Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2019, т. 45, № 8, с. 986–994

# Макроскопическая динамика сверхтекучей турбулентности

С.К. Немировский

*Институт теплофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия*
E-mail: nemir@itp.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 10 мая 2019 г., опубликована онлайн 26 июня 2019 г.

Обсуждаются проблемы гидродинамики сверхтекучей жидкости, содержащей хаотические клубки квантованных вихревых нитей. Построение такой гидродинамики решительным образом зависит от статистики вихревого клубка. Представлено и прокомментировано построение гидродинамических уравнений в двух важных случаях. Первый случай соответствует клубку, состоящему из полностью хаотических вихревых нитей. Такой случай реализуется в противотекущем гелии, он называется турбулентностью Вайнена. При построении макроскопической динамики система уравнений замыкается уравнением Вайнена для плотности вихревых нитей. Другой случай, так называемый случай Холла–Вайнена–Бекаревича–Халатникова, соответствует ситуации, когда в системе имеются пучки поляризованных вихревых нитей. В этом случае система замыкается с помощью соотношения Фейнмана, связывающего плотность вихревых нитей с завихренностью сверхтекучей скорости. Обсуждаются проблемы, связанные с применением обоих подходов.

Ключевые слова: сверхтекучая турбулентность, квантованные вихревые нити, макроскопическая динамика.

## 1. Введение. Макроскопическая динамика и турбулентность

Экспериментальное изучение сверхтекучей турбулентности в подавляющем большинстве случаев базируется на гидродинамических методах. К ним относятся, например, исследование вихревого клубка первым и вторым звуком, измерение разности температур или давлений, измерение потоков тепла и массы и т.д. С другой стороны, большинство известных способов создания сверхтекучей турбулентности также являются гидродинамическими — это генерация вихревого клубка потоком (противотоком) жидкости, звуковыми полями и т.д. Наконец, в последнее время изучаются гидродинамические процессы в He II, развитие которых в значительной степени определяется возникновением и динамикой вихревых нитей. К таким процессам можно отнести эволюцию нелинейных волн первого и второго звуков, нестационарный теплообмен и/или процессы кипения гелия.

Приведенные примеры демонстрируют, что имеется взаимное влияние гидродинамических процессов и динамики вихревого клубка друг на друга и поэтому как задача сверхтекучей турбулентности, так и исследование гидродинамических процессов в присутствии вихревого клубка являются неразделимыми частями одной общей проблемы [1]. Поэтому изучение свойств вихревого клубка, например, в противотоке, исходя из допущения, что параметры противотока фиксированы ($\mathbf{v}_{ns}$ = const), не является полностью оправданной процедурой. Столь же неправильной процедурой является исследование гидродинамических задач (например, изучение распространения звука), в предположении, что общая длина вихревых линий на единицу объема (плотность вихревых линий (ПВЛ)) $\mathcal{L}(t)$ фиксирована. Нужно отметить, что несмотря на очевидность последних двух утверждений такие подходы, тем не менее, широко распространены.

Итак, мы заключаем, что изменения параметров вихревого клубка и гидродинамических переменных происходят согласованно, и главная цель теперь построить систему уравнений, описывающую это согласованное изменение. Этот набор уравнений будем называть гидродинамикой сверхтекучей турбулентности (hydrodynamics of superfluid turbulence (HST)). Соответствующая задача, как оказалось, является довольно запутанной и существует несколько подходов к этой проблеме. Мы рассмотрим в этой работе существующие способы их описания и обсудим расхождения. Перед тем как перейти к различным вариантам вывода уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности представляется необходимым сделать ряд замечаний, касающихся самой постановки проблемы.

Следует подчеркнуть, что мы будем здесь иметь дело с макроскопическими (усредненными) уравнениями гидродинамики, где сингулярные вклады в скорость, давление из окрестностей отдельных вихрей устраняются с помощью процедуры усреднения. Такой подход называется как «крупнозернистая» (“coarse-grained”) гидродинамика.

Решение поставленной задачи, безусловно, зависит от типа турбулентности, или, в равной степени, от статистики хаотических вихревых нитей, составляющих квантовую турбулентность. В разд. 2 предлагаемой работы рассмотрен случай неупорядоченных вихревых клубков, развивающихся в противотоке He II (турбулентность Вайнена). Раздел 3 посвящен случаю Холла–Вайнена–Бекаревича–Халатникова с поляризованными вихревыми нитями. В разд. 4 обсуждается ряд принципиальных проблем, связанных с применением обоих методов.

## 2. Неупорядоченные вихревые клубки

Основной целью формулировки макроскопической динамики сверхтекучей турбулентности для неупорядоченных вихревых клубков является объединение уравнения Вайнена и классических уравнений Ландау–Халатникова двухжидкостной гидродинамики (см., например, Халатников [2], Паттерман [3], а также книгу автора [4]). Феноменологическая теория Вайнена основывается на качественном сценарии Фейнмана для развития хаотического вихревого клубка [5]. Апеллируя к этому сценарию, Вайнен изучил эволюцию общей длины вихревых линий на единицу объема $\mathcal{L}(t)$ (см. [6]). Основной идеей подхода было предположение автомодельности, т.е. предположение, что макроскопическая динамика вихрей может быть описана в терминах величины $\mathcal{L}(t)$. На основании размерного анализа, экспериментальных данных и некоторых рассуждений Вайнен пришел к соотношению, которое называется уравнением Вайнена (см. [6–8]):

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = a_V \mid \mathbf{v}_{ns} \mid \mathcal{L}^{3/2} - \beta_V \mathcal{L}^2. \tag{1}$$

Здесь $\alpha$ и $\beta$ — некоторые феноменологические коэффициенты, введённые Вайненым, $\mathbf{v}_{ns}$ — относительная скорость нормальной и сверхтекучей компонент. При построении гидродинамических уравнений переменная $\mathcal{L}(t)$ должна приобрести полевые свойства, т.е. необходимо ввести дополнительную зависимость от координаты, $\mathcal{L}(t) \to \mathcal{L}(\mathbf{r},t)$. Скорость изменения $\mathcal{L}(\mathbf{r},t)$ должна тогда подчиняться соотношению

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \to \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{L}\, \mathbf{v}_L), \tag{2}$$

