки, в то время как поле \mathbf{B} и уравнения движения являются калибровочно-инвариантными.

Для любого АФМ это фиктивное магнитное поле \mathbf{B} параллельно вектору \mathbf{l} и может быть представлено как [73]

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} B(\theta, \varphi),$$

$$B(\theta, \varphi) = 2(\mathbf{H}^{(\text{eff})} \cdot \mathbf{l}) - \frac{\partial H_i^{(\text{eff})}}{\partial l_i} + \frac{\partial H_i^{(\text{eff})}}{\partial l_k} l_i l_k. \quad (9)$$

Если ВДМ отсутствует, то величина $B(\theta, \varphi)$ определяется только внешним полем \mathbf{H} и $B(\theta, \varphi) = 2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{l})$. В отсутствие внешнего поля величина $B(\theta, \varphi)$ определяется полем Дзялошинского $H_i^{(D)} = D_{ij}(\mathbf{l}) l_j$ и может быть представлена через тензор D_{ij} :

$$B(\theta, \varphi) = 3D_{ij} l_i l_j - D_{ii} + \frac{\partial D_{ij}}{\partial l_k} l_i l_j l_k - \frac{\partial D_{ij}}{\partial l_i} l_j. \quad (10)$$

Конкретный вид $B(\theta, \varphi)$ для практически всех известных АФМ можно найти в работах [73,74] (см. также ниже разд. б). Гироскопическое слагаемое в лагранжиане сигма-модели можно представить в виде

$$G = -\frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} \int d\mathbf{r} \left[A_\theta(\theta, \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial t} + A_\varphi(\theta, \varphi) \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right], \quad (11)$$

где A_θ, A_φ — компоненты фиктивного вектора-потенциала (8) в сферических координатах. Таким образом, добавление к лагранжиану полной производной по времени от произвольной функции $F = F(\theta, \varphi)$ может трактоваться как калибровочное преобразование.

Уравнения для переменных θ и φ можно записать в виде

$$A \left(\nabla^2 \theta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - A \sin \theta \cos \theta \left[(\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} B(\theta, \varphi) \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

$$A \nabla (\sin^2 \theta \nabla \varphi) - \frac{A}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\partial w_r}{\partial \varphi} + \frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} B(\theta, \varphi) \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Здесь введена характерная скорость

$$c = \gamma \sqrt{A H_{\text{ex}} / 2M_0}, \quad (14)$$

которая определяется только обменными взаимодействиями и значительно превышает характерные скорости для ферромагнетиков (один из примеров обменного усиления динамических параметров АФМ). Слагаемые с первыми производными определяются гироскопическими слагаемыми в лагранжиане, $B(\theta, \varphi) = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{B})$, см. (8) или (9). Как и следовало ожидать, уравнения движения являются калибровочно-инвариантными. Для наиболее типичного вида ВДМ, $w_D = H_D (\mathbf{n} \cdot [\mathbf{M} \times \mathbf{I}])$ или $\mathbf{H}_D = H_D [\mathbf{n} \times \mathbf{I}]$, функция $B(\theta, \varphi) = 0$ и гироскопические слагаемые в уравнениях отсутствуют.

Знание лагранжиана позволяет построить тензор энергии-импульса поля вектора \mathbf{I} и выписать основные интегралы движения спиновой системы АФМ. Энергия АФМ равна сумме «кинетической энергии» и «потенциальной энергии» вектора \mathbf{I} , $E = T + W$, T и W определяются уравнениями (6) и (7). Однако при наличии гироскопических слагаемых, линейных по $\partial \mathbf{I} / \partial t$, при записи других интегралов движения возникает проблема. Обобщенный импульс поля вектора \mathbf{I} и некоторые компоненты тензора энергии-импульса не инвариантны относительно указанных выше калибровочных преобразований. В частности, формулу для импульса поля намагниченности \mathbf{P} можно записать в виде

$$P_i = -\frac{2M_0}{\gamma^2 H_{\text{ex}}} \int \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x_i} \right) d\mathbf{r} + P_i^{(0)},$$

$$P_i^{(0)} = \frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} \int \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial x_i} \right) d\mathbf{r}, \quad (15)$$

или в угловых переменных

$$\mathbf{P}^{(0)} = \frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} \int d\mathbf{r} \left[A_\theta(\theta, \varphi) \nabla \theta + A_\varphi(\theta, \varphi) \sin \theta \nabla \varphi \right]. \quad (16)$$

Таким образом, при наличии гироскопических слагаемых величина $\mathbf{P}^{(0)}$ может быть ненулевой при $\partial \mathbf{I} / \partial t = 0$, т.е. для статического солитона. Важной проблемой является то, что $\mathbf{P}^{(0)}$ зависит от конкретной калибровки, выбранной при записи лагранжиана.

Эта проблема хорошо известна для ферромагнетиков, для которых такая неопределенность приводит к неоднозначности определения импульса солитона, что обсуждалось многими авторами [75–85]. Для описания АФМ в рамках сигма-модели существуют, однако, прозрачные физические соображения, позволяющие фиксировать эту калибровку. Заметим, что намагниченность АФМ, равную плотности спинового момента АФМ, умноженной на гиромагнитное отношение γ , можно определить через вариацию лагранжиана (3) по $\partial \mathbf{I} / \partial t$, $\mathbf{M} = \gamma [\delta L / \delta (\partial \mathbf{I} / \partial t) \times \mathbf{I}]$ [75,87,88]. Для лагранжиана (3) это приводит к выражению

$$\mathbf{M} = \frac{M_s}{H_{\text{ex}}} \left[\mathbf{H}_{\text{eff}} - \mathbf{I} (\mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{I}) + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \times \mathbf{I} \right) \right]. \quad (17)$$

В силу равенства $\mathbf{H}_{\text{eff}} - \mathbf{I} (\mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{I}) = [\mathbf{A} \times \mathbf{I}]$, см. (8), это выражение не является калибровочно-инвариантным. Однако оно совпадает с тем, что получается при выводе сигма-модели из системы уравнений Ландау–Лифшица для намагниченностей подрешеток. Слагаемые с \mathbf{H}_{eff} определяют статическую часть намагниченности, вызванную внешним магнитным полем и/или полем Дзялошинского, их форма хорошо известна из статических экспериментов [60]. Поэтому можно считать, что при записи лагранжиана (3) сделан правильный выбор калибровки, во всяком случае, для описания \mathbf{M} . Можно рассчитывать, что и импульс солитонов $\mathbf{P}^{(0)}$ правильно описывается лагранжианом (3), если калибровка выбрана той же.

Для анализа магнитных солитонов весьма важен случай чисто одноосного АФМ, когда угловая переменная φ входит в лагранжиан только через свои производные. Для этого надо, чтобы w_r не зависела от φ и $\mathbf{H}^{(\text{eff})}$ было бы параллельно избранной оси \mathbf{e}_3 . В этом случае важным интегралом движения является проекция \mathbf{M} на полярную ось 3. Наличие этого интеграла обеспечивает существование прецессионных солитонов, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Этот интеграл движения для АФМ удобно представить в виде

$$N = \frac{1}{2\mu_0} \int M_3 dx = \frac{M_s}{2\mu_B \gamma H_{\text{ex}}} \int \left[\gamma H_3 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \sin^2 \theta d\mathbf{r}. \quad (18)$$

При учете стандартного квантования проекции спина N — целое число. Величина N интерпретирована как число магнонов, связанных в солитоне, и использована при квазиклассическом квантовании солитонов, в ферромагнетиках [15–18] и АФМ [89,90], см. также [1–3].

Вернемся к вопросу об определении импульса поля вектора \mathbf{I} применительно к проблеме импульса солитона. Заметим, что выражения (15) или (16) получаются в рамках подхода коллективных переменных, когда предполагается, что $\mathbf{I} = \mathbf{I}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_s)$ и $\partial I_i / \partial t = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) I_i^{(0)}$, где $\mathbf{R}_s = \mathbf{R}_s(t)$ и $\mathbf{v} = d\mathbf{R}_s/dt$ — координата и скорость солитона, $\mathbf{I}^{(0)}$ — решение, описывающее неподвижный солитон. В этом подходе, применимом при малых скоростях солитона ($v \ll c$ для АФМ), импульс можно записать как $\mathbf{P} = m\mathbf{v} + \mathbf{P}^{(0)}$, см. (15). Сохранение импульса \mathbf{P} в пространственно-однородном случае гарантируется теоремой Нетер. Этот же факт можно доказать и напрямую с использованием уравнений для θ и φ . Однако величины «кинематического» импульса $m\mathbf{v}$ и величины $\mathbf{P}^{(0)}$ по отдельности могут не сохраняться. Если $d\mathbf{P}^{(0)}/dt \neq 0$, уравнение сохранения импульса \mathbf{P} можно записать в виде $m d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}_G$, где введена гироскопическая сила (гиросила) $\mathbf{F}_G = -d\mathbf{P}^{(0)}/dt$. Наличие гиросилы для топологически-нетривиальных состояний некоторых цилиндрических доменов или блоховских линий в ферромагнетиках надежно установлено [9]. Расчет этой величины может быть проведен или прямым дифференцированием (16), или с использованием уравнений для θ и φ , в результате получается

$$\frac{d\mathbf{P}^{(0)}}{dt} = \frac{2M_0}{\gamma H_{\text{ex}}} \int d\mathbf{r} B(\theta, \varphi) \sin \theta [(\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) \nabla \theta - (\mathbf{v} \cdot \nabla \theta) \nabla \varphi]. \quad (19)$$

Принципиально важно, что в отличие от величины $\mathbf{P}^{(0)}$, величина $d\mathbf{P}^{(0)}/dt$ содержит только фиктивное поле \mathbf{V} и является калибровочно-инвариантной. Полезно сравнить ситуацию с «проблемой импульса» для АФМ и ферромагнетиков. Для обеих систем фиктивное поле \mathbf{V} параллельно динамической переменной, единичному вектору намагниченности $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ или \mathbf{l} соответственно. Однако для всех возможных видов ВДМ и любых ориентаций поля структура $B(\theta, \varphi)$ такова, что полный поток поля \mathbf{V} через единичную сферу

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi B(\theta, \varphi) \quad (20)$$

равен нулю.

В случае ферромагнетика ситуация принципиально иная: для \mathbf{A} получается потенциал поля магнитного монополя, который можно записать только в сингулярной форме с особенностью на полупрямой, выходящей из точки расположения монополя (струне Дирака). Для ферромагнетика $\mathbf{V} = (M_0/\gamma)\mathbf{m}$. В этом случае полный поток \mathbf{V}_{FM} через сферу $\mathbf{m}^2 = 1$ имеет универсальное значение $\Phi_{FM} = 4\pi M_0/\gamma$. Это приводит к важным следствиям для динамики топологических солитонов в ферромагнетиках: для доменных стенок возникает периодический закон дисперсии, а для двумер-

ных локализованных солитонов гиросила пропорциональна их топологическому заряду, сравните формулу (20) при $B = \text{const}$ и определение топологического заряда Q , см. (45) в разд. 5. Как будет показано далее, для достаточно общей модели АФМ полный поток равен нулю и подобной универсальности нет.

