Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2019, т. 45, № 10, с. 1242–1248

Модификация степенных показателей в теории сверхтекучести Гинзбурга–Собянина

Ю.М. Полуэктов

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»
ул. Академическая, 1, г. Харьков, 61108, Украина,
E-mail: yuripoluektov@kipt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 5 марта 2019 г., опубликована онлайн 27 августа 2019 г.

Предложена модификация температурных зависимостей в термодинамическом потенциале теории сверхтекучести Гинзбурга–Собянина, позволяющая получить значения критических индексов, согласующиеся с общими соотношениями флуктуационной теории фазовых переходов, современными экспериментальными и расчетными данными.

Ключевые слова: сверхтекучесть, теплоемкость, параметр порядка, критические индексы, температура фазового перехода, флуктуации.

1. Введение

Теория сверхтекучести гелия вблизи критической температуры, где квазичастичное описание становится неприменимым, по аналогии с теорией сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау [1], была предложена Гинзбургом и Питаевским [2]. Переход в сверхтекучее, как и в сверхпроводящее, состояние характеризуется появлением комплексного параметра порядка η. Однако в отличие от большинства сверхпроводников, где теория [1], основанная на приближении среднего поля, имеет область применимости вблизи температуры фазового перехода, такая же теория для перехода жидкого гелия в сверхтекучее состояние дает только качественное описание этого явления. Наблюдаемые температурные зависимости отличаются от предсказываемых теорией среднего поля. Гинзбургом и Собяниным [3,4] была предложена модификация теории [2], в которой зависимость коэффициентов от температуры в разложении термодинамического потенциала по степеням модуля параметра порядка подбиралась так, чтобы получить зависимости, близкие к наблюдаемым. Из теории [3,4] следовало, что критический индекс поведения теплоемкости α равен нулю. Однако уже в работе [3] самими авторами отмечалось, что существуют экспериментальные указания на то, что этот критический индекс отличен от нуля. В этом случае теория нуждалась бы в уточнении, но на тот момент, по мнению авторов [3], это было преждевременно. В настоящее время критические индексы для сверхтекучего гелия измерены и рассчитаны с хорошей точностью. Можно считать установленным, что критический индекс теплоемкости действительно отличен от нуля. Так что необходимость в некоторой корректировке теории стала очевидной.

В настоящей работе два показателя степени у безразмерной температуры в разложении термодинамического потенциала вблизи λ-точки предлагается рассматривать как феноменологические параметры, которые следует находить из сопоставления с экспериментальными данными. Расчет показывает, что поведение вблизи температуры перехода параметра порядка, теплоемкости, обобщенной восприимчивости и корреляционной длины определяется этими двумя показателями. Оказалось, что известные общие соотношения между критическими индексами выполняются при произвольных значениях этих показателей. Привлечение соображений масштабной инвариантности позволяет установить связь между показателями степени у безразмерной температуры в разложении термодинамического потенциала, так что с учетом этого поведение всех наблюдаемых величин определяется единственным параметром, который может быть найден по измеренному значению какого-нибудь критического индекса. В настоящей работе этот параметр найден двумя способами: по измерению сверхтекучей плотности и по измерению теплоемкости. Различие в полученных значениях оказалось около 0,2%.

2. Термодинамический потенциал

Разложение неравновесного термодинамического потенциала теории Гинзбурга–Собянина (ГС) по степеням модуля комплексного параметра порядка η с произвольными показателями степени относительной температуры τ может быть записано в виде

$$\Phi_0 = \Phi_I(p,T) - a\tau|\tau|^A|\eta|^2 + \frac{b}{2}|\tau|^B|\eta|^4 + \frac{c}{3}|\eta|^6, \quad (1)$$