где $\mathbf{v}_L$ является скоростью дрейфа клубка, определяемой как

$$\mathbf{v}_L = \left\langle \frac{1}{\mathcal{V}\mathcal{L}} \sum_j \int_0^{L_j} \dot{\mathbf{s}}_j \, d\xi_j \right\rangle, \tag{3}$$

где $\dot{\mathbf{s}}_j$ — скорость элементов вихревой линии, $\mathcal{V}$ — объем системы, угловые скобки $\langle\cdot\rangle$ обозначают усреднение по ансамблю вихревых петель (см. [1,7,8]). Очевидно, что скорость дрейфа клубка $\mathbf{v}_L$ не выражается через величину $\mathcal{L}(\mathbf{r},t)$, а должна привлечь более тонкие характеристики, например, распределение и ориентацию нитей в пространстве, распределение кривизны и так далее. Таким образом, уже в стационарном, но неоднородном случае, появляется новая переменная, связанная с тонкой структурой вихревого клубка. Очевидно, что в рамках феноменологической теории Вайнена не представляется возможным определить $\mathbf{v}_L$, если только не сделаны некоторые дополнительные предположения или использованы экспериментальные данные. Вайнен предполагал, что скорость дрейфа клубка $\mathbf{v}_L$ должна быть (в силу изотропии клубка) равной скорости $\mathbf{v}_s$ сверхтекучей компоненты. Анализируя свои работы, Шварц [7,8] заключил, что вихревой клубок должен дрейфовать в направлении нормальной компоненты со скоростью пропорциональной скорости противотока $\mathbf{v}_{ns}$, это предположение согласуется с ранее выполненными экспериментами Ashton и др.[9].

Далее также будем считать, что в нестационарных случаях, описываемых уравнением (2), скорость дрейфа клубка $\mathbf{v}_L$, как и в случае стационарных течений, связана со скоростью противотока $\mathbf{v}_{ns}$ соотношением $\mathbf{v}_L = b\mathbf{v}_{ns}$, где $b$ — постоянный коэффициент. Таким образом, уже в стационарном, но неоднородном случае, необходимо ввести в дополнение к ПВЛ $\mathcal{L}(t)$ новую переменную, которая не связана прямо с $\mathcal{L}(t)$. Нестационарные проблемы являются гораздо более сложными случаями с точки зрения ситуации, обсужденной выше.

Далее, в духе теории Вайнена, предположим, что гидродинамические процессы могут быть полностью описаны набором из уравнений двухжидкостной гидродинамики Ландау–Халатникова плюс уравнения для ПВЛ $\mathcal{L}(\mathbf{r},t)$ (1). Последнее, однако, должно быть слегка изменено, чтобы включить эффекты неоднородности (см. выражение (2)).

Попытки описать нестационарные гидродинамические процессы в He II, содержащем вихревой клубок, возникли с открытием соотношения Гортера–Меллинка (см., например, [3]). В самом простейшем случае существование вихревого клубка было учтено путем введения стационарной силы Гортера–Меллинка, как $\mathbf{F}_{ns} = A(T)\rho_s\rho_n \mathbf{v}_{ns}^2 \mathbf{v}_{ns}$, в правой части уравнений для сверхтекучей и нормальной скоростей (с противоположными знаками, конечно). Здесь $A(T)$ — величина, называемая константой Гортера–Меллинка, $\rho_s$, $\rho_n$ — плотности сверхтекучей и нормальной компонент. Важным усовершенствованием было введение в закон Гортера–Меллинка плотности вихревых линий $\mathcal{L}$. Это было достигнуто использованием асимптотического соотношения для ПВЛ $\mathcal{L} = \gamma^2 \mathbf{v}_{ns}^2$, ($\gamma$ — введенный Вайненом коэффициент [6]), приводящего к зависимости

$$F_{ns} = A(T)\rho_n\rho_s(\mathcal{L}(t)/\gamma^2)\,\mathbf{v}_{ns}. \qquad (4)$$

Соотношение (4) используется для решения нестационарных задач (см., например, [3]). При этом предполагается, что плотность вихревых линий $\mathcal{L}(t)$, хотя и меняется во времени, всегда подстраивается под изменение относительной скорости $\mathbf{v}_{ns}$. Собственная динамика величины $\mathcal{L}(t)$, связанная с уравнением Вайнена (1), игнорируется. Конечно, некоторый определенный класс задач (например, с медленно меняющимися параметрами) с помощью такой идеологии можно решить. Однако этот подход имеет очень ограниченную область применения, поэтому, что очень важно, не удовлетворяет всем необходимым законам сохранения.

С другой стороны, если бы гидродинамические уравнения рассматривались как совокупность законов сохранения, то можно получить полную замкнутую систему уравнений для всех независимых переменных, включая ПВЛ $\mathcal{L}(\mathbf{r},t)$. Эта схема была реализована в работе Немировского и Лебедева [10] на основе формализма, разработанного Бекаревичем и Халатниковым [11].

Как известно, плотность энергии $E$ безвихревого течения He II равна

$$E = \frac{\rho\,\mathbf{v}_s^2}{2} + \mathbf{v}_s\,\mathbf{j}_0 + E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0). \qquad (5)$$

Здесь $\rho$ — полная плотность He II, $j_0$ — плотность импульса в системе отсчета сверхтекучей компоненты, $S$ — плотность энтропии и $E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$ — плотность энергии в этой системе. Дифференциал величины $E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$ имеет вид

$$dE_0 = T\,dS + \mu\,d\rho + \mathbf{v}_{ns}\cdot d\,\mathbf{j}_0, \qquad (6)$$

где $\mu$ — химический потенциал. В классической двухжидкостной модели уравнения движения выводятся таким образом, чтобы, используя законы сохранения для $\rho$, $S$, $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{j}_0$, получить закон сохранения энергии (см. [10]). Этот самосогласованный подход может быть распространен на случай He II, содержащий вихревой клубок. Присутствие вихрей изменяет плотность энергии $E_0$, изменение может быть выполнено путем добавления слагаемого