4. Двухпараметрические солитоны в одноосных антиферромагнетиках

Чисто одноосная модель АФМ, в которой w_r зависит только от l_z^2 (ось z — избранная ось), имеет интеграл движения N (18) и в силу этого допускает анализ широкого класса солитонных решений. Для реализации такой модели следует считать, что энергия анизотропии $w_a = w_a(\theta)$, поле $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ параллельно избранной оси АФМ и $B(\theta, \varphi) = 2H \cos \theta$, а ВДМ изотропно в плоскости xy , т.е. $\mathbf{H}_D = H_D[\mathbf{e}_z \times \mathbf{l}]$. ВДМ такого вида типично для всех АФМ с четной главной осью, оно не дает вклада в уравнения движения, но приводит к появлению намагниченности в базисной плоскости АФМ. В этом случае уравнение для φ принимает вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sin^2 \theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \gamma H \right) \right] = c^2 \nabla (\sin^2 \theta \nabla \varphi), \quad (21)$$

а уравнение для θ содержит φ только в комбинации $c^2(\nabla \varphi)^2 - (\partial \varphi / \partial t - \gamma H)^2$. Эти уравнения допускают построение различных классов решений, как для солитонов, так и для нелинейных периодических волн различных типов.

Отметим важное свойство чисто одноосного АФМ: если ввести новую переменную $\tilde{\varphi}$,

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \gamma H t, \quad (22)$$

то уравнения для θ и $\tilde{\varphi}$ инвариантны относительно преобразований Лоренца, в которых роль характерной скорости играет величина c , см. (14) [89]. Если функции $\theta = \theta_0(x, y, z, t)$ и $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0(x, y, z, t)$ определяют некоторое (неподвижное) решение этих уравнений, то функции θ и $\tilde{\varphi}$, получающиеся из θ_0 и $\tilde{\varphi}_0$ заменой

$$(x, y, z, t) \rightarrow \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y, z, \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (23)$$

также являются решением. В силу этого свойства достаточно ограничиться анализом неподвижных решений и потом получить движущиеся решения из неподвижных с помощью преобразований Лоренца.

Начнем с анализа нелинейных периодических волн намагниченности АФМ. Легко видеть, что существует несколько типов таких волн. Одному типу отвечает решение вида $\tilde{\varphi} = \varphi_0 = \text{const}$, при этом для $\theta = \theta(\mathbf{r}, t)$ получается нелинейное уравнение Клейна–Гордона

$$\frac{A}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - A \nabla^2 \theta + \frac{dw_a}{d\theta} = 0,$$

где $w_a(\theta)$ — энергия анизотропии. Решение этого уравнения в виде простой волны $\theta = \theta(x - vt)$ можно записать в квадратурах при любом виде функции $w_a(\theta)$. Фактически эти волны имеют линейную поляризацию в плоскости, которая вращается вокруг оси z с частотой γH . При $H = 0$ такие линейно-поляризованные волны существуют и при наличии анизотропии в базисной плоскости, см. следующий раздел. При использовании простейшей формы энергии анизотропии

$$w_a(\theta) = \frac{K}{2}(l_x^2 + l_y^2) = \frac{K}{2} \sin^2 \theta \quad (24)$$

(константу анизотропии K часто записывают через поле анизотропии H_a , $K = M_0 H_a$) для $\theta(\mathbf{r}, t)$ получается синусоидальное уравнение Клейна–Гордона (уравнение синус-Гордон) [91]. Это уравнение является точно интегрируемым в одномерном случае и допускает построение N -солитонных решений, но оно не имеет неодномерных локализованных солитонных решений [6].

Помимо линейно поляризованных волн, для чисто одноосной модели существуют также и нелинейные волны с круговой поляризацией, которым отвечает

$$\varphi = kx - \omega t, \quad \theta = \theta_0 = \text{const}. \quad (25)$$

Зависимость частоты нелинейной волны от ее волнового вектора \mathbf{k} и амплитуды θ_0 определяется формулой

$$(\omega - \gamma H)^2 = c^2 k^2 + \frac{\gamma^2 H_{\text{ex}}}{2M_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0} \frac{\partial w_a(\theta_0)}{\partial \theta_0}. \quad (26)$$

Если выбрать, как это часто делается в одноосных магнетиках, энергию анизотропии в простейшем виде (24), то получается $\omega - \gamma H = \pm \sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2}$, где $\omega_0^2 = \gamma^2 H_{\text{ex}} H_a / 2$. Таким образом, частота нелинейной волны произвольной амплитуды не зависит от значения ее амплитуды θ_0 . Это достаточно необычная ситуация; она демонстрирует специфическое вырождение АФМ как нелинейной системы при таком выборе анизотропии (напомним, что в ферромагнетике, даже изотропном, частота нелинейной волны зависит от ее амплитуды, $\omega \propto \cos \theta_0$). В частности, критерий Лайтхилла в таком случае не дает возможности сделать вывод об устойчивости нелинейной волны.

Это вырождение проявляется и в свойствах солитонов [89] и пропадает при учете более общего вида энергии анизотропии. Поэтому при конкретных расчетах будем считать

$$w_a(\theta) = \frac{K}{2} \sin^2 \theta - \frac{K_4}{4} \sin^4 \theta. \quad (27)$$

В таком случае для частоты нелинейной волны можно получить

$$(\omega - \gamma H)^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2 - 2(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) \sin^2 \theta_0. \quad (28)$$

Здесь введены обозначения:

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{H_{\text{ex}} K / 2M_0}, \quad \bar{\omega} = \gamma \sqrt{H_{\text{ex}} (K - K_4 / 2) / 2M_0}. \quad (29)$$

Значение ω_0 определяет частоту однородного линейного антиферромагнитного резонанса при $H = 0$ в легкоосной фазе антиферромагнетика ($\theta = 0$). Эта фаза устойчива при $H < H_1$, где характерное значение поля $H_1 = \omega_0 / \gamma$. Если $K_4 > 0$, т.е. $\omega_0 > \bar{\omega}$, величина $H_{\text{sf}} = \bar{\omega} / \gamma$ определяет поле перехода первого рода от коллинеарной к спин-флоп фазе АФМ, в которой $\theta = \pi/2$ (см. подробнее [60,92]). Легко видеть, что если $\omega_0 > \bar{\omega}$, то $\partial \omega / \partial \theta_0 < 0$, что в соответствии с критерием Лайтхилла свидетельствует о неустойчивости периодических нелинейных волн относительно автомодуляции, т.е. образования солитонов. В дальнейшем будем считать $K_4 > 0$ и $H_{\text{sf}} < H_1$, когда можно ожидать существования устойчивых прецессионных солитонов.

Рассмотрим солитонные решения в коллинеарной фазе АФМ. Начнем с анализа неподвижных солитонных решений. Такие решения существуют как в 1D случае, так и для более высоких размерностей. Неодномерные солитоны обладают высокой пространственной симметрией, они являются радиально-симметричными в 2D или центрально-симметричными в трехмерном (3D) случаях. Легко убедиться, что уравнение (21) удовлетворяется тождественно, если θ зависит только от координаты, а $\tilde{\varphi} = -\omega t$ [89]. Для одномерного солитона решение имеет вид $\theta = \theta_0(x)$, $\tilde{\varphi} = -\omega t$, $\theta_0(x)$ удовлетворяет уравнению второго порядка, для которого существует первый интеграл,

$$c^2 \left(\frac{d\theta_0}{dx} \right)^2 + \omega^2 \sin^2 \theta_0 - \frac{\gamma^2 H_{\text{ex}}}{M_0} w_a(\theta_0) = \text{const}, \quad (30)$$

и решение которого можно записать в квадратурах для любого вида $w_a(\theta_0)$. Если выбрать энергию анизотропии в простейшем виде (24), то при учете условия локализации уравнение (30) сводится к $c(d\theta_0/dx) = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \theta_0$. Солитонное решение существует при $\omega^2 < \omega_0^2$. Оно определяет стандартную 180-градусную доменную стенку, $\cos \theta_0 = \sigma \text{th}[x/x_0(\omega)]$, где $\sigma = [l_z(+\infty) - l_z(-\infty)]/2 = \pm 1$, $x_0(\omega) = x_0 / \sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}$. Здесь величина x_0 , так называемая обменная длина магнетика

$$x_0 = \sqrt{\frac{A}{K}} = \frac{c}{\omega_0}, \quad (31)$$

определяет толщину стенки при $\omega = 0$. Видно, что при $\omega \rightarrow \omega_0$ толщина стенки расходится, при этом ее энергия и число магнонов также расходятся как $1/\sqrt{\omega_0 - \omega}$. Делокализация солитона на границе его существования типична для солитонных задач, однако расходимость E и N принципиально отличается от стандартного поведения. Для последовательного описания поведения солитона при $\omega_0 - \omega \ll \omega_0$ нужно использовать энергию анизотропии вида (27). Важно отметить, что существование прецессионных солитонов типа доменных стенок уникально для АФМ; в ферромагнетиках стенки есть только при $\omega = 0$, при $\omega \neq 0$ существуют только локализованные солитоны.

Для неодномерных солитонов ($D = 2, 3$) решение можно искать в виде

$$\theta = \theta_0(r), \quad \tilde{\varphi} = -\omega t, \quad (32)$$

где r обозначает радиальную координату в цилиндрической или сферической системе координат для 2D или 3D случаев соответственно. Вид функции $\theta_0(r)$ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$c^2 \left(\frac{d^2 \theta_0}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d\theta_0}{dr} \right) + \omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{\gamma^2 H_{ex}^2}{2M_0} \frac{\partial w_a}{\partial \theta_0} = 0, \quad (33)$$

где в скобках стоит радиальная часть лапласиана для 2D или 3D случаев. Локализованному солитону отвечает решение, в котором вдали от центра солитона (при $r \rightarrow \infty$) функция $\theta(x) \rightarrow 0$. Чтобы избежать сингулярности при $r \rightarrow 0$, следует, кроме того, потребовать, чтобы $d\theta/dr \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Ниже получим конкретный вид уравнения (33) для солитонов различной размерности в модели с анизотропией вида (27). А сейчас обсудим те свойства солитонов, которые можно исследовать, не задавая конкретный вид $w_a(\theta)$ и без знания функции $\theta(x)$.

Прежде всего заметим, что солитонам вида (32) отвечает ненулевое значение интеграла движения N (18). Стабильность таких солитонов, которые естественно назвать прецессионными, определяется именно сохранением N , т.е. прецессионные солитоны являются динамическими.

Для θ_0 получаются лоренц-инвариантные уравнения, и структура движущегося солитона получается стандартной заменой; например, для 3D случая

$$\theta_0(r) \rightarrow \theta_0(R), \quad \tilde{\varphi} \rightarrow -\frac{\omega(t - vx/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}},$$

$$R^2 = \frac{(x - vt)^2}{(1 - v^2/c^2)} + y^2 + z^2. \quad (34)$$

Однако физические величины E , \mathbf{P} , \mathbf{M} или M_z лоренц-инвариантностью не обладают, так как переход от φ к $\tilde{\varphi}$ содержит явно время. Получим закон преобразования E , \mathbf{P} и N при переходе от неподвижного к движущемуся солитону.