где $\tau = (T_\lambda - T)/T_\lambda$, T_λ — температура сверхтекучего перехода, $\Phi_I(p,T)$ — термодинамический потенциал единицы объема нормальной фазы вблизи λ-точки. Коэффициенты a, b, c зависят от давления p, но не зависят от температуры. В обычной формулировке теории ГС [3,4] показатели степени в (1), которые для краткости будем называть температурными показателями, равны $A_{GS} = 1/3$, $B_{GS} = 2/3$. Отметим также, что теории среднего поля отвечают в (1) значения $A = B = 0$. Как показано в [3], отличие этих параметров от нуля означает, что эффективно учитывается вклад флуктуаций вблизи температуры фазового перехода. Будем предполагать эти два показателя произвольными неотрицательными параметрами теории, для того чтобы в дальнейшем найти их из сопоставления с имеющимися экспериментальными и расчетными данными. При выполнении условия $A+1-2B \geq 0$ учет в (1) последнего слагаемого, пропорционального $|\eta|^6$, не влияет на полученные результаты. Знак равенства здесь достигается для показателей в обычной теории ГС, а более общий случай обсудим ниже. Поэтому в дальнейшем будем полагать в (1) $c = 0$ и $a > 0$, $b > 0$. Последние условия обеспечивают устойчивость несимметричной фазы. В пространственно-неоднородных условиях должен быть также учтен вклад от градиента параметра порядка

$$\Phi_g = \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\eta|^2, \quad (2)$$

где m — масса атома гелия. Влияние некоторого внешнего поля h на систему с комплексным параметром порядка обычно [3] описывают введением энергии

$$\Phi_h = -\frac{1}{2}\left(h\eta^* + h^*\eta\right). \quad (3)$$

Полный потенциал является суммой всех вкладов $\Phi = \Phi_0 + \Phi_g + \Phi_h$. Он позволяет рассчитать температурные зависимости всех наблюдаемых величин вблизи λ-точки и выразить критические индексы через параметры A, B.

3. Параметр порядка, энтропия, теплоемкость

Из условия экстремума термодинамического потенциала $\partial\Phi_0/\partial|\eta|^2 = 0$ следует, что при $\tau > 0$

$$|\eta|^2 = \frac{a}{b}\tau^{A-B+1} \sim \tau^{2\beta}. \quad (4)$$

Откуда находим для критического индекса параметра порядка $2\beta = A - B + 1$. Равновесный термодинамический потенциал (1) в сверхтекучей фазе при $\tau > 0$ принимает вид

$$\Phi_0 = \Phi_I(p,T) - \frac{a^2}{2b}\tau^{2A-B+2}. \quad (5)$$

Энтропия вблизи температуры перехода:

$$S_s = S_I - \frac{a^2}{2bT_\lambda}(2A - B + 2)\tau^{2A-B+1}, \quad (6)$$

где $S_I = -(\partial\Phi_I/\partial T)_p$ — энтропия в нормальной фазе вблизи температуры перехода. Поведение теплоемкости описывается формулой

$$C_{sp} - C_{Ip} = \frac{a^2}{2bT_\lambda}(2A - B + 2)(2A - B + 1)\tau^{2A-B} \sim \tau^{-\alpha}. \quad (7)$$

Отсюда для критического показателя теплоемкости имеем $\alpha = B - 2A$. Как отмечалось, в обычной формулировке теории ГС $\alpha_{GS} = B_{GS} - 2A_{GS} = 0$.

Отметим, что учет длинноволновых флуктуаций, которые не учтены в перенормированном термодинамическом потенциале (1), приводит к появлению в теплоемкости дополнительного логарифмического вклада, который здесь не рассматривается [3,4].

4. Обобщенная восприимчивость

Во внешнем поле, влияние которого учитывается формулой (3), равновесное значение параметра порядка определяется уравнением

$$-a\tau|\tau|^A\eta + b|\tau|^B|\eta|^2\eta - \frac{h}{2} = 0. \quad (8)$$

Выделим у параметра порядка и у внешнего поля модуль и фазу, представив их в виде $\eta = |\eta|e^{i\varphi}$ и $h = |h|e^{i\theta}$. Тогда из (8) получим $\sin(\varphi - \theta) = 0$. Таким образом, возможны следующие соотношения между фазами: $\varphi = \theta$ и $\varphi = \theta + \pi$. Минимуму энергии (3) отвечает первый случай. С учетом этого уравнение (8), определяющее зависимость модуля параметра порядка от температуры и величины поля, примет вид

$$-a\tau|\tau|^A|\eta| + b|\tau|^B|\eta|^3 - \frac{|h|}{2} = 0. \quad (9)$$

Отсюда находим в нормальной и сверхтекучей фазах обобщенную восприимчивость в слабом поле

$$\chi \equiv \lim_{|h|\to 0}\frac{\partial|\eta|}{\partial|h|} = \begin{cases} \dfrac{1}{a|\tau|^{A+1}}, & \tau < 0, \\ \dfrac{1}{2a\tau^{A+1}}, & \tau > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, критический индекс изменения восприимчивости $\chi \sim |\tau|^{-\gamma}$, согласно (10), равен $\gamma = A + 1$.