$$\delta E_0 = \varepsilon_V\,d\mathcal{L}. \qquad (7)$$

Здесь $\varepsilon_V$ — энергия единичной длины вихревой линии. Таким образом, в присутствии вихревого клубка энергия потока He II становится функцией величины $\mathcal{L}$, которая является новой независимой переменной в дополнение к основному набору переменных $\rho$, $S$, $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{j}_0$. При этом важным шагом является то обстоятельство, что переменная $\mathcal{L}$ не подстраивается под вышеупомянутые термодинамические и гидродинамические функции, а изменяется в соответствии с независимым уравнением Вайнена (1) в форме (13). Наряду с изменением плотности энергии (7), другие гидродинамические характеристики, такие как диссипативная функция, тензор плотности импульса и т.д., должны также быть изменены соответствующим образом. Эти изменения, однако, не являются независимыми, а должны быть такими, чтобы законы сохранения для множества $\rho$, $S$, $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{j}_0$ и $\mathcal{L}$ приводили к закону сохранения полной энергии $E(\rho, S, \mathbf{v}_s, \mathbf{j}_0, \mathcal{L})$. Это последнее требование дает все поправки к набору уравнений двухжидкостной гидродинамики, т.е. к новому набору уравнений, при условии, что выполнено дополнительное предположение относительно диссипативной функции $R$.

В работе [10] авторы использовали модель Фейнмана–Вайнена. В представленной модели за энтропию отвечают два процесса. Одним из них является работа силы взаимного трения между вихревыми линиями и нормальной составляющей. Эта работа пропорциональна суммарной длине вихревой линии $\mathcal{L}$ в единице объема и усредненному квадрату скорости вихрей относительно нормальной компоненты. Кроме этого, имеется еще один механизм возникновения энтропии, связанный с преобразованием энергии дробления мелких вихревых колец в тепловые возбуждения. Этот последний механизм дает выражение для производства энтропии, равное произведению энергии единицы длины и вихревой нити $\varepsilon_V$ на скорость распада вихревого клубка $\beta_V\mathcal{L}^2$. Таким образом, вклад $R'$ вихревого клубка в диссипативную функцию равен:

$$R' = \left(K\,v_{ns}^2\,\mathcal{L} + \varepsilon_V\,\beta_V\,\mathcal{L}^2\right)/T. \qquad (8)$$

Коэффициент $K = B\kappa\rho_s\rho_n/3\rho$ (где $B$ — коэффициент Холла–Вайнена, связанный с коэффициентами трения $\alpha$ и $\alpha'$, а величина $\kappa$ — квант циркуляции) может быть определен в предположении, что в стационарном однородном случае величина $TR'$ соответствует работе силы Гортера–Меллинка. Использование (8) позволяет однозначно определить уравнения движения He II в присутствии вихревого клубка и, тем самым, разработать гидродинамическую теорию сверхтекучей турбулентности (HST). Совокупность полученных уравнений имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\,\mathbf{j} = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{d\mathbf{j}_i}{dt} + \frac{d\Pi_{ik}}{dx_k} = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{dS}{dt}+\nabla\left[S\,\mathbf{v}_n+S^L\left(v_L-v_n\right)\right]=\frac{1}{T}\left[K\,\mathcal{L}\,v_{ns}^2+\varepsilon_V\,\beta\,\mathcal{L}^2\right], \tag{11}$$

$$\rho_s\left\{\frac{d\mathbf{v}_s}{dt}+(\mathbf{v}_s\nabla)\,\mathbf{v}_s+\nabla\mu\right\}-b\,\nabla\varepsilon_V-S^L\,b\,\nabla T=$$

$$=K\,\mathcal{L}\,\,\mathbf{v}_{ns}+\varepsilon_V\,\alpha_V\,\frac{\mathbf{v}_{ns}}{|\,\mathbf{v}_{ns}\,|}\mathcal{L}^{3/2}\,. \tag{12}$$

Уравнение Вайнена в этой схеме имеет вид

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}+\nabla(\mathcal{L}\,\mathbf{v}_{\mathcal{L}})=\alpha_V\,|\,\mathbf{v}_{ns}\,|\,\mathcal{L}^{3/2}-\beta_V\,\mathcal{L}^2. \tag{13}$$

Здесь $\Pi_{ik}$ — тензор потока импульса с дополнительным членом $\varepsilon_V\mathcal{L}\delta_{ik}$, связанным с наличием вихрей, а $S^L$ — дополнительная энтропия из-за вихревого клубка. Уравнения (9)–(12) плюс модифицированное уравнение Вайнена (13) являются существенным обобщением двухжидкостной модели Ландау–Халатникова и могут быть использованы для изучения нестационарных гидродинамических проблем He II в присутствии квантовой турбулентности.

Дополнительные (по отношению к классическим уравнениям двухжидкостной гидродинамики Ландау–Халатникова) слагаемые в левых частях приведенных выше уравнений, так называемые реактивные члены, связаны с соответствующей симметрией гамильтониана системы. Диссипативные слагаемые в правых частях соотношений (12) и (13) можно записать в виде антисимметричной матрицы (см. детали в [10]). Поскольку $\partial E/\partial v_{s,k}=-\rho\,v_{ns,k}$, а $\partial E/\partial\mathcal{L}=\varepsilon_V$, то такая форма демонстрирует принцип взаимности Онзагера для кинетических коэффициентов. Антисимметрия коэффициентов следует из различного поведения $\mathbf{v}_s$ и $\mathcal{L}$ по отношению к обращению времени (см. [12]).