Решение (34) описывает двухпараметрический солитон. Два параметра, определяющие его структуру, — скорость солитона и частота ω . Легко убедиться, что значения N или действия I одинаковы как для неподвижного, так и для движущегося солитонов с тем же значением параметра ω :

$$N = N(\omega) = \frac{\omega M_s}{2\mu_B \gamma H_{ex}} \int \sin^2 \theta_0 d^{(D)}x, \quad (35)$$

где $d^{(D)}x = x$, $2\pi r dr$ или $4\pi r^2 dr$ для 1D, 2D или 3D солитонов, см. пояснение после формулы (3).

Таким образом, величина N для двухпараметрического солитона вида (32) зависит только от ω . Значения других интегралов движения — энергии и импульса — зависят от скорости солитона. Используя (33), (34) и формулу (32), можно получить

$$\mathbf{P} = \frac{vE_0(\omega)}{c(c^2 - v^2)^{1/2}}, \quad E = -2\mu_0 H N + \frac{E_0(\omega)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad (36)$$

величина $E_0(\omega)$ определяет энергию неподвижного солитона при $H = 0$ для данного значения ω .

Обращая соотношения (35) и (36), можно записать энергию солитона в виде функции от его интегралов движения:

$$E(\mathbf{P}, N) = -2\mu_0 H N + [E_0^2(N) + c^2 P^2]^{1/2}, \quad P = |\mathbf{P}|, \quad (37)$$

где $E_0(N)$ — энергия $E_0(\omega)$, выраженная через N . Для любой размерности пространства D для E_0 можно получить единую формулу:

$$E_0 = A \int \left\{ \frac{1}{D} \left(\frac{d\theta_0}{dr} \right)^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_0 \right\} d^{(D)}x. \quad (38)$$

Формулы (36) и (37) определяют искомую зависимость \mathbf{P} и E от скорости солитона, т.е. поведение \mathbf{P} и E при преобразованиях Лоренца. Легко видеть, что при $H = 0$ энергия и импульс составляют четырехмерный вектор $P_\mu = (E/c, \mathbf{P})$. Если же $H \neq 0$, то энергия есть сумма двух слагаемых, первое из которых, как и N , — инвариант преобразования Лоренца, а второе — компонента четырехмерного вектора. Таким образом, хотя при $H \neq 0$ лоренц-инвариантность разрушена, существуют простые правила получения энергии и импульса движущегося солитона из их значений для неподвижного солитона. Уместно заметить, что для солитонов в ферромагнетиках такое правило установить не удается, и исследование неодномерных солитонов, движущихся с немалой скоростью, не проведено.

Таким образом, характеристики двухпараметрического солитона определяются двумя функциями, $N(\omega)$ и $E(\omega)$. Чтобы их получить, следует конкретизировать вид энергии анизотропии, решить обыкновенное дифференциальное уравнение для θ_0 и вычислить интегралы в формулах (35) и (38). Для 1D солитона с простейшей анизотропией существуют только решения типа 180-градусных доменных стенок. Для более общей анизотропии вида (27) получается, что вид солитона зависит от частоты: решения типа стенок существуют только при $\omega^2 < \bar{\omega}^2$ [89]. Если же $\bar{\omega}^2 < \omega^2 < \omega_1^2$ (напомним, что $\bar{\omega}^2 < \omega_1^2$), то $\theta = 0$ при $x \rightarrow \infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. В центре солитона значение угла θ максимальное, величина θ_{\max} не превышает $\pi/2$,

$$\operatorname{tg} \theta_{\max} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega^2 - \bar{\omega}^2}}.$$

При $|\omega^2 - \bar{\omega}^2| \ll \omega_1^2 - \bar{\omega}^2$ солитон представляет собой связанное состояние двух 90-градусных доменных стенок, расстояние между которыми неограниченно возрастает при $\omega_1^2 \rightarrow \bar{\omega}^2$. Значение $\omega^2 = \bar{\omega}^2$ — особая точка решения. Для $N(\omega)$ и $E(\omega)$ получаются достаточно громоздкие выражения, которые здесь не выписываются, см. [89], зависимость $N(\omega)$ приведена на рис. 1. Характерное значение числа магновнов в солитоне

$$N^{(1D)} = \frac{4M_0}{\mu_B} \frac{x_0 \omega_0^2}{2\gamma H_{\text{ex}} \sqrt{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}} \quad (39)$$

велико даже для чисто одномерного АФМ (площадь поперечного сечения порядка a^2 , a — постоянная ре-

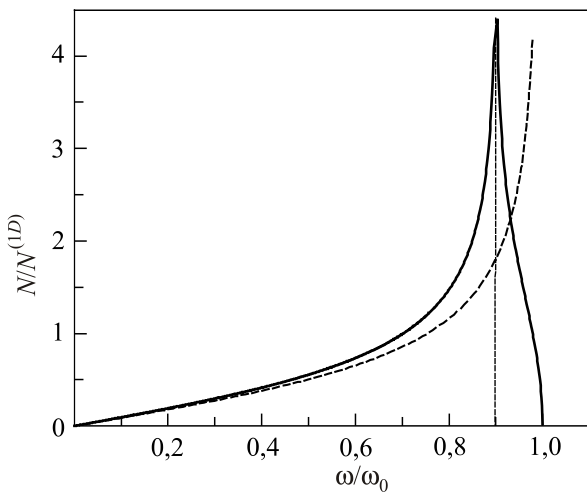


Рис. 1. Зависимость $N(\omega)$ (в единицах $N^{(1D)}$) от частоты ω (в единицах ω_0). Сплошная линия построена в соответствии с аналитической формулой [89], полученной для общего вида энергии анизотропии (27), штриховая линия определяет зависимость, найденную в простейшей модели. Для определенности принято, что $\bar{\omega} = 0,9\omega_0$.

шетки). При дальнейшем усложнении модели, например учете анизотропии шестого порядка, вид решений качественно не меняется.

Заметим, что в стандартных АФМ величины ω_1^2 и $\bar{\omega}^2$ близки, и область существования локализованных солитонов достаточно узкая. Таким образом, в значительной части области существования солитон представляет собой 180-градусную стенку вида $\cos \theta_0 = \pm \operatorname{th}[x/x_0(\omega)]$, и его характеристики с хорошей точностью описываются простыми формулами: $2\mu_B H_{\text{ex}} N(\omega) = 2\omega x_0 M_s / \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$ и $E_0(\omega) = 2\sqrt{AK} / \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$. Однако вблизи особой точки различия точных и приближенных решений принципиальные (см. рис. 1). Квантовые свойства прецессионных одномерных солитонов и возбужденные состояния над ними рассматривались в работах [93–95].

Для 2D или 3D картина солитонных состояний меняется принципиально. Решения типа доменных стенок отсутствуют, и могут существовать только локализованные солитоны, для которых $\theta_0(r) < \pi/2$. Чтобы в этом убедиться, перепишем уравнение (33) для анизотропии (27) в безразмерном виде:

$$2r_0^2 \left(\frac{d^2 \theta_0}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d\theta_0}{dr} \right) + \Omega \sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_0 = 0, \quad (40)$$

где введены обозначения

$$r_0^2 = \frac{c^2}{\omega_1^2 - \bar{\omega}^2}, \quad \Omega = \frac{\omega^2 - \bar{\omega}^2}{\omega_1^2 - \bar{\omega}^2}.$$

Если в этом уравнении заменить $\theta \rightarrow \theta/2$, то оно буквально переходит в уравнение, описывающее структуру неподвижного прецессионного солитона в ферромагнетике [89]. Полезно обсудить те свойства солитонов, которые могут быть получены аналитически непосредственно из уравнения (40).

Домножим это уравнение на $r^{2(D-1)} d\theta_0/dr$ и проинтегрируем его по r от $r=0$ до $r=\infty$. Слагаемые с производными взаимно уничтожаются, и получается интегральное соотношение, содержащее решение $\theta_0(r)$:

$$\Omega \int_0^\infty \sin^2 \theta_0 r^{2D-3} dr = \int_0^\infty \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0 r^{2D-3} dr. \quad (41)$$

Здесь оба интеграла положительны, и интеграл в правой части меньше, чем в левой. Следовательно, солитонные решения этого уравнения существуют только при $0 < \Omega < 1$, что согласуется с результатами работ [15,16,21]. Условие $0 < \Omega < 1$ дает $\bar{\omega}^2 < \omega^2 < \omega_1^2$, т.е. неоднородные АФМ солитоны существуют только в том узком интервале частот, в котором одномерные солитоны являются локализованными. Далее легко понять поведение решений в предельных случаях

$\Omega \ll 1$ и $1 - \Omega \ll 1$. Если $\Omega \approx 1$, то должно быть $\cos^2 \theta_0 \approx 1$ и амплитуда солитона мала; при этом $\theta = \sqrt{1 - \Omega} f(r\sqrt{1 - \Omega}/r_0)$, где $f(x)$ — универсальная монотонно убывающая функция, максимальное значение и область локализации которой порядка единицы. Такое поведение, как и для 1D солитона, отвечает делокализации солитонного состояния. В другом предельном случае, $\Omega \ll 1$ или $\omega^2 - \bar{\omega}^2 \ll \omega_1^2 - \bar{\omega}^2$, интеграл в правой части должен быть мал. Это возможно, если в значительной части солитона значение $\theta \simeq \pi/2$. Таким образом, солитон представляет собой замкнутую (круговую или сферическую) область со значением $\theta \simeq \pi/2$, отделенную от остальной части магнетика, в которой $\theta = 0$, переходной областью (90-градусной доменной стенкой) шириной порядка r_0 и радиусом $R \gg r_0$, рис. 2. Структуру такой стенки в одномерном случае легко найти. Для солитона с большим радиусом можно пренебречь кривизной стенки и записать пробную функцию в виде $\cos 2\theta_0 = = \text{th}[(r - R)/r_0]$. С помощью этой функции можно оценить интегралы в (41) и получить связь радиуса солитона R и величины Ω : она дается простыми формулами $\Omega = r_0/R$ и $\Omega = 2r_0/R$ для 2D и 3D солитонов соответственно. При промежуточных значениях Ω область локализации солитона порядка единицы. Солитонные решения во всем интервале $0 < \Omega < 1$ были построены численно в работах [15,21].

