

Энергетический спектр вихревых петель в He II после реконнекции

В. А. Андрущенко^{1,2}, Л. П. Кондаурова¹

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе Сибирского отделения РАН, Новосибирск, 630090, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: louisa@ngs.ru

Статья поступила в редакцию 9 июня 2020 г., опубликована онлайн 21 августа 2020 г.

Проведено систематическое изучение спектра энергии после реконнектирования вихревых петель при различных значениях температуры жидкости (от температуры, близкой к абсолютному нулю, до температуры $T = 1,9$ К). При каждой температуре варьировались начальные условия: вихревые петли были изначально расположены в плоскостях, угол между которыми изменялся от 0 до $\pi/2$. Для нахождения спектра применялся статистический подход — вычислялась продольная структурная функция скорости второго порядка. Во всех рассмотренных случаях были получены спектры $E(k) \propto (k)^{-3/2}$, характерные для гладкого вихревого кольца.

Ключевые слова: спектр энергии, сверхтекучесть, вихревые линии, квантовая турбулентность, реконнекция.

1. Введение

При температуре ниже температуры $T_\lambda = 2,17$ К жидкий гелий ^4He становится квантовой жидкостью [1]. При указанных температурах исследователи обнаружили множество уникальных свойств этой жидкости. Одно из них — возникновение квантованных вихрей в сверхтекучей компоненте, представляющих одномерные топологические особенности, на которых нарушена сверхтекучесть. Эти вихревые линии имеют радиус ядра $a_0 = 10^{-8}$ см, что сравнимо с межатомным расстоянием. Циркуляция скорости сверхтекучей компоненты является фиксированной величиной $\kappa = h/m$, где h — постоянная Планка, а m — масса атома ^4He . Плотность сверхтекучей компоненты на оси вихря равна нулю. В текущей жидкости в канале вихри представляют собой произвольно ориентированные нити, которые являются замкнутыми или оканчиваются на границе жидкости. Взаимодействие вихрей, которое возникает при их пересечении, согласно Фейнману, описывается моментальной реконнекцией. В результате реконнекции возможно как дробление, так и слияние вихревых петель. Интерес к исследованию динамики и свойств этих вихрей мотивируется несколькими моментами. В частности, одна из мотиваций связана с возможностью моделирования классической турбулентности набором хаотичных вихревых линий [2–4]. Другой мотивацией, например, является то, что в экспериментах наблюдается квазиклассическое поведение распада

вихревого клубка [5–7]. Какие механизмы приводят к такому поведению совокупности вихревых нитей, вихревого клубка, на сегодняшний день вопрос остается открытым. Настоящая работа является продолжением начатых исследований динамики и свойств реконнектирующих вихревых петель в гелии II [8–13]. Цель данного исследования — определение характера энергетического спектра поля скорости, соответствующего движению вихревой петли, образованной после реконнекции двух вихревых петель, при различных температурах и начальных расположениях вихревых колец и движению вихревых петель непосредственно после реконнекции. Численные исследования зависимости характера энергетического спектра от времени проведены при температурах: 0; 1,3; 1,6 и 1,9 К. Для каждой из указанных температур получены зависимости для различных начальных условий, а именно, для вихревых петель, изначально расположенных в плоскостях, угол между которыми составил: 0, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$, $\pi/2$.

2. Метод определения энергетического спектра

Энергетический спектр $E(k)$ описывает распределение кинетической энергии в различных масштабах длины. Для его нахождения применяется статистический подход: рассчитывается продольная структурная функция скорости второго порядка, т. е. момент второго порядка приращения скорости между двумя точками, которые разнесены в пространстве на вектор \mathbf{l} [14–18]:

$$C_{II} = \langle \delta v_{\parallel}(l)^2 \rangle, \quad (1)$$

где

$$\delta v_{\parallel}(l) = [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{l}/l. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение элемента жидкости, \mathbf{v} — его скорость. Под угловыми скобками подразумевается усреднение по всему ансамблю, т. е. по всем возможным парам точек, разделенными расстоянием l , а именно по всем \mathbf{r} , в которых проводилось вычисление скорости. Колмогоров в своей известной работе [15] для однородной изотропной турбулентности в несжимаемой жидкости из размерных соображений получил степенной закон для структурной функции второго порядка:

$$C_{II}(l) \propto \varepsilon^{2/3} (l)^{2/3}, \quad (3)$$

где $\varepsilon = -dE/dt$ — скорость диссипации энергии. Это знаменитый закон «двух третей». В k -пространстве данной зависимости соответствует энергетический спектр:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} (k)^{-5/3}, \quad (4)$$