Отметим, что правая часть (12) наряду с обычным членом Гортера–Меллинка $K\mathcal{L}\,v_{ns}$ содержит также дополнительный член $\varepsilon_V\alpha_V(\mathbf{v}_{ns}/|\,\mathbf{v}_{ns}\,|)\mathcal{L}^{3/2}$. Этот член описывает дополнительное затухание в результате поглощения кинетической энергии потока вихревым клубком в процессе его роста. Следуя идеям Фейнмана, при распаде клубка эта часть энергии возвращается к основному потоку в форме энтропии. Обычно, когда вихревой клубок близок к равновесной ситуации (по отношению к скорости $\mathbf{v}_{ns}$, и $\mathcal{L}=\gamma^2\mathbf{v}_{ns}^2$), первый член гораздо больше, чем это дополнительное слагаемое. Тем не менее, когда $\mathcal{L}$ очень велико, это обычно небольшое слагаемое может стать значительно больше, чем член Гортера–Меллинка. Следует отметить, что дополнительный член имеет особую форму и не зависит от величины скорости, а только от ее направления. Это свойство напоминает эффект «сухого трения» в классической механике, и поэтому дополнительный член будет называться “dry friction term” [13]. Этот термин произошел от известного в обычной механике факта, утверждающего, что сила взаимодействия скользящих относительно друг друга поверхностей не зависит от величины скорости, а направлена только против движения. Конкретный вид этого слагаемого напрямую связан с генерирующим членом в уравнении Вайнена (1). Отметим, что в стационарном случае, когда $\mathcal{L}\sim\mathbf{v}_{ns}^2$, оба слагаемых в правой части уравнения (11) приобретают одну и ту же структуру, они пропорциональны $v_{ns}^3$. Поэтому влияние дополнительного члена имеет значение с точки зрения эволюции динамики VT, и его эффект может наблюдаться только лишь в нестационарных случаях.

Другой способ получения уравнений HST на основе микроскопической, кинетической теории Шварца был выполнен Ямада и др. (1989) [15]. Постановка задачи была сформулирована на основе стохастического кинетического уравнения для функции распределения общей длины линии. Этот метод позволил более глубокое понимание сущности стохастического подхода по сравнению с уравнениями HST, полученными на основе феноменологического метода, описанного выше. Сосредоточившись на диссипативных эффектах, Ямада и др. [15] не получили реактивные члены в левых частях уравнений движения (см. (9)–(12) плюс модифицированное уравнение Вайнена (13)), связанные с энергетическим вкладом вихревого клубка в термодинамические переменные. Опуская проблему реактивных терминов, мы хотели бы обсудить оставшееся очень важное различие между результатами, полученными Ямада и др. [15], а также в работе [10]. Речь идет о дополнительном слагаемом $\varepsilon_V\alpha_V(\mathbf{v}_{ns}/|\,\mathbf{v}_{ns}\,|)\mathcal{L}^{3/2}$ в силе взаимного трения, который мы назвали членом сухого трения. В работе Ямада и др. [15] это слагаемое действительно имеется, однако у него противоположный знак по сравнению с (12). С формальной точки зрения этот результат был получен, потому что авторы приняли точку зрения Шварца, утверждающую, что как производящий, так и распадный члены в уравнении Вайнена (1) связаны с действием сил трения. Следовательно, затухание вихревого клубка сопровождается возвращением энергии из вихревого клубка в кинетическую энергию основного потока. (Напомним, что в модели Фейнмана энергия вихревого клубка возвращается в основной поток в виде тепловых возбуждений.) Это обнаруживается экспериментально, как уменьшение эффективной силы взаимного трения Гортера–Меллинка. Таким образом, формальное, на первый взгляд, различие в интерпретации уравнения Вайнена (1) проявилось в уравнениях гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Это обстоятельство предоставляет возможность экспериментально проверить, какой механизм распада вихревого клубка (Фейнмана–Вайнена или Шварца) находится ближе к физической реальности.

Герст (см. подробности [16] и ссылки в ней) получил уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности для случая одномерного потока из вариационного принципа. Такой подход с использованием модели вихревого клубка, изменяющего термодинамические свойства текущего He II, является близким к феноменологическому методу Немировского и Лебедева [10], описанному выше. Отличительной особенностью используемого метода является то, что Geurst не считал скорости дрейфа $\mathbf{v}_L$ в качестве переменной, определяемой из других величин. Напротив, Geurst использовал скорость дрейфа $\mathbf{v}_L$ в качестве новой независимой переменной, ответственной за макроскопическую динамику вихревого клубка, и получил дополнительное дифференциальное уравнение для нее. Сравнивая уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности, полученные Geurst, с уравнениями, описанными в предыдущих параграфах, мы хотели бы сделать несколько замечаний. Что касается реактивных условий, то они близки к полученным Немировским и Лебедевым [10]. Формально это возникло из-за сходства между феноменологическим и вариационным методами. Дополнительный член в правой части уравнения (12), связанный с дополнительной силой, действующей на сверхтекучую компоненту, представляет особый интерес, потому что, как обсуждалось ранее, он имеет противоположные знаки в работах Немировского и Лебедева [10], Ямада и др. [15]. Как упоминалось, это противоречие связано с использованием либо феноменологического, либо кинетического метода для получения уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности. В работе Geurst [16] этот дополнительный член имеет знак $\operatorname{sign}(v_L - v)$, т.е. в зависимости от направления дрейфа VT по отношению к среднемассовой скорости жидкости он может быть положительным или отрицательным. Подробное обсуждение этой ситуации имеется в обзорных статьях [1,13,17].

В этой работе продемонстрированы три различных метода получения уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности для полностью неупорядоченных вихревых клубков. Эти уравнения предназначены для описания гидродинамических процессов в противотоке He II при скоростях выше критической. Поскольку критические скорости очень малы, наиболее интересные практические проблемы находятся в исследуемом диапазоне. Решение этих уравнений описывают множество наблюдаемых нестационарных гидродинамических явлений. Они также прогнозируют много новых интересных эффектов, которые еще предстоит открыть.

## 3. Случай Холла–Вайнена–Бекаревича–Халатникова

Другим важным случаем является ситуация, когда множество вихревых линий состоит из множества пучков, содержащих большое количество одинаково направленных нитей. Эта ситуация, как полагают, реализуется, в случае так называемой квазиклассической турбулентности, возникающей при течении сверхтекучего гелия в каналах или при обтекании препятствий. Макроскопическое поведение этих пучков имитирует динамику вихрей в обычных жидкостях. «Крупнозернистая» гидродинамика вихревых пучков изучается многими авторами (см., например, [18–20]). Интерес к этой модели связан с квазиклассической квантовой турбулентностью, т.е. поведением вихревого клубка, воспроизводящего свойства классической турбулентности (см., например, серию работ Вайнена [21–23] и обзор автора [17]).