Используем эти данные для анализа солитонов в АФМ. Описанные выше свойства решений позволяют получить асимптотические зависимости интегралов движения в предельных случаях $\Omega \rightarrow 1$ и $\Omega \rightarrow 0$. По-

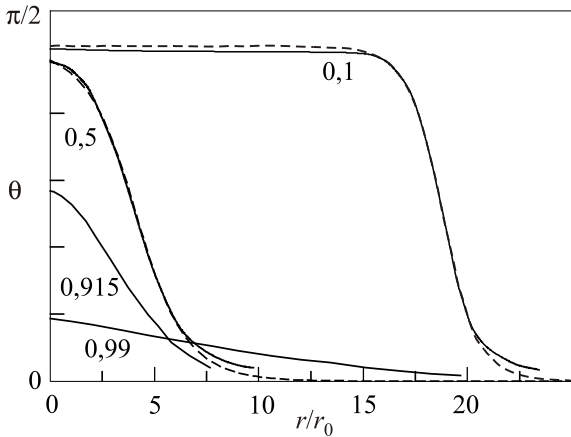


Рис. 2. Вид функции $\theta(r)$, найденный численно для трехмерного солитона при различных значений параметра Ω (указано под соответствующей кривой), координата r дана в единицах r_0 . Штриховые линии показывают приближение точного решения с помощью пробной функции типа 90-градусной доменной стенки. При $\Omega = 0,1$ значение $R = 19 r_0$, что хорошо согласуется с приведенной выше оценкой, для меньшей частоты $\Omega = 0,5$ выбрано подгоночное значение $\bar{r}_0 = 1,5r_0$ и $R = 4r_0$.

ведение интегралов движения для солитонов различной размерности существенно различное. В предельном случае $\Omega \rightarrow 1$ значение $N(\omega) \propto (1 - \Omega)^{1-D/2}$, т.е. для размерности солитона D , равной 1, 2 или 3, $N(\omega)$ стремится к нулю, принимает постоянное значение или расходится соответственно.

Более интересен предельный случай солитонов большого радиуса, которому отвечают малые значения $\Omega \ll 1$. Отметим, что в автогенераторах, основанных на возбуждении ферромагнитных солитонов типа магнитных капель, наблюдались солитоны с радиусом порядка нескольких r_0 [52,53]. Для солитона большого радиуса основной вклад в $N(\omega)$ дает область, ограниченная доменной стенкой, см. (35). В силу этого $N_{2D}(\omega) \propto R^2$ и $N_{3D}(\omega) \propto R^3$, и легко записать

$$N_{2D}(\omega) = \frac{\pi M_s r_0^2}{2\mu_B \gamma H_{ex}} \frac{1}{\Omega^2}, \quad N_{3D}(\omega) = \frac{16\pi M_s r_0^3}{3\mu_B \gamma H_{ex}} \frac{1}{\Omega^3},$$

и число связанных магнонов неограниченно растет при любой размерности солитона.

5. Двумерные топологические солитоны (вихри и скирмионы) в антиферромагнетиках

В предыдущем разделе были рассмотрены только нетопологические АФМ солитоны. В последние годы проявляется интерес к двумерным неоднородным состояниям с нетривиальной топологией, магнитным вихрям и локализованным топологическим солитонам, которые сейчас принято называть скирмионами. Эти состояния интересны тем, что они могут присутствовать в тонких магнитных пленках или магнитных частицах микронных и субмикронных размеров и даже образовывать основное состояние таких наномангнетиков. При этом естественный размер неоднородности (радиус скирмиона или размер ядра вихря, см. ниже) порядка нескольких единиц x_0 , т.е. порядка десятков нм. Экспериментальные исследования вихрей и скирмионов сейчас практически полностью ограничены случаем ферромагнетиков. Обсудим известные свойства вихрей и скирмионов и возможность реализации подобных состояний в АФМ.

Начнем с анализа неподвижных солитонов, а затем обсудим их динамику [90]. Будем рассматривать ту же модель чисто одноосного АФМ во внешнем поле, что в предыдущем разделе. Для неподвижных состояний угловую переменную φ (или $\tilde{\varphi}$ при $H \neq 0$) можно искать в виде

$$\varphi = q\chi + \varphi_0 + \omega t, \tag{42}$$

который отличается от (32) слагаемым $q\chi$, где $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ — целое число, которое и определяет топологические свойства солитонов, φ_0 — произвольная постоянная. Функция $\theta_0(r)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\theta_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_0}{dr} - \frac{q^2}{r^2} \sin\theta_0 \cos\theta_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \sin\theta_0 \cos\theta_0 - \frac{1}{A} \frac{\partial w_a}{\partial \theta_0} = 0. \quad (43)$$

Условие отсутствия сингулярности в центре солитона дает, что при $r \rightarrow 0$ или $\theta = Cr^q$, или $\theta = \pi - Cr^q$. Второе условие отвечает тому, что вдали от солитона АФМ находится в основном состоянии, т.е. при $r \rightarrow \infty$ переменная $\theta \rightarrow \pi/2$ для вихрей в легкоплоскостном АФМ или $\theta \rightarrow 0, \pi$ для скирмионов.

До этого момента рассмотрение касалось в равной степени и вихрей, и скирмионов. Однако анализ конкретных состояний показывает принципиальное различие в свойствах этих двух типов солитонов. Удобно начать с формального описания неоднородных состояний в АФМ на основе метода гомотопической топологии, см., например, [30–32].

Вихрь в легкоплоскостном (ЛП) АФМ характеризуется наличием неоднородности \mathbf{l} вдали от его центра. Такая возможность обусловлена непрерывным вырождением энергии относительно направления изменения \mathbf{l} в легкой плоскости, т.е. пространство вырождения M_D для ЛП АФМ представляет собой окружность, $l_x^2 + l_y^2 = 1$, $l_z = 0$. Топологические свойства вихрей определяются фундаментальной гомотопической группой $\pi_1(M_D)$, элементы которой являются топологическими зарядами. Легко видеть, что для ЛП АФМ все разные значения q отвечают топологически различным состояниям вихря, и величина q играет роль π_1 -топологического заряда, принадлежащего группе целых чисел по отношению к сложению Z . Приведем выражение для π_1 -топологического заряда в интегральной форме

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left(\mathbf{e}_z \cdot \left[\mathbf{l} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_\alpha} \right] \right) dx_\alpha = \frac{1}{2\pi} \oint d\varphi, \quad (44)$$

где интегрирование производится вдоль контура γ .

Классификация солитонов только по элементам группы $\pi_1(M_D)$ может быть неполной: два распределения \mathbf{l} с одинаковыми значениями π_1 -топологического заряда q могут различаться значениями другого топологического инварианта, так называемого π_2 -топологического заряда, который отвечает отображениям не контуров, а двумерных многообразий. В случае 2D солитонов речь идет об отображении плоскости (x, y) на сферу $\mathbf{l}^2 = 1$. Такое отображение характеризуется топологическим инвариантом Q ,

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{\alpha\beta} \left(\mathbf{l} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_\alpha} \times \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x_\beta} \right] \right) dx dy = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon_{\alpha\beta} \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} dx dy, \quad (45)$$

величина Q определяет π_2 -топологический заряд скирмиона, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — абсолютный антисимметричный тензор. Если вдали от солитона, т.е. при $r \rightarrow \infty$, вектор $\mathbf{l} \parallel \mathbf{e}_z$ и магнетик находится в основном состоянии $\theta = 0$, этот инвариант принимает только целочисленные значения, $Q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Для распределения вида (42) при $\theta(r)$ величина Q записывается как

$$Q = \frac{q}{2} \int \sin\theta d\theta = \frac{q}{2} [\cos\theta(r=0) - \cos\theta(r=\infty)].$$

Заметим, что для вихря $\cos\theta(r=\infty) = 0$, а в центре ядра вихря $\cos\theta(r=0) = \pm 1 = p$ — величина, где $p = \pm 1$ определяет знак $l_z = \pm 1$ в ядре вихря и называется поляризацией вихря. Значение Q для вихря оказывается полуцелым, $Q = -qp/2$. Состояния вихря с $Q = \pm 1/2$ различаются топологически и не могут быть переведены друг в друга непрерывной деформацией. Следовательно, вихрь характеризуется двумя топологическими зарядами, π_1 -зарядом, завихренностью q и π_2 -зарядом Q . Это проявляется при анализе слияние двух вихрей с завихренностями с q и $-q$: для различных поляризаций вихрей получается локализованный (тривиальный с точки зрения π_1) солитон с целым значением π_2 -топологического заряда $Q = \pm q$, а при одинаковых знаках p — топологически тривиальное состояние.

Чтобы иметь полное описание топологии солитонов в АФМ, отметим, что при наличии атомных дислокаций кристаллической решетки, которые разрушают топологию атомных плоскостей, возникает еще один тип топологических дефектов, не имеющих аналога для ферромагнетиков. Как показали Дзялошинский [38] и Ковалев, Косевич [39], в этом случае возникают макроскопические магнитные дефекты — спиновые дисклинации, которые можно представить как магнитные вихри с полуцелым значением q в формуле (42). Топологические свойства спиновых дисклинаций обсуждались в обзорной работе [92] и здесь не рассматриваются.

Вернемся к обсуждению динамических свойств солитонов в АФМ. Наиболее выгодным энергетически вихрям и солитонам соответствует $q = \pm 1$, и далее в основном рассматриваем этот случай. Начнем с более простого случая АФМ с анизотропией типа легкая ось, для которого могут существовать магнитные скирмионы. В этом случае вдали от солитона вектор \mathbf{l} должен быть параллелен легкой оси АФМ, $\mathbf{l} = \pm \mathbf{e}_z$. Считая для определенности, что вдали от солитона $\theta = 0$, получаем, что для топологического солитона должно быть $\theta(0) = \pi$. В этом случае $Q = q = \pm 1$.

Обсудим вид решения уравнения (43) для функции $\theta_0(r)$ для различных видов одноосной анизотропии. Легко показать, что соотношение (41) остается справедливым и для топологического скирмиона. Для простейшего вида анизотропии $w_a \propto \sin^2\theta$, т.е. $\bar{\omega}^2 = \omega_1^2$, это соотношение дает, что скирмион существует только в точке $\omega^2 = \omega_1^2$. При этом уравнение (43) совпа-

дает с тем, что получается для изотропного магнетика. В этом случае скирмионное решение было найдено Белаиным и Поляковым (БП), при любом $q \neq 0$ оно имеет вид [13]

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_{BP}}{2} = \left(\frac{R}{r} \right)^{|q|},$$

здесь R — радиус солитона. Энергия такого солитона не зависит от R , $E_{BP} = 4\pi |q| A$. Такие скирмионы важны для описания термодинамики различных моделей двумерных изотропных магнетиков.

В реальном АФМ при наличии анизотропии скирмионы существуют в том же интервале частот, $\bar{\omega}^2 < \omega^2 < \omega_1^2$ или $0 < \Omega < 1$, что и локализованные нетопологические солитоны [90]. В отличие от нетопологических солитонов, при $\Omega \rightarrow 1$ скирмион не локализуется. Его структура похожа на структуру БП солитона, ее можно описать формулой $\operatorname{tg}(\theta_0/2) = (R/r) \exp[(R-r)/\bar{r}_0]$, где $\bar{r}_0 \propto r_0/(1-\Omega)^{1/2}$, а энергия близка к энергии БП солитона. Это приближение хорошо работает, если радиус скирмиона мал, $R < r_0$. В другом предельном случае, $\Omega \ll 1$, реализуются скирмионы большого радиуса, $R \gg r_0$. Для них, как и для нетопологических солитонов, в широкой области $r_0 \leq r \leq R$ значение $\theta_0 \approx \pi/2$. Эта область ограничена кольцевой 90-градусной доменной стенкой, структура которой такая же, как для нетопологического солитона. Разница между этими двумя солитонами состоит лишь в поведении при $r \leq r_0$: для нетопологического солитона $\theta_0 \approx \pi/2$ до значения $r = 0$, в то время как в центре АФМ скирмиона формируется область конечного радиуса, в которой происходит переход от значения $\theta_0 = \pi/2$ к $\theta_0 = \pi$ при $r = 0$. Это различие несущественно при вычислении интегралов движения; значения $E(\omega)$ и $N(\omega)$ в этих двух типах солитонов большого радиуса практически не отличаются [90].