В случае сверхтекучей системы, в отличие, например, от магнитных переходов, внешнее поле и восприимчивость — это величины в значительной мере формальные, поскольку неясно, как физически реализовать воздействие какого-то поля, описываемое потенциалом (3), поэтому мы не будем рассматривать случай сильных полей.

5. Корреляционная длина

Расчет корреляционной функции для теории с неравновесным термодинамическим потенциалом $\Phi = \Phi_0 + \Phi_g$ приведен в приложении, где получены следующие формулы для нормальной и сверхтекучей фаз:

$$G(r) = \begin{cases} \dfrac{Tm}{2\pi\hbar^2 r} e^{-\frac{r}{\xi}}, & \tau < 0, \\ \dfrac{Tm}{4\pi\hbar^2 r}\left(1 + e^{-\sqrt{2}\frac{r}{\xi}}\right), & \tau > 0. \end{cases} \tag{11}$$

В эти формулы входит корреляционная длина, которая определена формулой

$$\xi \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2ma|\tau|^{A+1}}}. \tag{12}$$

Отсюда следует, что критический индекс корреляционной длины $\xi \sim |\tau|^{-\nu}$ равен $\nu = \dfrac{A+1}{2}$. Вводится также показатель ζ, определяющий закон убывания корреляционной функции с расстоянием при $\tau = 0$: $G(r) \sim r^{-(d-2+\zeta)}$, d — размерность пространства [5]. В рассматриваемом трехмерном случае $\zeta = 0$.

6. Критические индексы

В предыдущих разделах критические индексы λ-перехода были выражены через два температурных показателя:

$$2\beta = A - B + 1, \quad \alpha = B - 2A,$$

$$\gamma = A + 1, \quad \nu = \frac{A+1}{2}, \quad \zeta = 0. \tag{13}$$

Отсюда сразу видно, что в теории ГС при произвольных показателях A, B выполняется общее соотношение между критическими индексами

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \tag{14}$$

полученное впервые Эссамом и Фишером [6,7]. Выполнено также еще одно общее соотношение [5]

$$\nu(2 - \zeta) = \gamma, \tag{15}$$

причем, поскольку $\zeta = 0$, то $2\nu = \gamma$.

Соотношения (14), (15) не связаны с какими-либо предположениями о характере флуктуационной картины вблизи температуры перехода. Если же использовать гипотезу о масштабной инвариантности [5–8], то ее следствием является еще одно соотношение между критическими индексами:

$$\nu d = 2 - \alpha, \tag{16}$$

где d — размерность пространства. В рассматриваемом трехмерном случае $3\nu = 2 - \alpha$. Это, с учетом (13), дает связь между температурными показателями степени:

$$B = \frac{(A+1)}{2}. \tag{17}$$

Таким образом, использование гипотезы о масштабной инвариантности позволяет ограничиться единственным подгоночным параметром, определяющим температурную зависимость всех величин вблизи λ-перехода, и все критические индексы могут быть выражены через этот параметр, например:

$$2\beta = \frac{(A+1)}{2}, \quad \alpha = \frac{(1-3A)}{2}, \quad \gamma = A+1, \quad \nu = \frac{A+1}{2}. \tag{18}$$

Для температурного показателя степени теории ГС в начальной формулировке [3,4] $A_{GS} = 1/3$, и соответствующие значения равны $\beta_{GS} = 1/3$, $\alpha_{GS} = 0$, $\gamma_{GS} = 4/3$, $\nu_{GS} = 2/3$.