где $C \sim 1$, $k = 2\pi/l$ — волновое число. Используя преобразование Фурье для перехода в пространство волновых векторов, можно показать, что в общем случае зависимостям типа

$$C_{II}(l) \propto (l)^{\alpha} \quad (5)$$

в пространстве координат соответствуют зависимости

$$E(k) \propto (k)^{-\alpha-1} \quad (6)$$

в пространстве волновых чисел k . Для нахождения структурной функции необходимо вычислить поле скорости, создаваемое вихревыми петлями.

Таким образом, алгоритм определения спектральных характеристик системы сводится к следующему: проводится вычисление конфигурации интересующей вихревой петли, после чего в окружающей области находится поле скорости, соответствующее найденной конфигурации (рис. 1).

Вычисление значений полей скорости проводится в нескольких тысячах (для получения приемлемой точности) точках, выбранных случайным образом из области, занимаемой вихревой конфигурацией и вблизи нее (см. рис. 1). Значения скоростей в указанной области вычисляются согласно уравнению Био–Савара:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3}. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор выбранных точек в жидкости, \mathbf{s} — радиус-вектор вихревых точек петель. Интегрирование ведется по всем петлям (см., например, [10–12]). Объем области, в которой определяется поле скорости,

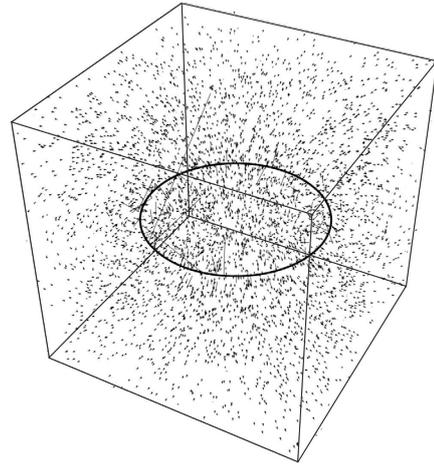


Рис. 1. Пример поля скорости, создаваемого вихревым кольцом.

выбирается в виде куба с ребром в несколько раз большим характерного линейного размера конфигурации вихревых петель. К особенностям вычисления поля скорости для вихревых петель, образованных при реконнекции, следует отнести следующие два обстоятельства. Во-первых, в связи с тем, что вихревая петля перемещается в пространстве, поле скорости вычисляется в некотором не изменяющемся объеме, центр которого совмещается с «центром масс» вихревой петли, т. е. область, в которой вычисляется поле скорости, перемещается вместе с вихревой петлей. Во-вторых, при ненулевой температуре вихревая петля сжимается под действием силы трения о нормальную компоненту сверхтекучего гелия, поэтому характерное поле скорости, связанное с вихревой петлей, также неизбежно изменяется. В связи с этим обстоятельством, для получения более точного результата, вычисленные структурные функции на смежных временных шагах усредняются, при этом смежными шагами считаются те шаги, на которых длина вихревой петли не успевает существенно измениться.

Для найденного таким образом поля скорости согласно (2) находится приращение скорости между точками, которые разнесены в пространстве на различные значения вектора l . Далее определяются средние значения $\delta v_{\parallel}(l)$. Согласно (1), определяются значения $C_{II}(l)$. После чего определяется численное значение показателя α . Зная его значение, по уравнению (6) определяется спектр энергии в k -пространстве.

3. Результаты вычисления энергетического спектра после реконнектирования петель

Динамика вихревой петли после момента реконнекции при различных температурах и начальных расположениях вихревых колец представлена в [12]. Полученные в [12] конфигурации петли использовались для исследования характера энергетического спектра поля скорости в настоящей работе.