Перейдем к исследованию спиновой динамики в солитонах, поступательного движения или прецессии спинов. Естественно, лоренц-инвариантность уравнений для переменных θ и $\tilde{\varphi} = \varphi - \gamma H t$ имеет место для любых решений, в том числе топологических. Однако следствия этой инвариантности для скирмионив и вихрей при наличии поля окажутся абсолютно разными.

Для скирмионов, в которых $\theta \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, возможно использование переменной $\tilde{\varphi} = \varphi - \gamma H t$. Если найдено неподвижное решение, то анализ движущегося АФМ скирмиона можно провести с применением преобразования Лоренца для переменных $\tilde{\varphi}$ и θ (34). Результаты получаются точно такие же, как и для АФМ магнетонной капли. В частности, справедливы соотношения для связи энергии и числа магнетонов в солитоне с его скоростью и/или импульсом, см. (35)–(37).

Важно заметить, что гироскопические слагаемые в лагранжиане могут, в принципе, приводить к гироско-

пическим эффектам в динамике топологических солитонов. Эти эффекты проявляются в появлении гироскопической силы в уравнении для координаты солитона, которая выражается через величину $\mathbf{F}_G = -d\mathbf{P}^{(0)}/dt$, см. общее выражение (19). Величину \mathbf{F}_G можно записать в стандартном виде, $\mathbf{F}_G = G[\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z]$, где гироскопическая константа G определяется через фиктивное магнитное поле $B(\theta, \varphi)$, см. (9). Если считать, что $\theta = \theta_0(r)$ и $\varphi = \varphi_0(\chi)$ (это условие не противоречит формуле (42) для одноосного магнетика, но может нарушаться при учете анизотропии в базисной плоскости), то G определяется просто значением потока фиктивного магнитного поля через ту часть поверхности на сфере $\mathbf{I}^2 = 1$, которую проходит вектор \mathbf{I} при обходе солитона,

$$G = \frac{2M_0}{\gamma H_{ex}} \int B(\theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0. \quad (46)$$

Принципиально важно, что для топологического солитона с $Q = 1$ распределение вектора \mathbf{I} покрывает всю сферу $\mathbf{I}^2 = 1$, и константа G пропорциональна полному потоку фиктивного поля \mathbf{B} , $G = 2M_0 \Phi_{tot} / \gamma H_{ex}$. Как отмечалось выше, для всех типов ВДМ в различных АФМ этот поток равен нулю, так что эти гироскопические слагаемые не приводят к появлению гироскопической силы в уравнениях движения координаты солитона.

Для конкретного случая АФМ в магнитном поле $\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z$ значение фиктивного магнитного поля $B(\theta, \varphi) = 2H \cos \theta$, и величина $G = G_H$ (46) принимает вид

$$G_H = \frac{4\pi H M_0}{\gamma H_{ex}} \int \sin \theta_0 \cos \theta_0 d\theta_0 \quad (47)$$

Если, как в случае скирмиона, интегрирование проводится от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, величина $G_H = 0$, в соответствии с общим свойством АФМ $\Phi_{tot} = 0$. Поэтому динамика скирмиона является лоренц-инвариантной. Для малых скоростей координата солитона любого типа, как магнетонной капли, так и скирмиона, подчиняется обычному уравнению Ньютона, где эффективная масса $m_* = E_0/c^2$. Недавно ньютоновское уравнение движения было выведено для скирмиона в АФМ при наличии магнитного поля, диссипации и спиновой накачки [96].

Перейдем к анализу АФМ вихрей (см. рис. 3). Их статические свойства понятны, но при описании динамики как поступательного движения, так и прецессии возникают проблемы. Во-первых, напомним, что основному состоянию легкоплоскостного АФМ ($\theta = \pi/2$) отвечает определенное значение намагниченности $M = 2HM_0/H_{ex}$, и любое отклонение от этого значения M приводит к проигрышу в энергии, пропорциональному размеру образца. При наличии глобальной прецессии вида (42) значение H в этой формуле заменяется на $H - \omega/\gamma$, что приводит к изменению состояния вдали от

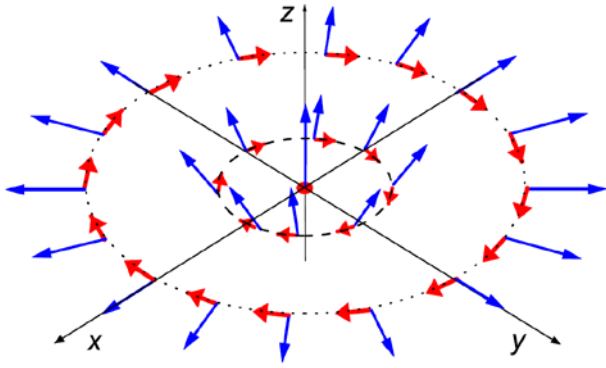


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Магнитная структура вихря в антиферромагнетике со слабым ферромагнетизмом (схематически). Векторы \mathbf{I} (тонкие синие стрелки) и \mathbf{M} (короткие толстые красные стрелки, лежащие в плоскости xy) представлены для двух расстояний от центра вихря; в области ядра (штриховая окружность) и вдали от него (окружность из точек); кружок в центре вихря указывает состояние с \mathbf{I} , перпендикулярным плоскости, и $\mathbf{M} = 0$.

вихря и потере локализации вихря. Поэтому для описания вихря в уравнении (42) надо положить $\omega = 0$. Это же обстоятельство исключает возможность использование переменной $\tilde{\varphi} = \varphi - \gamma H t$ и, соответственно, переход к лоренц-инвариантной динамике спинов при ненулевом поле. Поэтому динамика вихрей в нулевом поле и при $H \neq 0$ принципиально различается.

В нулевом поле динамика АФМ вихря лоренц-инвариантна, и его энергия E , скорость \mathbf{v} и импульс \mathbf{P} связаны соотношениями

$$E = \frac{cE_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}E_0}{c\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad \text{или} \quad E = \sqrt{E_0^2 + c^2 P^2},$$

где $P = |\mathbf{P}|$, $v = |\mathbf{v}|$, и E_0 — энергия неподвижного вихря. Энергия вихря характеризуется стандартной логорифмической зависимостью от размера системы. Энергия минимальна при $q = 1$, $E_0 = \pi A \ln(\eta\sqrt{S}/r_0)$, где S — площадь АФМ и численный множитель $\eta \approx 2,34$ для простейшего типа анизотропии, при произвольном q энергия вихря равна $q^2 E_0$.

Если же присутствует магнитное поле, динамика вихря более сложная. Для ферромагнетика аналитическое решение для движущегося вихря неизвестно. В АФМ может быть построено формальное решение, включающее вихрь, движущийся с любой скоростью $v < c$ [97]:

$$\varphi = \varphi_0 + q\chi' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{v}\gamma H/c^2, \quad \theta = \theta_0(\beta r'), \quad (48)$$

где $\beta^2 = 1 - k^2 r_0^2$, x', y' — лоренц-преобразованные координаты в плоскости АФМ, $(r')^2 = (x')^2 + (y')^2$, $\text{tg } \chi' = y'/x'$ (например, $x' = x/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $y' = y$ при движении вдоль оси x). Этому решению можно придать

интересный физический смысл, если заметить, что плотность импульса $\mathbf{P}^{(0)}$ для АФМ во внешнем поле может иметь конечную плотность \mathbf{p}_0 , которая равна $(4M_0 H/\gamma H_{\text{ex}}) \sin^2 \theta \nabla \varphi$, см. (16). Таким образом, решение (48) описывает вихрь, движущийся на фоне «сверхтекучего течения»; о концепции спиновой сверхтекучести см. работы [98–101]. Однако при рассмотрении вихря, движущегося в АФМ, находящемся в основном состоянии $\theta = \pi/2$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, решение (48) дает энергию, пропорциональную площади АФМ.

Невозможность поступательного движения вихря с постоянной скоростью \mathbf{v} в АФМ при наличии магнитного поля объясняется просто: для АФМ вихрей появляется ненулевое значение гироскопической силы. Действительно, для вихря интеграл в (47) вычисляется только по половине сферы $\mathbf{I}^2 = 1$ (верхней или нижней полушере этой сферы). Поэтому при $H \neq 0$ отлично от нуля значение гироскопической силы, для вихря $G_H = 2\pi H M_0/\gamma H_{\text{ex}}$. Здесь снова проявляется принципиальное различие динамики топологических солитонов в АФМ и ферромагнетиках. Для ферромагнетиков гиросила является «аддитивной» величиной и определяется π_2 -топологическим зарядом Q , $G_{FM} = 2\pi Q M_0/\gamma$. Знак гиросилы совпадает со знаком Q , и для скирмиона модуль гиросилы в два раза больше, чем для вихря. Для АФМ такого универсального соответствия между топологией и гироскопической динамикой нет. В случае АФМ в магнитном поле для вихря (полуцелое значение Q) гиросила присутствует, а для скирмиона (целое значение Q) равна нулю, знак гиросилы не зависит от знака Q .

В завершение этого раздела уместно заметить, что для всех видов ВДМ, которые известны в АФМ, ненулевое «фиктивное поле» $B(\theta, \varphi)$ зависит от φ , $B(\theta, \varphi) \propto \sin(n\varphi)$, где n — целое число, см. детальнее следующий раздел. Поэтому в формуле (46) для гироскопической силы интеграл по φ обращается в нуль. Таким образом, в отличие от магнитного поля, ВДМ не приводит к появлению гиросилы ни для вихрей, ни для скирмионов. Надо заметить, что этот результат получен в приближении сигма-модели, и нельзя исключить появление гиросилы при выходе за ее рамки [102,103]. Однако даже если эта гиросила появится, ее значение должно содержать следующие степени малых параметров H_D/H_{ex} или H_a/H_{ex} , т.е. быть еще меньше, чем ожидаемое значение $G_{DMI} \sim H_D M_0/\gamma H_{\text{ex}}$.

Заметим также, что чисто статические скирмионы нестабильны относительно коллапса для любой модели АФМ вида (3), содержащей только квадраты градиентов и энергию анизотропии. Стабилизация скирмионов возможна при различных обобщениях этой модели, например, при учете старших степеней градиентов, инвариантов Лифшица, линейных по градиентам и/или магнитного дипольного взаимодействия, см. обзор этой проблемы в недавних работах [104,105]. Вихри метастабильны за счет их нетривиальной топологии, но обычно

рассматриваются как энергетически невыгодные состояния. Однако в малых частицах АФМ со слабым ферромагнетизмом типа бората железа или гематита магнитные вихри могут реализовать основное состояние за счет замыкания магнитного потока. При этом, в отличие от вихрей в малых частицах ферромагнетиков, в АФМ для любой формы тела вращения реализуется состояние с нулевым размагничивающим полем \mathbf{H}_m [106], см. рис. 3. Поэтому, несмотря на то, что магнитный момент ферромагнетика значительно больше, чем для АФМ, вихревое состояние в АФМ может быть выгодным для частицы достаточно малого (субмикронного) размера.