Для определения величины A достаточно измерения какого-нибудь одного из критических индексов (18). Критические показатели для λ-перехода в жидком гелии ^{4}Не являются наиболее точно измеренными из всех критических индексов. В работе [9] с помощью измерения скорости второго звука вблизи λ-точки найдена зависимость сверхтекучей плотности от температуры $\rho_s \sim |\eta|^2 \sim \tau^{2\beta}$, где

$$2\beta = 0,6705 \pm 0,0006. \tag{19}$$

Значения показателей A и B, вычисленные по измеренной величине (19), приведены в первой строке табл. 1.

В работах [10–12] был измерен критический показатель теплоемкости α:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,01285 \pm 0,00038 \quad [10], \\ \alpha &= -0,01056 \pm 0,00038 \quad [11], \\ \alpha &= -0,0127 \pm 0,0003 \quad [12]. \end{aligned} \tag{20}$$

Измерения проводились в космосе, чтобы избежать размытия перехода за счет силы тяжести. Различие полученных значений (20) связывается с неоднозначностью интерпретации. Для нахождения A автором использовалось последнее в (20) значение, полученное в работе [12]. Величины показателей A и B, вычисленные по измерениям показателя теплоемкости, приведены во второй строке табл. 1.

Таблица 1. Значение показателей A и B

A	B	2β	α	γ	ν
0,3410	0,6705	0,6705±0,0006 [9]	–0,0115	1,3410	0,6705
0,3418	0,6709	0,6709	–0,0127±0,0003 [12]	1,3418	0,6709

Отличие приведенных в табл. 1 экспериментальных значений показателей от соответствующих значений исходной теории [3,4] определяется отношениями $|A-A_{GS}|/A_{GS} \approx 0,0231$, $|B-B_{GS}|/B_{GS} \approx 0,0057$ — при определении по показателю параметра порядка [9], и $|A-A_{GS}|/A_{GS} \approx 0,0255$, $|B-B_{GS}|/B_{GS} \approx 0,0063$ — при определении по показателю теплоемкости [12]. Таким образом, показатель степени относительной температуры во втором слагаемом термодинамического потенциала (1) изменился менее чем на 3%, а в третьем — менее чем на 1%.

Приведем также для сравнения величины критических индексов, вычисленные в работах [13–15]. В [13] теоретико-полевым методом ренормгруппы получены следующие значения:

$$\gamma_{PS} = 1,3172 \pm 0,0008, \quad \nu_{PS} = 0,6700 \pm 0,0006. \quad (21)$$

В [14] с помощью решеточных методов даны следующие оценки для критических показателей сверхтекучего перехода в ^{4}He:

$$\beta_{CHPV} = 0,3486 \pm 0,0001, \quad \alpha_{CHPV} = -0,0151 \pm 0,0003,$$
$$\gamma_{CHPV} = 1,3178 \pm 0,0002, \quad \nu_{CHPV} = 0,6717 \pm 0,0001. \quad (22)$$

Расчеты работы [15] дали такие величины:

$$\beta_{SN} = 0,3479 \pm 0,0016, \quad \alpha_{SN} = -0,0117 \pm 0,0031,$$
$$\gamma_{SN} = 1,3159 \pm 0,0008, \quad \nu_{SN} = 0,6706 \pm 0,0010. \quad (23)$$

Таким образом, как эксперимент [9,12], так и расчеты [13–15] определенно указывают на отличие критического индекса теплоемкости α от нуля.

Отметим важность для самосогласованности теории выполнение соотношения (17), являющегося следствием масштабной инвариантности. В этом случае в термодинамическом потенциале (1) температурная зависимость слагаемого, пропорционального $|\eta|^6$, которым пренебрегли, такая же, как и слагаемых с $|\eta|^2$ и $|\eta|^4$, так что это не повлияло на полученные значения температурных показателей. Относительный вклад возможных слагаемых с $|\eta|^8$, $|\eta|^{10}$ и более высокими степенями с приближением к температуре перехода уменьшается, а потому пренебрежение такими слагаемыми является законным. Отметим, однако, что для систем, у которых $b<0$ для обеспечения их устойчивости следовало бы в (1) учесть и слагаемое с $|\eta|^6$, полагая $c>0$.