Основой для математического формализма модели вихревых пучков стала гидродинамика вращающихся сверхтекучих жидкостей, или модель Холла–Вайнена–Бекаревича–Халатникова (HVBK) (см., например, книгу Халатникова [2]). Как известно [5], в сосуде, вращающемся с угловой скоростью $\Omega$, возникает пучок вихревых нитей с плотностью

$$n = \frac{2\Omega}{\kappa}. \qquad (14)$$

Такое распределение вихрей создает среднюю сверхтекучую скорость $\langle \mathbf{v}_s \rangle$, которая удовлетворяет условию твердотельного вращения $\langle \mathbf{v}_s \rangle = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. Поле завихренности $\omega$ равно $\omega = 2\mathbf{\Omega}$. В результате плотность вихревых нитей при этом может быть связано с полем завихренности следующим соотношением:

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = \kappa \mathcal{L}. \qquad (15)$$

Ввиду малости кванта циркуляции $\kappa$ даже относительно слабая скорость вращения приводит к большой плотности вихревых нитей. Таким образом, можно построить «крупнозернистую» гидродинамику с уравнениями, которые усредняют вклад многих отдельных вихревых линий и инкорпорируют их вклад в макроскопические эволюционные уравнения для сверхтекучей и нормальной скоростей He II. Гидродинамические уравнения используют модели HVBK, модифицированные для включения присутствия вихрей простым добавлением силы взаимного трения $\mathbf{F}_{mf}$ и натяжения $\mathbf{T}$, а также наложением условия $\nabla \times \mathbf{v}_s \neq 0$. В случае несжимаемой жидкости (обеих компонент $\nabla \times \mathbf{v}_n = 0$, $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$) и в инерциальной системе отсчета, уравнения HVBK записываются как

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla p_n - \mathbf{F}_{mf} + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_n, \qquad (16)$$

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla p_s + \mathbf{F}_{mf} + \rho_s \mathbf{T}. \qquad (17)$$

Здесь $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_s$ являются макроскопическими, «крупнозернистыми» скоростями нормальной и сверхтекучей компонент (усредненных в малом объема $\mathcal{V}$). Величины $p_n$ и $p_s$ — эффективные давления, действующие на нормальную и сверхтекучую компоненты

($\nabla p_n = \nabla p - \nabla p_s$ и $\nabla p_s = \nabla\mu - (\rho_n/2)\nabla\omega^2$). Величина $\eta$ — динамическая вязкость нормальной компоненты, $\omega$ — модуль относительной скорости, $\omega = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$. Влияние вихрей описывается силой трения, оказываемой совокупностью вихревых пучков на обе компоненты $\mathbf{F}_{mf}$, и вихревой силой натяжения $\rho_s\mathbf{T}$, действующей на сверхтекучую компоненту. Уравнения (16) и (17) — макроскопические уравнения, следовательно, включение эффектов вихревых линий требует высокой вихревой плотности линий $\mathcal{L}$ на единицу объема.

Макроскопические выражения $\mathbf{F}_{mf}$ и $\rho_s\mathbf{T}$ вытекают из микроскопических величин, усредненных в малом объеме $\mathcal{V}$. Нормальная составляющая реагирует на движущиеся со скоростями $\dot{\mathbf{s}}_i$ вихри, возникает «микроскопическая» взаимная сила трения $\mathbf{f}_{ns}$. Также, начиная с динамики отдельной вихревой нити, можно найти микроскопическое выражение силы натяжения вихря, которой является возвратная сила, возникающая в искривленных вихрях (см., например, книгу Халатникова [2]). Усредняя эти силы по всем вихрям внутри вихревого пучка, можно получить следующие выражения для «крупнозернистых» $\mathbf{F}_{mf}$ и $\rho_s\mathbf{T}$:

$$\mathbf{F}_{mf} = \left[\mathbf{f}_{mf}\right]_{av} = \mathcal{L}\left\langle \mathbf{f}_{MF}\right\rangle = \alpha\rho_s\kappa\mathcal{L}\left\langle \mathbf{s}'\times\left[\mathbf{s}'\times(\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i)\right]\right\rangle + \tag{18}$$

$$+\alpha'\rho_s\kappa\mathcal{L}\left\langle \mathbf{s}'\times(\mathbf{v}_{ns} - \dot{\mathbf{s}}_i)\right\rangle, \tag{19}$$

$$\mathbf{T} = \left[\mathbf{v_i}\times\omega_{\text{micr}}\right]_{av} = \kappa\mathcal{L}\beta\left\langle(\mathbf{s}'\times\mathbf{s}'')\times\mathbf{s}'\right\rangle = \kappa\mathcal{L}\beta\left\langle \mathbf{s}''\right\rangle. \tag{20}$$

Здесь $\beta = \dfrac{\kappa}{4\pi}\ln\dfrac{\langle R\rangle}{a_0}$, $\alpha$ и $\alpha'$ — коэффициенты трения для вихревой нити (см. [8]). В HVBK уравнениях выражения (18) и (20) обычно аппроксимируются с помощью усредненной завихренности (см. формулу (15))

$$\mathbf{F}_{mf}^{HVBK} = \rho_s\alpha\hat{\omega}\times\left[\omega\times(\mathbf{v}_{ns} - \beta\nabla\times\hat{\omega})\right] + \rho_s\alpha'\omega\times(\mathbf{v}_{ns} - \beta\nabla\times\hat{\omega}), \tag{21}$$

$$\mathbf{T}^{HVBK} = (\beta\nabla\times\hat{\omega})\times\omega = \beta(\omega\times\nabla)\hat{\omega}. \tag{22}$$

Здесь $\omega = \nabla\times\mathbf{v}_s$ — усредненная сверхтекучая завихренность, $\hat{\omega} = \omega/|\omega|$. Во вращающемся случае VLD $\mathcal{L}$ сводится к поверхностной плотности $n_v$, а завихренность равна $\omega = 2\mathbf{\Omega}$. Таким образом, в чистом вращении взаимная сила трения имеет упрощенное выражение:

$$\mathbf{F}_{mf} = 2\rho_s\alpha\mathbf{\Omega}\times\left[\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)\right] + 2\rho_s\alpha'\mathbf{\Omega}\times(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \tag{23}$$

Сила натяжения равна нулю, так как во вращающемся образце вихревые линии являются прямыми, параллельными оси вращения.