6. Эффекты понижения динамической симметрии АФМ и структура солитонов

Рассмотрение в предыдущих разделах в значительной мере базировалось на использовании высокой симметрии проблемы, в частности, сохранении полной z -проекции намагниченности АФМ. Однако для реальных магнетиков, даже имеющих одноосную симметрию (главная ось n -го порядка C_n с $n > 2$) всегда присутствует анизотропия в базисной плоскости. При ее учете точные прецессионные решения отсутствуют (анализ приближенных решений см. в недавней работе [107]). Однако могут существовать движущиеся солитоны типа доменных стенок (ДС). Их свойства (не только динамика поступательного движения, но и устойчивость стенок со скоростью $v = 0$) существенно отличаются от тех, что имеют место для стенок в ферромагнетиках.

Движущиеся ДС описываются решениями типа простых волн, в которых $\mathbf{l} = \mathbf{l}(x - vt)$. Несмотря на то, что точная лоренц-инвариантность уравнений может быть нарушена, удобно перейти к переменной $\xi = (x - vt)(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. При этом уравнения (12), (13) для θ и φ принимают вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\theta'' - A(\varphi')^2 \sin\theta \cos\theta - \frac{\partial w_a}{\partial \theta} + \frac{2vM_0}{\gamma H_{ex}(1 - v^2/c^2)} \varphi' B(\theta, \varphi) \sin\theta = 0, \quad (49)$$

$$A(\varphi' \sin^2 \theta)' - \frac{\partial w_a}{\partial \varphi} - \frac{2vM_0}{\gamma H_{ex}(1 - v^2/c^2)} \theta' B(\theta, \varphi) \sin\theta = 0. \quad (50)$$

где штрихом обозначена производная по ξ . Найти решение этой системы для произвольных $w_a(\theta, \varphi)$ и $B(\theta, \varphi)$ не всегда возможно, так как требует анализа динамической системы в четырехмерном фазовом пространстве. Важные результаты в области анализа по-

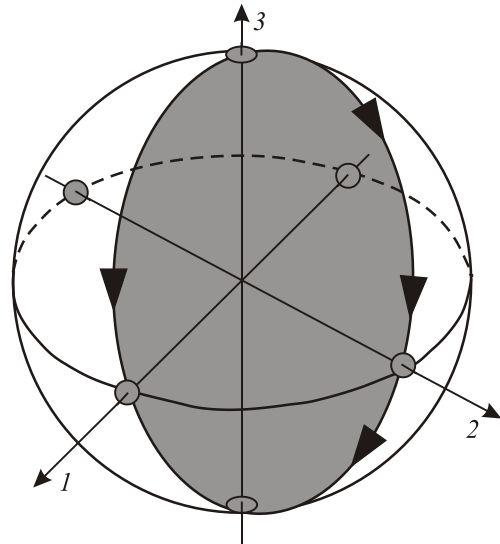


Рис. 4. Траектории на сфере $\Gamma^2 = 1$ (направление движения указано стрелками), отвечающие двум различным ДС с $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$; цифрами обозначены оси магнетика, ось 3 — легкая ось. Интеграл по затененной области определяет разность импульсов этих ДС, см. текст.

добных систем получены Елеонским с соавторами [108–111].

Если решение найдено, можно вычислить интегралы движения, энергию $T + W$ и импульс доменной стенки. Здесь нужно отметить, что для импульса стенки в полной мере проявляется неоднозначность определения $P^{(0)}$, связанная с проблемой выбора калибровки (см. разд. 3). Однако существует важное свойство импульса ДС: разность величин $P^{(0)}$ для двух различных стенок является калибровочно-инвариантной величиной. Поскольку величину $P^{(0)}$ можно записать как $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\mathbf{l})(\partial \mathbf{l} / \partial x) dx$, где

\mathbf{A} — введенный в разд. 3 фиктивный вектор-потенциал, то величина $P^{(0)}$ — интеграл $\int \mathbf{A}(\mathbf{l}) d\mathbf{l}$ по траектории, описывающей ДС (см. рис. 4). Разность импульсов для двух различных ДС, P_1 и P_2 , определяется интегралом по замкнутому контуру $\Delta P = P_2 - P_1 = \oint \mathbf{A}(\mathbf{l}) d\mathbf{l}$. По теореме Стокса этот интеграл равен потоку фиктивного поля \mathbf{B} через область, ограниченную этими двумя траекториями, т.е. ΔP — калибровочно-инвариантная величина. С учетом (9) эта величина определяется интегралом по участку сферы:

$$\Delta P = \int B(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (51)$$

Для ферромагнетика \mathbf{A} — вектор-потенциал поля монополя Дирака, $\text{rot}_{\mathbf{m}} \mathbf{A} = \hbar S \mathbf{m} / a$, что приводит к появлению периодической зависимости энергии кинка от его импульса, для одномерного магнетика (цепочки спинов) этот период равен $2\pi \hbar S / a$. Периодическая зависимость возникает и для многих других солитон-

ных задач, см. обзор А.М. Косевича [112]. Еще один эффект наличия $P^{(0)}$ состоит в том, что выгодная и невыгодная покоящиеся ДС (например, две стенки на рис. 4) имеют различные импульсы. Поэтому неустойчивость невыгодной стенки относительно перехода в выгодную в одномерном ферромагнетике не реализуется в силу закона сохранения импульса. Для любого АФМ полный поток фиктивного поля $B(\theta, \varphi)$ равен нулю, и периодическая зависимость возникнуть не может. Если для обеих стенок с разными энергиями $P^{(0)} = 0$, то невыгодная стенка неустойчива [91]. Однако для ДС в некоторых АФМ $P^{(0)} \neq 0$, что приводит к интересным эффектам.

Выписанные выше уравнения (49), (50) отличаются от стандартных лоренц-инвариантных наличием слагаемых с производными по ξ , пропорциональных функции $B(\theta, \varphi)$. Именно эти слагаемые, зависящие от скорости v , определяют особенности динамики кинков. Если в некоем магнетике $B(\theta, \varphi)$ тождественно равняется нулю, то динамика ДС любого типа была бы «лоренц-инвариантна» и при любой скорости v ее структура может быть получена из формул, описывающих решение при $v = 0$ путем преобразования Лоренца. Решение при $v = 0$ находится без труда, если ему отвечает $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, где φ_0 определяется соотношением $\partial w_a(\theta, \varphi_0)/\partial \varphi_0 = 0$. При этом приходится решать только одно уравнение для $\theta(\xi)$, для которого известен первый интеграл $A(\theta')^2/2 - w_a(\theta, \varphi_0) = \text{const}$.

В случае $D(\theta, \varphi) = 0$ легко решается вопрос и об устойчивости ДС: при любой скорости движения $v < c$ ДС устойчива или неустойчива при $\partial^2 w_a/\partial \varphi_0^2 > 0$ или $\partial^2 w_a/\partial \varphi_0^2 < 0$ соответственно [91]. Если же $D(\theta, \varphi) \neq 0$ для всех магнетиков, допускающих ВДМ, то простого решения $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ при $v \neq 0$ может и не быть. В этом случае как анализ структуры кинка при $v \neq 0$, так и исследование его устойчивости становится нетривиальной задачей.

Однако достаточно полный анализ может быть проведен (или точно, или с учетом малого параметра $H^{(D)}/H_{\text{ex}}$) практически во всех интересных случаях. Ниже мы продемонстрируем это на конкретных примерах, а сейчас рассмотрим простейший (лоренц-инвариантный) случай динамики кинков в АФМ.

Вначале рассмотрим самую простую ситуацию, когда магнитное поле и взаимодействие Дзялошинского–Мория отсутствует. Будем считать, что АФМ имеет ромбическую симметрию, и запишем энергию анизотропии в виде

$$W_a = \frac{1}{2}(K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2), \quad K_1 > K_2 > 0. \quad (52)$$

Такой выбор констант отвечает ориентации вектора \mathbf{l} в основном состоянии вдоль оси 3. Уравнения движения для θ, φ в этом случае легко выписать и решить. Они

имеют два частных класса решений, обоим отвечает $\theta = \theta(\xi)$ и постоянное значение φ , $\varphi_0 = 0$ и $\pi/2$ (точнее, πn и $(\pi/2)(2n+1)$, где n — целое число). Решения для двух классов ДС имеют стандартный вид $\cos \theta_0 = \pm \text{th}[x/x_0(\varphi)]$, где $x_0(\varphi) = \sqrt{A/K(\varphi)}$, $K(\varphi) = K_1 \cos^2 \varphi + K_2 \sin^2 \varphi$, для двух отмеченных классов решений ($\varphi = 0, \pi$ или $\varphi = \pm \pi/2$) $K(\varphi) = K_1$ и $K(\varphi) = K_2$ соответственно. Энергия неподвижной стенки $E_0 = 2\sqrt{AK(\varphi)}$. Связь энергии, импульса и скорости лоренц-инвариантная. Из этих двух типов стенок устойчива только та, которой отвечает меньшая энергия. Для АФМ с легкой осью n -го порядка C_n при $n = 4$ или 6 анизотропия в базисной плоскости имеет вид $(K_n/n) \sin^n \theta \sin^2(n\varphi/2)$, при этом есть два типа ДС, но существует большее число ДС для каждого типа.

Рассмотрим теперь эффекты разрушения лоренц-инвариантности. Гироскопическое слагаемое при $B(\theta, \varphi)$ определяет динамическое понижение симметрии задачи за счет ВДМ. Его вид зависит от четности оси C_n . Антисимметричная форма ВДМ с $\mathbf{H}_D = BH_D(\mathbf{d} \times \mathbf{l})$ характерна для всех одноосных АФМ с четной главной осью $C_n^{(+)}$, в этом случае вектор \mathbf{d} параллелен избранной оси АФМ (оси 3). Этот тип ВДМ дает $B(\theta, \varphi) = 0$. Однако во всех одноосных АФМ с осью $C_n^{(+)}$ в ВДМ обязательно присутствуют другие слагаемые, которые приводят к гироскопическим членам с $B(\theta, \varphi) \neq 0$, см. таблицы в работах [73,74]. Для АФМ с четной главной осью $C_n^{(+)}$, $n = 2, 4$ и 6, эти слагаемые приводят к появлению ненулевого $B(\theta, \varphi) \propto \sin^n \theta \sin n\varphi$. Если же главная ось $C_n^{(-)}$ нечетная с $n = 2, 4, 6$, то такой универсальности нет.