7. Заключение

Точные измерения [9–12] и расчеты [13–15] критических индексов вблизи λ-перехода в ^{4}He показали, что критический индекс теплоемкости отличен от нуля, что находится в противоречии с первоначальной формулировкой теории Гинзбурга–Собянина [3,4]. Однако, как показано в настоящей работе, этот недостаток можно легко устранить, если рассматривать показатели степени для безразмерной температуры в термодинамическом потенциале как подгоночные параметры. С учетом гипотезы масштабной инвариантности все критические индексы в ^{4}He могут быть выражены через единственный показатель степени безразмерной температуры. При уточнении значений критических индексов должны уточняться и величины температурных показателей A и B, однако сама структура теории ГС при этом меняться не будет. Отметим также, что подобная формулировка теории фазовых переходов, обобщающая теорию среднего поля [5], имеет универсальный характер и может быть использована для описания других, например магнитных, систем.

Приложение. Расчет корреляционной функции

Вероятность отклонения от равновесного состояния

$$w = N e^{-\frac{\Delta\tilde{\Phi}}{T}}, \quad (\text{П}.1)$$

где N — нормировочный множитель, $\Delta\tilde{\Phi} = \int \Delta\Phi(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ — отклонение термодинамического потенциала от равновесного значения. Флуктуации предполагаются малыми, поэтому учитываем отклонение от равновесного значения с точностью до квадратичных по флуктуациям параметра порядка слагаемым. Поскольку в равновесном состоянии фаза параметра порядка не определена, не будем выделять у комплексного параметра порядка модуль и фазу.

1. В нормальной фазе, где $\tau = -|\tau| < 0$:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = a|\tau|^{A+1}|\eta|^2 + \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\eta|^2. \quad (\text{П}.2)$$

Используя разложение

$$\eta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}} \eta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (\text{П}.3)$$

получим

$$\Delta\tilde{\Phi} = \sum_{\mathbf{k}} L_{\mathbf{k}} \left(\eta_{\mathbf{k}}'^2 + \eta_{\mathbf{k}}''^2 \right), \qquad (П.4)$$

где выделена вещественная и мнимая части $\eta_{\mathbf{k}} = \eta_{\mathbf{k}}' + i\eta_{\mathbf{k}}''$ и введено обозначение

$$L_{\mathbf{k}} = a|\tau|^{A+1} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \qquad (П.5)$$

Поэтому нормированная вероятность (П.1) может быть записана в виде

$$w = \prod_{\mathbf{k}} \frac{L_{\mathbf{k}}}{\pi T} e^{-\frac{L_{\mathbf{k}}(\eta_{\mathbf{k}}'^2 + \eta_{\mathbf{k}}''^2)}{T}}. \qquad (П.6)$$

Корреляционная функция определена выражением

$$G(r) = \left\langle \eta(\mathbf{r}_1)\eta^*(\mathbf{r}_2) \right\rangle = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \left\langle \eta_{\mathbf{k}_1}\eta_{\mathbf{k}_2}^* \right\rangle \exp i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2) =$$
$$= \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \left[\left\langle \eta_{\mathbf{k}_1}'\eta_{\mathbf{k}_2}' + \eta_{\mathbf{k}_1}''\eta_{\mathbf{k}_2}'' - i\eta_{\mathbf{k}_1}'\eta_{\mathbf{k}_2}'' + i\eta_{\mathbf{k}_1}''\eta_{\mathbf{k}_2}' \right\rangle \right] \exp i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2), \qquad (П.7)$$

где $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Учитывая выражение для вероятности (П.6), имеем

$$\left\langle \eta_{\mathbf{k}_1}'\eta_{\mathbf{k}_2}' \right\rangle = \left\langle \eta_{\mathbf{k}_1}''\eta_{\mathbf{k}_2}'' \right\rangle = \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\frac{T}{2L_{\mathbf{k}_1}}, \quad \left\langle \eta_{\mathbf{k}_1}'\eta_{\mathbf{k}_2}'' \right\rangle = 0. \qquad (П.8)$$