HVBK уравнения (16) и (17) с выражениями (21), (22), (23) были использованы для изучения различных экспериментальных ситуаций в He II (течение Тэйлора–Куэтта, плоского течения Пуазейля и так далее). Но только в некоторых случаях с помощью этих уравнений удалось получить количественное согласие с экспериментом, как, это было сделано в работе Хендерсона и др. [24].

В настоящее время метод HVBK используется для исследований широкого класса задач по различным аспектам квантовой турбулентности (см. [20,25,26] и ссылки в них).

## 4. Обсуждение

В данном разделе обсуждены проблемы, связанные с феноменологической теорией Вайнена, а также подход Холла–Вайнена–Бекаревича–Халатникова.

### *4.1. Проблемы теории Вайнена*

Представляется важным еще раз рассмотреть внимательно предположение Вайнена, касающееся автомодельного состояния вихревого клубка, т.е. гипотезы, что изменение величины ПВЛ $\mathcal{L}(t)$ определяется только самой $\mathcal{L}(t)$ и гидродинамическими параметрами. Более тонкие характеристики вихревой структуры, которые отличаются от ПВЛ $\mathcal{L}(t)$, не участвуют в макроскопическом описании процесса. В стационарных однородных случаях, когда только $\mathcal{L}(t)$ и ориентация вихрей в пространстве определяют взаимную силу трения, которая отвечает за большинство встречающихся эффектов, это предположение более-менее оправдано. Когда поток не может рассматриваться стационарным и однородным, возникают вопросы, касающиеся возможности описания гидродинамических процессов (в присутствии вихревого клубка) с точки зрения только одной переменной $\mathcal{L}(t)$. Выбор набора переменных для описания макроскопической динамики статистических систем, как правило, является сложным и деликатным шагом. Например, обычные газодинамические переменные, такие как плотность, импульс и энергия на единицу объема, являются только первыми моментами функции распределения кинетической теории Больцмана. Более высокие моменты релаксируют к равновесию намного быстрее, чем первые перечисленные переменные. Это обстоятельство позволяет «обрезать» бесконечную иерархию уравнений для моментов функции распределения и получить замкнутое описание с использованием перечисленных величин.

К сожалению, в случае квантовой турбулентности предположение о самосохранении необоснованно, ограничение единственной переменной $\mathcal{L}(t)$ неоправданно, и, как правило, уравнение Вайнена не выполняется. Действительно, давайте рассмотрим очень простой контрпример. Предположим, что скорость $\mathbf{v}_{ns}(t)$ мгновенно меняется на противоположную. Так как уравнение типа Вайнена включает абсолютное значение относительной скорости $\mathbf{v}_{ns}(t)$, то формально уравнение (1) остается неизменным, что, разумеется, неверно. Структура VT, средняя кривизна, параметры анизотропии и поляризации будут реорганизованы. Это подразумевает нарушение предположения об автомодельности вихревого клубка, и динамика VLD $\mathcal{L}(t)$ зависит от других, более тонких характеристик вихревой структуры, отличных от $\mathcal{L}(t)$.

Строго говоря, нет теоретических оснований предполагать, что релаксация более высоких моментов происходит быстрее, чем релаксация величины $\mathcal{L}(t)$. Таким образом, в общем случае никакого уравнения типа $\partial\mathcal{L}(t)/\partial t = \mathcal{F}(\mathcal{L}(t))$ не существует! В то же время в некоторых (неясных) условиях и с использованием дополнительных аргументов (см. [6]) требуемое уравнение может быть записано. Попытка была успешной, эта теория объяснила большое количество гидродинамических экспериментов, включая основной эксперимент Гортера и Меллинка [27] (см. подробности в обзоре [28]). Это касается, однако, только стационарных или почти стационарных ситуаций. В сильно нестационарном случае область применимости этого уравнения неясна (см. приведенный выше контрпример с внезапным обращением скорости противотока).

Между тем, кажется интуитивно правдоподобным, что для медленных изменений (как в пространстве, так и во времени) справедливо предположение об автомодельности вихревого клубка. Это было отправной точкой в построении изложенной выше гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Уравнения HST были применены для изучения большого числа нестационарных гидродинамических и тепловых проблем, включая теплообмен и кипение в He II (см., например, [29–34]). Численные и аналитические результаты хорошо согласуются с многочисленными экспериментальными данными. Этот факт указывает на то, что уравнение Вайнена является вполне «стабильным» и в целом вполне подходит для нестационарных задач гидродинамики. Ситуация с неоднородными течениями очень похожа (см. работы [35–37]). Качественное сходство и близость количественных решений (см. [38]) указывает на то, что уравнение Вайнена применимо для изучения различных неоднородных ситуаций. Изложенные факты подтверждают широко распространенное мнение о том, что уравнение Вайнена можно использовать для изучения «грубых» инженерных задач (хотя для соответствующих исследований могут потребоваться некоторые подгоночные параметры), но оно не подходит для описания тонкой структуры вихревого клубка. В то же время феноменологическая теория Вайнена–Фейнмана является прекрасной иллюстрацией того, как грубый макроскопический подход позволяет прояснить тонкие и сложные явления статистической физики струноподобных объектов.

### *4.2. Проблемы метода HVBK*

Основой идеологии HVBK является соотношение Фейнмана (14), связывающее плотность вихрей и усредненную завихренность. Но эти правила, как и сам HVBK подход, были первоначально разработаны только для 2D случая. При использовании HVBK уравнения в трехмерном случае остаются открытыми ряд важных вопросов. Вероятно, единственным аргументом является следующее: считается, что вихревой клубок состоит из так называемых вихревых пучков, которые содержат *все* вихревые нити, существующие в вихревом клубке (в противном случае используемое правило Фейнмана (15), которое связывает «крупнозернистую» завихренность $\nabla\times\mathbf{v}_s$ и ПВЛ $\mathcal{L}(t)$, недействительно).

Несмотря на то, что понятие вихревых пучков, поддерживающих квазиклассическое поведение квантовой турбулентности, широко используется в настоящее время, не существует строгих подтверждений или убедительных аргументов в пользу их существования. Напомним, что завихренность в классических жидкостях, и, в частности крупные вихри, в конечном итоге появляются из-за сдвиговой вязкости, полностью отсутствующей в квантовых жидкостях. Иногда существование пучков квантовых вихрей рассматривается в качестве гипотезы, которая до сих пор не подтверждена. Иногда авторы обращаются к численному моделированию [39–44], не принимая во внимание, что пучки появляются в этих работах из-за ранее созданной завихренности в нормальной компоненте.