Для фторида марганца MnF_2 , который обладает нечетной осью 4-го порядка, $B(\theta, \varphi) \propto \sin^2 \theta \sin 2\varphi$. Для АФМ с нечетной главной осью $C_n^{(-)}$ при $n = 2$ и 6 форма $B(\theta, \varphi)$ другая, $B(\theta, \varphi) \propto \sin^{n/2} \theta \cos \theta \sin(n\varphi/2)$. Важно отметить различия в поведении функции $B(\theta, \varphi)$ как функции ξ . Для всех АФМ с четной главной осью $C_n^{(+)}$, а также для MnF_2 с осью $C_4^{(-)}$, функция $B(\theta, \varphi_0)$ является четной функцией ξ . Для АФМ с нечетными осями $C_2^{(-)}$ или $C_6^{(-)}$ функция $B(\theta, \varphi_0)$ является нечетной функцией ξ . Это различие определяет характер понижения симметрии движущихся ДС.

Хороший пример АФМ с ВДМ — двухосные АФМ, ортоферриты, в которых статические ДС и их движение наблюдалось экспериментально, как традиционными методами [36,37], так и с применением фемтосекундных лазерных импульсов [113,114]. Для ортоферритов кристаллографические оси \mathbf{a} и \mathbf{c} являются нечетными, а ось \mathbf{b} — четной (см., например, [60]). При комнатной температуре для всех ортоферритов реализуется состояние с $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$, параллельным оси \mathbf{a} , и магнитным моментом $|\mathbf{M}_0| = H_D/H_{\text{ex}}$, параллельным оси \mathbf{c} . Для этой фазы $B(\theta, \varphi) \propto \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$. При комнатной температуре в более выгодной ДС и вектор \mathbf{l} , и момент $\mathbf{M}(\xi)$ разворачиваются в плоскости ac .

Для ортоферрита диспрозия при $T < 155$ К анизотропия в плоскости изменяет знак и более выгодной становится ДС, в которой вектор \mathbf{l} разворачиваются в плоскости ab [115]. Для такой ДС момент $\mathbf{M}(\xi)$ обращается в нуль в центре стенки (при $\xi = 0$).

Для ортоферрита диспрозия ниже точки Морина ($T < T_M \sim 40$ К) реализуется другая фаза, в которой \mathbf{l}_0 параллельно четной оси \mathbf{b} , при этом в основном состоянии $\mathbf{M}_0 = 0$ и при анализе динамики ДС надо выбрать $V(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \sin 2\varphi$. Для обеих ДС в этой фазе в центре стенки возникает магнитный момент, ортогональный вектору $\mathbf{l}(0)$.

Для описания поведения движущихся ДС важна симметричная классификация стенок в АФМ, предложенная в работе [116]. Согласно этому подходу, при движении ДС ее симметрия может или понижаться, или оставаться такой же, как была при $v = 0$. В последнем случае будем говорить о кинематической ДС (КДС). Понижение симметрии возможно даже при том, что вектор \mathbf{l} разворачивается в той же плоскости, что и при $v = 0$. При этом за счет появления динамической намагниченности возникают ДС с потерей центра симметрии (ДСПЦ). Наконец, движение может приводить к выходу вектора \mathbf{l} из плоскости, характерной для $v = 0$. Этот выход может описываться или симметричной, или антисимметричной функцией координаты ξ , и в этих случаях стенки естественно называть ДС с симметричным или антисимметричным выходом, ДССВ или ДСАВ соответственно.

Оказалось, что существуют только три типа поведения ДС в данной фазе АФМ (например, ДС со значениями $\varphi = 0, \pi$ или $\varphi = \pm\pi/2$ в двухосном АФМ) [74]. Наиболее наглядным является представление результатов анализа через зависимости энергий стенок от их импульсов. Анализ показал, что в АФМ с четной главной осью ДС обоих типов являются кинематическими [74]. Если же главная ось нечетная, то возможны два варианта поведения. Для АФМ типа MnF_2 с осью $C_4^{(-)}$ при $v = 0$ допустимы значения $\varphi_0 = (\pi/4)k$, и ДС с четным и нечетным k имеют различные энергии. В этом случае при $v \neq 0$ стенки с четным $k = 2n$ являются КДС, а с нечетным k — ДССВ, в которых с хорошей точностью можно считать, что $\varphi = \varphi(v) = \text{const}$. Для ДССВ $P^{(0)} \neq 0$, что приводит к эффекту связи поступательного движения стенки и прецессии в ней [107]. Знак величины $\varphi(v) - \varphi_0$ зависит от знака скорости, и $\varphi(v)$ стремится к одному из значений $\varphi_0 = \pi n/2$ при $v \rightarrow \pm v_c$, где v_c — предельная скорость движения стенки, которая мала по сравнению с c [74]. При $v = \pm v_c$ значения импульса $P = \pm P_c$. Как энергии ДССВ и КДС, так и их производные $v = dE(P)/dP$ совпадают при $P = \pm P_c$, т.е. картина зависимости $E(P)$ или $\varphi(v)$ такая же, как для свободной энергии или параметра порядка для фазового перехода второго рода (см. рис. 5). Этот факт не удивителен, поскольку симметрия ДССВ с $\varphi(v) \neq \pi k/2$ ниже, чем КДС, и можно

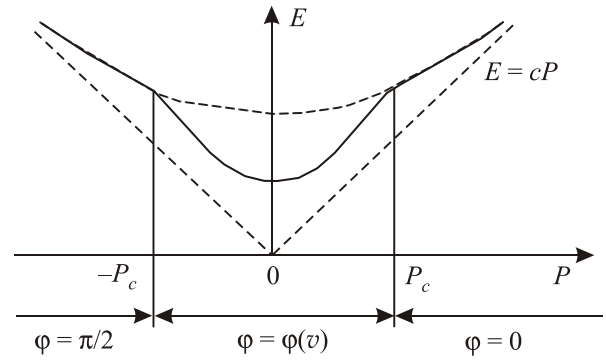


Рис. 5. Зависимость энергии ДС от ее импульса для АФМ с главной осью $C_4^{(-)}$ [74].

считать, что эти два состояния ДС связаны подгрупповой связью.

Для АФМ с нечетными осями $C_2^{(-)}$ или $C_6^{(-)}$ всегда реализуются или ДСПЦ, или ДСАВ. С увеличением скорости ДСПЦ всегда дестабилизируется, а ДСАВ не теряет устойчивости. Поэтому если при $v = 0$ устойчива ДСПЦ (это случай реализуется для DyFeO при $T < 155$ К), при увеличении скорости она переходит в ДСАВ. Симметрии этих стенок не связаны подгрупповой связью, и картина перехода напоминает картину фазового перехода первого рода с сосуществованием стенок двух типов около $P = \pm P_c$ [74].

7. Заключение

В рамках этого небольшого обзора трудно описать огромное количество результатов, которые были получены за последние годы и десятилетия. Мы ограничились только случаем антиферромагнетиков, хотя и для других магнетиков сейчас найдены интересные солитонные состояния. Но мы надеемся, что даже такое краткое обсуждение позволит заинтересованному читателю увидеть красоту концепции магнитных солитонов и ее практическую полезность.

Нам хотелось бы посвятить эту работу светлой памяти Арнольда Марковича Косевича.

1. А.М. Косевич, В.А. Иванов, and А.С. Ковалев, *Physica D* **3**, 363 (1981).
2. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев. *Нелинейные волны намагниченности*, Динамические и топологические солитоны, Киев, Наукова думка (1983).
3. А.М. Косевич, В.А. Иванов, and А.С. Ковалев, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
4. Н.Ј. Mikeska and M Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
5. С.Е. Zaspel and J.E. Drumheller, *Int. J. Mod. Phys. B* **10**, 3649 (1996).

6. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках, в двух томах*, УроРАН, Екатеринбург (2009).
7. Н.И. Бете, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931).
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *К теории магнитной проницаемости ферромагнитных тел*, см. Л.Д. Ландау, Собрание трудов (в двух томах), Наука, Москва (1972), т. I, с. 128.
9. А. Малоземов, Дж. Слонзуски, *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*, Мир, Москва (1982) [A.P. Malozemoff and J.C. Slonczewski, *Magnetic domain walls in bubble materials*, Academic Press, New York (1981)].
10. В.Г. Барьяхтар, В.В. Ганн, Ю.И. Горобец, Г.А. Смоленский, Б.Н. Филиппов, *УФН* **121**, 593 (1977).
11. И.А. Ахизер, А.Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 508 (1967).
12. И.А. Ахизер, А.Е. Боровик, *ЖЭТФ* **52**, 1332 (1967).
13. А.А. Белавин, А.М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
14. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *ФНТ* **2**, 786 (1976) [*Low Temp. Phys.* **2**, 387 (1976)].
15. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *Письма в ЖЭТФ* **24**, 495 (1976).
16. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, *ЖЭТФ* **72**, 2000 (1977).
17. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 516 (1977).
18. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *ФНТ* **3**, 906 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 440 (1977)].
19. Н.И. Mikeska, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **11**, L29 (1978).
20. Н.И. Mikeska, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **13**, 2913 (1980).
21. А.С. Ковалев, А.М. Косевич, К.В. Маслов, *Письма в ЖЭТФ* **30**, 321 (1979).
22. В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **74**, 1814 (1978).
23. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, И.В. Манжос, *ФНТ* **5**, 170 (1979) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **5**, 81 (1979)].
24. И.Е. Дзялошинский, Б.А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 592 (1979).
25. Б.А. Иванов, А.М. Косевич, И.М. Бабич, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 777 (1979).
26. В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **71**, 2349 (1976).
27. В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **77**, 409 (1979).
28. В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 601 (1979).
29. И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *ФНТ* **5**, 759 (1979) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **5**, 361 (1979)].
30. Г.Е. Воловик, В.П. Минеев, *ЖЭТФ* **72**, 2256 (1977).
31. Г.Е. Воловик, В.П. Минеев, *ЖЭТФ* **73**, 767 (1977).
32. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
33. М.В. Четкин, А. Де ла Кампа, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 168 (1978).
34. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, А.Л. Сукстанский, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 226 (1978).
35. А.К. Звездин, *Письма в ЖЭТФ* **29**, 605 (1979).
36. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, М.В. Четкин, *УФН* **146**, 417 (1985). [*Sov. Phys. Usp.* **28**, 563 (1985)].
37. V.G. Bar'yakhtar, M.V. Chetkin, B.A. Ivanov, and S.N. Gadetskii, *Dynamics of Topological Magnetic Solitons. Experiment and Theory*, Tracts in Modern Physics, Springer Verlag (1994), v. 129.
38. И.Е. Дзялошинский, *Письма в ЖЭТФ* **25**, 110 (1977).
39. А.С. Ковалев, А.М. Косевич, *ФНТ* **3**, 259 (1977) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **3**, 125 (1977)].
40. А.М. Kosevich, A.S. Kovalev, *Solid. State Commun.* **12**, 763 (1973).
41. А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *ЖЭТФ* **67**, 1793 (1974).
42. А.М. Косевич, *Дислокации в теории упругости*, Наукова Думка, Киев (1978).
43. R. Skomski, *J. Phys.: Condens. Matter* **15**, R841 (2003).
44. W. Wernsdorfer, *Adv. Chem. Phys.* **118**, 99 (2001).
45. *Advanced Magnetic Nanostructures*, D.J. Sellmyer and R. Skomski (eds.), Springer, Berlin (2006).
46. S.D. Bader and S.S.P. Parkin, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **1**, 71 (2010).
47. D.C. Ralph and M.D. Stiles, *J. Magn. Magn. Mater.* **320**, 1190 (2008).
48. A.V. Chumak, V.I. Vasyuchka, A.A. Serga, and B. Hillebrands, *Nat. Phys.* **11**, 453 (2015).
49. V.S. Pribiag, I.N. Krivorotov, G.D. Fuchs, P.M. Braganca, O. Ozatay, J.C. Sankey, D.C. Ralph, and R.A. Buhrman, *Nat. Phys.* **3**, 498 (2007).
50. B.A. Ivanov and C.E. Zaspel, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 247208 (2007).
51. A.V. Khvalkovskiy, J. Grollier, A. Dussaux, K.A. Zvezdin, and V. Cros, *Phys. Rev. B* **80**, 140401(R) (2009).
52. M.A. Hoefer, M. Sommacal, and T.J. Silva, *Phys. Rev. B* **85**, 214433 (2012).
53. S.M. Mohseni, S.R. Sani, J. Persson, T.N.A. Nguyen, S. Chung, Y. Pogoryelov, P.K. Muduli, E. Iacocca, A. Eklund, R.K. Dumas, S. Bonetti, A. Deac, M.A. Hoefer, and J. Akerman, *Science* **339**, 1295 (2013).
54. E. Iacocca, R.K. Dumas, L. Bookman, M. Mohseni, S. Chung, M.A. Hoefer, and J. Åkerman, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 047201 (2014).
55. Y. Zhou, E. Iacocca, A.A. Awad, R.K. Dumas, F.C. Zhang, H.B. Braun, and J. Akerman, *Nat. Commun.* **6**, 8193 (2015); *Phys. Rev. Lett.* **112**, 047201 (2014).
56. A. Kirilyuk, A.V. Kimel, and Th. Rasing, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2731 (2010).
57. Б.А. Иванов, *ФНТ* **40**, 119 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 91 (2014)].
58. T. Satoh, R. Iida, T. Higuchi, Y. Fujii, A. Koreeda, H. Ueda, T. Shimura, K. Kuroda, V.I. Butrim, and B.A. Ivanov, *Nat. Commun.* **8**, 638 (2017).
59. D. Bossini, S. Dal Conte, Y. Hashimoto, A. Secchi, R.V. Pisarev, Th. Rasing, G. Cerullo, and A.V. Kimel, *Nat. Commun.* **7**, 10645 (2016).
60. Е.А. Туров, А.В. Колчанов, В.В. Меньшенин, И.Ф. Мирсаев, В.В. Николаев, *Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков*, Физматлит, Москва