Здесь $\Delta(\mathbf{k}) = 1$, если $\mathbf{k} = 0$, и $\Delta(\mathbf{k}) = 0$, если $\mathbf{k} \neq 0$. Подставляя (П.8) в (П.7) и переходя от суммирования к интегрированию, получаем

$$G(r) = \frac{T}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{k\sin kr}{\left(a|\tau|^{A+1} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)} dk =$$
$$= \frac{Tm}{\pi^2\hbar^2 r}\int_0^\infty \frac{y\sin\left(r\xi^{-1}y\right)}{1+y^2} dy = \frac{Tm}{2\pi\hbar^2 r} e^{-\frac{r}{\xi}}, \qquad (П.9)$$

где корреляционная длина ξ определена формулами

$$\xi \equiv \xi_0 |\tau|^{-\left(\frac{A+1}{2}\right)}, \qquad \xi_0 \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2ma}}. \qquad (П.10)$$

Нетрудно убедиться, что корреляционная функция

$$\tilde{G}(r) = \left\langle \eta(\mathbf{r}_1)\eta(\mathbf{r}_2) \right\rangle = 0. \qquad (П.11)$$

Выделив у флуктуации параметра порядка вещественную и мнимую части $\eta(\mathbf{r}) = \eta'(\mathbf{r}) + i\eta''(\mathbf{r})$, из (П.9), (П.11) получим корреляционные функции для вещественных величин:

$$G'(r) \equiv \left\langle \eta'(\mathbf{r}_1)\eta'(\mathbf{r}_2) \right\rangle = \left\langle \eta''(\mathbf{r}_1)\eta''(\mathbf{r}_2) \right\rangle =$$
$$= \frac{G(r)}{2} = \frac{Tm}{4\pi\hbar^2 r} e^{-\frac{r}{\xi}}, \quad \tilde{G}'(r) \equiv \left\langle \eta'(\mathbf{r}_1)\eta''(\mathbf{r}_2) \right\rangle = 0. \qquad (П.12)$$

2. В сверхтекучей фазе, где $\tau > 0$:

$$\eta(\mathbf{r}) = \overline{\eta} + \delta\eta(\mathbf{r}), \quad \eta^*(\mathbf{r}) = \overline{\eta} + \delta\eta^*(\mathbf{r}). \qquad (П.13)$$

Выбором фазы равновесное значение может быть сделано вещественным: $\overline{\eta} = \sqrt{a/b}\,\tau^{(A-B+1)/2}$.

Флуктуация плотности потенциала с точностью до квадратичных членов имеет вид

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = \frac{a}{2}\tau^{A+1}\left(\delta\eta + \delta\eta^*\right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\delta\eta^*\nabla\delta\eta. \qquad (П.14)$$

Используя разложения

$$\delta\eta(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}, \quad \delta\eta^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{kr}}, \qquad (П.15)$$

получаем флуктуацию полного потенциала

$$\Delta\tilde{\Phi} = \sum_{\mathbf{k}} L_{\mathbf{k}} |\eta_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{2}a\tau^{A+1}\sum_{\mathbf{k}}\left(\eta_{\mathbf{k}}^*\eta_{-\mathbf{k}}^* + \eta_{\mathbf{k}}\eta_{-\mathbf{k}} \right). \qquad (П.16)$$

От случая нормальной фазы (П.4) это выражение отличается последним слагаемым, содержащим произведения амплитуд с противоположными импульсами. Следует перейти к новым переменным с помощью преобразования, аналогичного преобразованию Боголюбова для операторов:

$$\eta_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\gamma_{\mathbf{k}} - \upsilon_{\mathbf{k}}\gamma_{-\mathbf{k}}^*, \qquad \eta_{-\mathbf{k}}^* = u_{\mathbf{k}}\gamma_{-\mathbf{k}}^* - \upsilon_{\mathbf{k}}\gamma_{\mathbf{k}}. \qquad (П.17)$$