В нескольких работах (см., например, [45]) авторы демонстрируют, как с помощью статистического анализа можно получить небольшую поляризацию (преобладание одного направления над другим) в вихревом клубке. Но, во-первых, это всего лишь статистический эффект, и, во-вторых, ни при каких обстоятельствах эта небольшая поляризация не позволяет использовать правило Фейнмана (14). Чтобы использовать этот анзац, необходимо, чтобы *все* нити в вихревом клубке участвовали во вращении. Но если поляризация частичная, то существует много свободных вихревых нитей, которые (во время движения) взаимодействуют с поляризованной линией, разрушая тем самым структуру квазипучка.

Часто авторы считают, что существование вихревых пучков — это очевидный факт, который не нуждается в каких-либо доказательствах. Так, например, Козик и Свистунов [46] отмечают, что крупномасштабное поведение завихренной квантовой жидкости полностью идентично эволюции классической гидродинамики. Основанием для этого служит то обстоятельство, что уравнения движения, написанные в терминах Фурье образа завихренности $\omega_{\mathbf{k}} = (\kappa/(2\pi)^{3/2})\oint d\mathbf{s}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}(\xi)}$, вообще не включают в себя кванта циркуляции $\kappa$, и идентичны уравнению завихренности для нормальной идеальной несжимаемой жидкости: (см. уравнение (70) в [46]). Мы полагаем, однако, что механизм производства завихренности является более важным фактором, чем формальное совпадение уравнений движения.

Таким образом, мы приходим к выводу, что до сих пор не существует убедительного подтверждения существования вихревых пучков. В то же время, имеется ряд аргументов, показывающих, что пучки (если они появляются), являются очень нестабильными структурами. Воловик [47] продемонстрировал этот факт на основе исследуемых здесь HVBK уравнений. Очевидным (хотя не единственным) источником разрушения вихревых пучков являются различные реконнекции. Так, например, в работах [48,49] показано, что даже единичные события реконнекции приводят к каскадному рождению вихревых петель различных размеров, хаотично излучаемых из точки реконнекции. Очевидно, что эти распространяющиеся петли сталкиваются с линиями, которые составляют вихревые пучки, что приводит к новым реконнекциям, лавинообразно усиливает хаотизацию вихревых петель и разрушает любые регулярные вихревые структуры, в частности вихревые пучки. Эти процессы должны привести к раздроблению регулярных пучков и появлению хаотических петель. Отметим также статью по численному моделированию Д. Кивотидеса [50], который изучил точную (не HVBK) динамику вихрей в термической турбулентности и пришел к выводу, что « результаты не показывают, что турбулентная нормальная жидкость с энергетическим спектром Колмогорова индуцирует сверхтекучие вихревые пучки в сверхтекучей жидкости».

Добавим, что правило Фейнмана (14) имеет очевидное «термодинамическое» происхождение, оно применимо для стационарных состояний равновесия. В реальных турбулентных потоках, когда нестабильные течения быстро искажаются, для множества квантованных вихрей может просто не хватить времени, чтобы адаптироваться к быстро меняющемуся нормальному потоку, и сформировать вихревые пучки. Вопрос о переходном поведении квантованной системы вихрей во вращающейся системе отсчета и времени релаксации имеет большое значение для всей теории.

## 5. Заключение

Продемонстрировано построение макроскопической динамики сверхтекучий турбулентности для случая двух важных моделей квантовой турбулентности — модели Вайнена и модели HVBK. Критически проанализирована справедливость данных приближений при построении гидродинамики и указан ряд слабых мест. Важным, однако, является то обстоятельство, что несмотря на некоторую некорректность в построении «крупнозернистой» гидродинамики квантовой турбулентности, выписанные системы уравнений могут быть использованы для прикладных задач (например, нестационарный теплообмен или течение в каналах).

Разумеется, многие важные случаи не исследованы, например, комбинация вращения и противотока [20,51]. Другим примером может быть генерация квантовой турбулентности осциллирующими объектами (см., например, [52–55]). Ясно, однако, что для описания этих других случаев движения необходимо знать статистику вихревого клубка, что является отдельной задачей, примыкающей к построению микроскопической теории квантовой турбулентности.

Работа выполнена в рамках гранта РНФ № 19-19-00321.

---


1. S.K. Nemirovskii and W. Fiszdon, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 37, (1995).
2. I.M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, Benjamin, New York/Amsterdam (1965).
3. S.J. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics*, North-Holland, Amsterdam (1974).
4. С.К. Немировский, *Гидродинамика квантовых жидкостей. Волны, вихри, турбулентность. Часть 1. Безвихревое движение, нелинейная акустика*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2015).
5. R.P. Feynman, *Progress in Low Temperature Physics*, North-Holland, Amsterdam (1955), Vol. 1, p. 17.
6. W.F. Vinen, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A* **242**, 493 (1957).
7. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **31**, 5782 (1985).
8. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988).
9. R.A. Ashton and J.A. Northby, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1714 (1975).
10. S.K. Nemirovskii and V.V. Lebedev, *Sov. Phys. JETP* **57**, 1009 (1983).
11. I.L. Bekarevich and I.M. Khalatnikov, *Sov. Phys. JETP* **13**, 643 (1961).
12. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford (1980), Vol. 5.
13. S.K. Nemirovskii, G. Stamm, and W. Fiszdon, *Phys. Rev. B* **48**, 7338 (1993).
14. K.W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **18**, 245 (1978).
15. K. Yamada, S. Kashiwamura, and K. Miyake, *Physica B* **154**, 318 (1989).
16. J.A. Geurst, *Physica A* **183**, 279 (1992).
17. Sergey K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
18. Karen L. Henderson and Carlo F. Barenghi, *J. Fluid Mech.* **406**, 199 (2000).
19. Darryl D. Holm, *Introduction to HVBK Dynamics*, in: *Quantized Vortex Dynamics*, Springer (2001).
20. D. Jou, M.S. Mongiovi, and M. Sciacca, *Physica D* **240**, 249 (2011).
21. W.F. Vinen, *Phys. Rev. B* **61**, 1410 (2000).
22. William F. Vinen and Russell J. Donnelly, *Phys. Today* **60**, 43 (2007).
23. W.F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **161**, 419 (2010).
24. K.L. Henderson, C.F. Barenghi, and A.J. Chris, *J. Fluid Mech.* **283**, 329 (1995).
25. P.-E. Roche, C.F. Barenghi, and E. Leveque, *Europhys. Lett.* **87**, 54006 (2009).
26. Victor S. L'vov and Anna Pomyalov, *Phys. Rev. B* **97**, 214513 (2018).
27. C.J. Gorter and J.H. Mellink, *Physica* **15**, 285 (1949).
28. J.T. Tough, *Progr. Low Temp. Phys.*, North-Holland, Amsterdam (1982), Vol. 8.