- (2001) [E.A. Turov, A.V. Kolchanov, M.I. Kurkin, I.F. Mirsaev, and V.V. Nikolaev, *Symmetry and Physical Properties of Antiferromagnets*, Cambridge International Science Publishing, Ltd (2010)].
61. A.V. Kimel, B.A. Ivanov, R.V. Pisarev, P.A. Usachev, A. Kirilyuk, and Th. Rasing, *Nature Phys.* **5**, 727 (2009).
 62. C. Sirtori, *Nature* **417**, 132 (2002).
 63. R. Kleiner, *Science* **318**, 1254 (2007).
 64. Y.V. Gulyaev, P.E. Zilberman, G.M. Mikhailov, and S.G. Chigarev, *JETP Lett.* **98**, 742 (2014).
 65. H.V. Gomonay, and V.M. Loktev, *Phys. Rev. B* **81**, 144427 (2010).
 66. Е.В. Гомонай, В.М. Локтев, *ФHT* **40**, 22 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 17 (2014)].
 67. R. Cheng, D. Xiao, and A. Brataas, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 207603 (2016).
 68. R. Khymyn, I. Lisenkov, V. Tyberkevych, B.A. Ivanov, and A. Slavin, *Sci. Rep.* **7**, 43705 (2017).
 69. O.R. Sulymenko, O.V. Prokopenko, V.S. Tiberkevich, A.N. Slavin, B.A. Ivanov, and R. Khymyn, *Phys. Rev. Appl.* **8**, 064007 (2017).
 70. I.E. Dzyaloshinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32**, 1547 (1957) [*Sov. Phys. JETP* **5**, 1259 (1957)].
 71. T. Moriya, *Phys. Rev.* **120**, 91 (1960).
 72. Б.А. Иванов, Б.А. Колежук, *ФHT* **21**, 355 (1995) [*Low Temp. Phys.* **21**, 275 (1995)].
 73. Б.А. Иванов, В.Е. Киреев, *ЖЭТФ* **121**, 320 (2002).
 74. Е.В. Гомонай, Б.А. Иванов, В.А. Львов, Г.К. Оксюк, *ЖЭТФ* **97**, 307 (1990) [*Sov. Phys. JETP* **70**, 174 (1990)].
 75. J.C. Slonczewski, *J. Appl. Phys.* **44**, 1759 (1973).
 76. A.A. Thiele, *J. Appl. Phys.* **47**, 2759 (1976).
 77. F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1488 (1986).
 78. B.A. Ivanov and V.A. Stephanovich, *Phys. Lett. A* **141**, 89 (1989).
 79. G.E. Volovik, *J. Phys. C* **20**, L83 (1987).
 80. N. Papanicolaou and T.N. Tomaras, *Nucl. Phys. B* **360**, 425 (1991).
 81. E.G. Galkina and B.A. Ivanov, *JETP Lett.* **71**, 259 (2000).
 82. D.D. Sheka, *J. Phys. A* **39**, 15477 (2006).
 83. E.G. Galkina, B.A. Ivanov, S. Savel'ev, and F. Nori, *Phys. Rev. B* **77**, 134425 (2008).
 84. C. Schütte and M. Garst, *Phys. Rev. B* **90**, 094423 (2014).
 85. Oleg Tchernyshyov, *Ann. Phys. (N. Y.)* **363**, 98 (2015).
 86. И.Е. Дзялошинский, Б.Г. Кухаренко, *ЖЭТФ* **70**, 2360 (1976).
 87. А.Ф. Андреев, *ЖЭТФ* **74**, 786 (1978).
 88. А.Ф. Андреев, В.И. Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
 89. И.В. Барьяхтар, Б.А. Иванов, *ЖЭТФ* **85**, 328 (1983).
 90. B.A. Ivanov and V.A. Stefanovich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **91**, 638 (1986) [*Sov. Phys. JETP* **64**, 376 (1986)].
 91. В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, А.Л. Сукстанский, *ЖЭТФ* **78**, 1509 (1980).
 92. Б.А. Иванов, *ФHT* **31**, 841 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 635 (2005)].
 93. B.A. Ivanov and A.K. Kolezhuk, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1859 (1995).
 94. М.М. Богдан, О.В. Чаркина, *ФHT* **40**, 105 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 84 (2014)].
 95. Se Kwon Kim, Y. Tserkovnyak, and O. Tchernyshyov, *Phys. Rev. B* **90**, 104406 (2014).
 96. H. Velkov, O. Gomonay, M. Beens, G. Schwiete, A. Brataas, J. Sinova, and R.A. Duine, *New J. Phys.* **18**, 075016 (2016).
 97. B.A. Ivanov and D.D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 404 (1994).
 98. B.I. Halperin and P.C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **188**, 898 (1969).
 99. Э.Б. Сонин, *ЖЭТФ* **74**, 2097 (1978) [*Sov. Phys. JETP* **47**, 1091 (1978)].
 100. Y. Tserkovnyak, A. Brataas, G.E.W. Bauer, and B.I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1375 (2005).
 101. Е.В. Сонин, *Adv. Phys.* **59**, 181 (2010).
 102. А.К. Звездин, В.И. Белотелов, К.А. Звездин, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 443 (2008).
 103. А.К. Звездин, К.А. Звездин, *ФHT* **36**, 1034 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 826 (2010)].
 104. M. Schott, A. Bernand-Mantel, L. Ranno, S. Pizzini, J. Vogel, H. Béa, C. Baraduc, S. Auffret, G. Gaudin, and D. Givord, *Nano Lett.* **17**, 3006 (2017).
 105. A.V. Bezvershenko, A.K. Kolezhuk, and B.A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **97**, 054408 (2018).
 106. E.G. Galkina, A.Yu. Galkin, B.A. Ivanov, and Franco Nori, *Phys. Rev. B* **81**, 184413 (2010).
 107. Е.Г. Галкина, Р.В. Овчаров, Б.А. Иванов, *ФHT* **43**, 1609 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 1283 (2017)].
 108. В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **79**, 321 (1980).
 109. В.М. Елеонский, Н.Н. Кирова, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **80**, 357 (1981).
 110. В.М. Елеонский, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **84**, 616 (1983).
 111. В.М. Елеонский, Н.Е. Кулагин, *ЖЭТФ* **85**, 1437 (1983).
 112. А.М. Косевич, *ФHT* **27**, 699 (2001) [*Low Temp. Phys.* **27**, 513 (2001)].
 113. D. Afanasiev, B.A. Ivanov, A. Kirilyuk, Th. Rasing, R.V. Pisarev, and A.V. Kimel, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 097401 (2016).
 114. D. Afanasiev, B.A. Ivanov, R.V. Pisarev, A. Kirilyuk, Th. Rasing, and A.V. Kimel, *J. Phys.: Condens. Matter* **29**, 224003 (2017).
 115. А.В. Залесский, А.М. Саввинов, И.С. Желудев, А.Н. Иващенко, *ЖЭТФ* **68**, 1449 (1975) [*Sov. Phys. JETP* **41**, 723 (1975)].
 116. V.G. Bar'yakhtar, V.A. L'vov, and D.A. Yablonskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87**, 1863 (1984) [*Sov. Phys. JETP* **60**, 1072 (1984)].

Dynamic solitons in antiferromagnets

(Review Article)

E.G. Galkina and B.A. Ivanov

The review of theoretical studies of magnetic solitons in antiferromagnets (AFM) is presented. The basic concepts of the physics AFM and of the soliton theory are given. An analysis of the nonlinear dynamics of an AFM is carried out on the unified ground with the use of a nonlinear sigma model for the antiferromagnetic vector. The derivation of this equation and its integrals of motion are discussed with accounting for the real structure of the AFM. The main attention is paid to the study of two-parametrical solitons, which are characterized by both the translational motion of the soliton center and the internal dynamics of spins inside the soliton. Solitons of various types, one-dimensional and two-dimensional, topological and not possessing a topo-

logical charge, are considered. An analysis of the effects of the lowering of the dynamic symmetry of the AFM, which are due to the destruction of the Lorentz-invariant character of the sigma model, is made. Such effects arise when the Dzyaloshinsky–Moriya interaction and/or the strong external magnetic field are accounted for consistently. The last problem was never discussed in monographic literature. The classes of universality for the behavior of moving solitons are established.

PACS: 75.50.Ee Antiferromagnetics;
75.76.+j Spin transport effects;
75.78.-n Magnetization dynamics.

Keywords: antiferromagnets, antiferromagnetic vector, nonlinear sigma model, Dzyaloshinsky–Moriya interaction, domain wall, AFM vortex, droplet soliton, skyrmion, terahertz magnons, spintronics, spin-torque oscillator.