Предполагается, и это подтверждается результатом, что коэффициенты этого преобразования вещественны и $u_{\mathbf{k}} = u_{-\mathbf{k}}$, $\upsilon_{\mathbf{k}} = \upsilon_{-\mathbf{k}}$. Требуя, чтобы якобиан перехода к новым переменным был равен единице, получаем условие на коэффициенты:

$$u_{\mathbf{k}}^2 - \upsilon_{\mathbf{k}}^2 = 1. \qquad (П.18)$$

Переходя в (П.16) к новым переменным, используя преобразование (П.17), и требуя, чтобы обращались в ноль произведения переменных с противоположными импульсами, приходим к уравнению

$$a\tau^{A+1}\left(u_{\mathbf{k}}^2 + \upsilon_{\mathbf{k}}^2\right) - 2u_{\mathbf{k}}\upsilon_{\mathbf{k}}L_{\mathbf{k}} = 0. \qquad (П.19)$$

Это уравнение удовлетворяется, если выполнены условия

$$L_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} - a\tau^{A+1} \upsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}, \qquad -a\tau^{A+1} u_{\mathbf{k}} + L_{\mathbf{k}} \upsilon_{\mathbf{k}} = -\varepsilon_{\mathbf{k}} \upsilon_{\mathbf{k}}. \tag{П.20}$$

Условие равенства нулю детерминанта этой системы однородных линейных алгебраических уравнений дает

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \pm\sqrt{L_{\mathbf{k}}^2 - a^2\tau^{2(A+1)}}. \tag{П.21}$$

Принимая во внимание условие (П.18), находим выражения, определяющие коэффициенты преобразования (П.17):

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} + 1\right), \quad \upsilon_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{L_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} - 1\right), \quad u_{\mathbf{k}}\upsilon_{\mathbf{k}} = \frac{a\tau^{A+1}}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}}. \tag{П.22}$$

Поскольку величина $L_{\mathbf{k}}$ положительна в (П.21), следует выбрать знак плюс. В новых переменных флуктуация полного потенциала принимает вид

$$\Delta\tilde{\Phi} = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \left(\gamma_{\mathbf{k}}'^2 + \gamma_{\mathbf{k}}''^2\right), \tag{П.23}$$

где $\gamma_{\mathbf{k}} = \gamma'_{\mathbf{k}} + i\gamma''_{\mathbf{k}}$. Выражение (П.23) отличается от (П.4) для нормальной фазы только заменой $L_{\mathbf{k}} \to \varepsilon_{\mathbf{k}}$. Поэтому

$$\left\langle \gamma'_{\mathbf{k}_1}\gamma'_{\mathbf{k}_2} \right\rangle = \left\langle \gamma''_{\mathbf{k}_1}\gamma''_{\mathbf{k}_2} \right\rangle = \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\frac{T}{2\varepsilon_{\mathbf{k}_1}}, \quad \left\langle \gamma'_{\mathbf{k}_1}\gamma''_{\mathbf{k}_2} \right\rangle = 0. \tag{П.24}$$

Для корреляционной функции получаем

$$G(r) = \left\langle \delta\eta(\mathbf{r}_1)\delta\eta^*(\mathbf{r}_2) \right\rangle = \frac{T}{V}\sum_{\mathbf{k}} \frac{L_{\mathbf{k}}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = \frac{Tm}{2\pi^2\hbar^2 r}\int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{k} \frac{\left(a\tau^{A+1} + \dfrac{\hbar^2k^2}{2m}\right)}{\left(a\tau^{A+1} + \dfrac{\hbar^2k^2}{4m}\right)} = \frac{Tm}{\pi^2\hbar^2 r}\int_0^\infty \frac{dy}{y}\sin\left(r\xi^{-1}y\right)\frac{\left(1+y^2\right)}{\left(2+y^2\right)}. \tag{П.25}$$

Вычисляя интеграл, окончательно находим

$$G(r) = \frac{Tm}{4\pi\hbar^2 r}\left(1 + e^{-\sqrt{2}\frac{r}{\xi}}\right). \tag{П.26}$$

На расстояниях $r \ll \xi$ формула (П.26) переходит в формулу (П.9) для нормальной фазы. При $r \gg \xi$ получаем степенную зависимость $G(r) \sim \dfrac{Tm}{4\pi\hbar^2 r}$.