29. W. Fiszdon, M. von Schwerdtner, G. Stamm, and W. Poppe, *J. Fluid Mech.* **212**, 663 (1990).
30. M. Murakami and K. Iwashita, *Comp. & Fluids* **19**, 443 (1991).
31. W. Poppe, G. Stamm, and J. Pakleza, *Physica B* **176**, 247 (1992).
32. A.N. Tsoi and M.O. Lutset, *Inzh. Fiz. Zh.* **51**, 5 (1986).
33. С.К. Немировский, А.Н. Цой, *Письма в ЖЭТФ* (1982).
34. S.K. Nemirovskii, *Sov. Phys. JETP* **64**, 803 (1986).
35. D. Khomenko, L. Kondaurova, V.S. L'vov, P. Mishra, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **91**, 180504 (2015).
36. Satoshi Yui, Kazuya Fujimoto, and Makoto Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015).
37. L. Galantucci, C. Barenghi, M. Sciacca, M. Quadrio, and P. Luchini, *J. Low Temp. Phys.* **162**, 354 (2011).
38. Sergey K. Nemirovskii, *Phys. Rev. B* **97**, 134511 (2018).
39. David C. Samuels, *Phys. Rev. B* **47**, 1107 (1993).
40. C.F. Barenghi, D.C. Samuels, G.H. Bauer, and R.J. Donnelly, *Phys. Fluids* **9**, 2631 (1997).
41. Carlo F. Barenghi and David C. Samuels, *Phys. Rev. B* **60**, 1252 (1999).
42. Demosthenes Kivotides, Carlo F. Barenghi, and Yuri A. Sergeev, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 215302 (2005).
43. Demosthenes Kivotides, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 175301 (2006).
44. Karla Morris, Joel Koplik, and Damian W.I. Rouson, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 015301 (2008).
45. A.W. Baggaley, C.F. Barenghi, A. Shukurov, and Y.A. Sergeev, *Europhys. Lett.* **98**, 26002 (2012).
46. E. Kozik and B. Svistunov, *J. Low Temp. Phys.* **156**, 215 (2009).
47. G.E. Volovik, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **78**, 533 (2003).
48. Miron Kursa, Konrad Bajer, and Tomasz Lipniacki, *Phys. Rev. B* **83**, 014515 (2011).
49. Robert M. Kerr, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 224501 (2011).
50. Demosthenes Kivotides, *J. Fluid Mech.* **668**, 58 (2011).
51. Makoto Tsubota, Carlo F. Barenghi, Tsunehiko Araki, and Akira Mitani, *Phys. Rev. B* **69**, 134515 (2004).
52. V. Chagovets, I. Gritsenko, E. Rudavskii, G. Sheshin, A. Zadorozhko, and B. Verkin, *J. Phys.: Conf. Ser.* **150**, 032014 (2009).
53. E.Ya. Rudavskii, V.K. Chagovets, L. Skrbek, M. Blazhkova, G.A. Sheshin, and A.A. Zadorozhko, *Low Temp. Phys.* **34**, 875 (2008).
54. I. Gritsenko and G. Sheshin, *J. Low Temp. Phys.* **175**, 91 (2014).
55. I.A. Gritsenko, K.A. Klokol, S.S. Sokolov, and G.A. Sheshin, *Low Temp. Phys.* **42**, 21 (2016).


## Макроскопічна динаміка надплинної турбулентності

С.К. Немировський

Обговорюються проблеми гідродинаміки надплинної рідини, яка містить хаотичні клубки квантованих вихрових ниток. Побудова такої гідродинаміки рішучим чином залежить від статистики вихрового клубка. Представлено та прокоментовано побудову гідродинамічних рівнянь в двох важливих випадках. Перший випадок відповідає клубку, який складається з повністю хаотичних вихрових ниток. Такий випадок реалізується у протипоточному гелії, він називається турбулентністю Вайнена. При побудові макроскопічної динаміки система рівнянь замикається рівнянням Вайнена для щільності вихрових ниток. Інший випадок, так званий випадок Холла–Вайнена–Бекаревича–Халатникова, відповідає ситуації, коли в системі є пучки поляризованих вихрових ниток. В цьому випадку система замикається за допомогою співвідношення Фейнмана, що зв'язує щільність вихрових ниток із завихореністю надплинної швидкості. Обговорюються проблеми, які пов'язані із застосуванням обох випадків.

Ключові слова: надплинна турбулентність, квантовані вихрові нитки, макроскопічна динаміка.

## Macroscopic dynamics of superfluid turbulence

S.K. Nemirovskii

The hydrodynamics problems superfluid fluid containing chaotic tangle of quantized vortex filaments are discussed. The construction of such hydrodynamics decisively depends on the statistics of the vortex tangle. The article presents the construction of hydrodynamic equations in two important cases. The first case corresponds to a vortex tangle consisting of completely chaotic vortex filaments. Such a case, which is realized in the counterflowing helium is called as the Vinen turbulence. When constructing macroscopic dynamics, the system of equations of the two-fluid hydrodynamics is closed by the Vinen equation for the vortex line density. Another case, socalled the Hall–Weinen–Bekarevich–Khalatnikov case, corresponds to the situation when there are bundle of polarized vortex filaments in the system. In this case, the system is closed with the use of the Feynman relation connecting the density of vortex lines with the superfluid vorticity. The problems related to the each of these two ways are discussed.

Keywords: superfluid turbulence, quantized vortex filaments, macroscopic dynamics