Аналогично рассчитывается и «аномальная» корреляционная функция

$$\tilde{G}(r) \equiv \left\langle \delta\eta(\mathbf{r}_1)\delta\eta(\mathbf{r}_2) \right\rangle = \frac{Tm}{4\pi\hbar^2 r}\left(-1 + e^{-\sqrt{2}\frac{r}{\xi}}\right), \tag{П.27}$$

которая в сверхтекучей фазе, в отличие от нормальной (П.11), не равна нулю.

Выделив у флуктуации параметра порядка вещественную и мнимую части $\delta\eta(\mathbf{r}) = \delta\eta'(\mathbf{r}) + i\delta\eta''(\mathbf{r})$, из (П.26) и (П.27) получим корреляционные функции для вещественных величин:

$$G'(r) = \left\langle \delta\eta'(\mathbf{r}_1)\delta\eta'(\mathbf{r}_2) \right\rangle = \frac{1}{2}\left[G(r) + \tilde{G}(r)\right] = \frac{Tm}{4\pi\hbar^2 r} e^{-\sqrt{2}\frac{r}{\xi}},$$
$$G''(r) = \left\langle \delta\eta''(\mathbf{r}_1)\delta\eta''(\mathbf{r}_2) \right\rangle = \frac{1}{2}\left[G(r) - \tilde{G}(r)\right] = \frac{Tm}{4\pi\hbar^2 r},$$
$$\tilde{G}'(r) = \left\langle \delta\eta'(\mathbf{r}_1)\delta\eta''(\mathbf{r}_2) \right\rangle = 0, \tag{П.28}$$

одна из которых $G'(r)$ убывает с расстоянием экспоненциально, а вторая $G''(r)$ по степенному закону.

---

1. В.Л. Гинзбург, Л.Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1054 (1950).
2. В.Л. Гинзбург, Л.П. Питаевский, *ЖЭТФ* **34**, 1240 (1958).
3. В.Л. Гинзбург, А.А. Собянин, *УФН* **120**, 153 (1976).
4. В.Л. Гинзбург, А.А. Собянин, *УФН* **154**, 545 (1988).
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976), ч. I.
6. J.W. Essam and M.E. Fisher, *J. Chem. Phys*. **38**, 802 (1963).
7. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, Мир, Москва (1973).
8. А.З. Паташинский, В.Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1982).
9. L.S. Goldner, N. Mulders, and G. Ahlers, *J. Low Temp. Phys*. **93**, 131 (1993).
10. J.A. Lipa, D.R. Swanson, J.A. Nissen, T.C.P. Chui, and U.E. Israelsson, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 944 (1996).
11. J.A. Lipa, D.R. Swanson, J.A. Nissen, Z.K. Geng, P.R. Williamson, D.A. Stricker, T.C.P. Chui, U.E. Israelsson, and M. Larson, *Phys. Rev. Lett*. **84**, 4894 (2000).
12. J.A. Lipa, J.A. Nissen, D.A. Stricker, D.R. Swanson, and T.C.P. Chui, *Phys. Rev. B* **68**, 174518 (2003).
13. А.А. Погорелов, И.М. Суслов, *Письма в ЖЭТФ* **86**, 41 (2007).
14. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, and E. Vicari, *Phys. Rev. B* **74**, 144506 (2006).
15. A.I. Sokolov and M.A. Nikitina, *Physica A* **444**, 177 (2016).

Модифікація степеневих показників у теорії надплинності Гінзбурга–Собяніна

Ю.М. Полуектов

Запропоновано модифікацію температурних залежностей у термодинамічному потенціалі теорії надплинності Гінзбурга–Собяніна, яка дозволяє отримати значення критичних індексів, що узгоджуються із загальними співвідношеннями флуктуаційної теорії фазових переходів, сучасними даними експериментів та розрахунків.

Ключові слова: надплинність, теплоємність, параметр порядку, критичні індекси, температура фазового переходу, флуктуації.

Modification of exponents in the Ginzburg–Sobyanin theory of superfluidity

Yu.M. Poluektov

A modification of the temperature dependencies in the Ginzburg–Sobyanin theory of superfluidity is proposed, which allows one to obtain critical index values that are consistent with the general correlations of the fluctuation theory of phase transitions and modern experimental and calculated data.

Keywords: superfluidity, heat capacity, order parameter, critical indices, phase transition temperature, fluctuations.