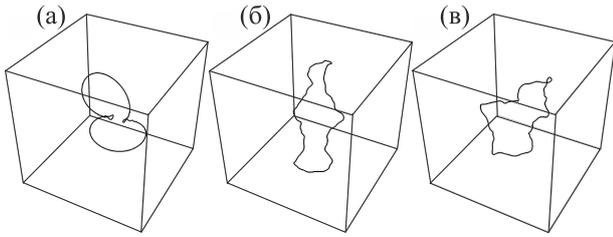


Рис. 2. Пример конфигураций вихревой петли в различные моменты времени, с: 0 (а), $1,5 \cdot 10^{-3}$ (б), $3 \cdot 10^{-3}$ (в). Угол между начальными плоскостями петель равен $\pi/2$. Температура жидкости вблизи абсолютного нуля.

3.1. Температура вблизи абсолютного нуля

При температуре вблизи абсолютного нуля энергия, импульс и момент импульса жидкости, обусловленные наличием вихревой петли, сохраняются, в то время как среднее значение кривизны нити флуктуирует возле некоторой постоянной величины. Это связано с тем, что после момента реконнекции возникают возмущения, которые впоследствии распространяются по движущейся вихревой петле. Некоторые примеры соответствующих вихревых конфигураций приведены на рис. 2. Как видно на рисунке, вихревые петли при своем движении претерпевают существенную деформацию. На рис. 3 приведены полученные зависимости структурных функций от расстояния между точками l , вычисленные для этих конфигураций. Обратим внимание на то, что полученные зависимости очень близки друг к другу, т. е. почти не различаются. При температуре вблизи абсолютного нуля практически отсутствует нормальная компонента гелия II, а следовательно, отсутствует диссипация энергии, связанная с взаимодействием

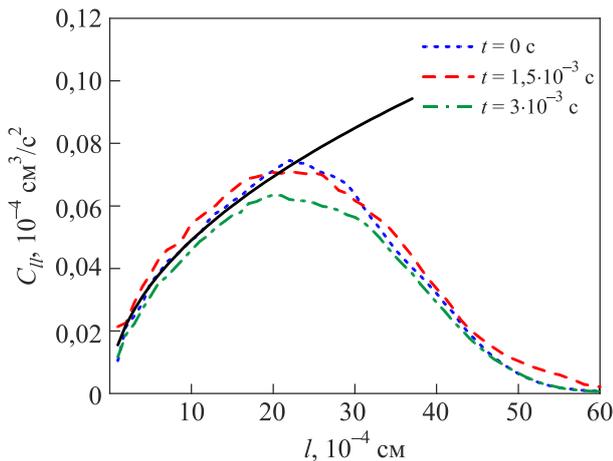


Рис. 3. (Онлайн в цвете) Структурные функции полей скоростей, соответствующих вихревым конфигурациям рис. 2. Черная сплошная линия — аппроксимирующая кривая $C_{ll}(l) \propto l^{1/2}$. В k -пространстве данной зависимости соответствует энергетический спектр: $E(k) \propto (k)^{-3/2}$.

квантованных вихрей с нормальным течением жидкости. В результате кинетическая энергия жидкости сохраняется, что еще раз подтверждается полученными результатами по определению характера поведения структурных функций. Удивительным фактом является то, что форма петли и волны Кельвина на ней не приводят к каким-либо дополнительным перераспределениям энергии по масштабам. Кроме того, следует отметить, что $C_{ll}(l) \propto (l)^{1/2}$ (на рис. 3 проведена аппроксимирующая кривая), это согласуется с энергетическим спектром от гладкого вихревого кольца.

3.2. Температуры вдали от абсолютного нуля

При ненулевой температуре вихревая петля сжимается под действием силы трения о нормальную компоненту сверхтекучего гелия, кроме того, быстро затухают и возникшие при реконнекции возмущения (см. рис. 4). При этом существенно изменяется также и скорость движения петли. Естественно ожидать, что данные факты должны найти отражение в изменении спектральных характеристик соответствующих полей скоростей. На рис. 5 приведены зависимости структурных функций в различные моменты времени движения петли (см. рис. 4). Как можно видеть, кривые в данном случае сильно расслаиваются. С течением времени абсолютные значения функций уменьшаются, что указывает на существование стока энергии. Однако вид структурной функции при этом не изменяется, что проиллюстрировано аппроксимирующими кривыми. При температуре, близкой к абсолютному нулю, это степенные функции с показателем степени $1/2$, что также проиллюстрировано представлением данных рис. 5 на рис. 6 в логарифмических координатах. То есть с течением

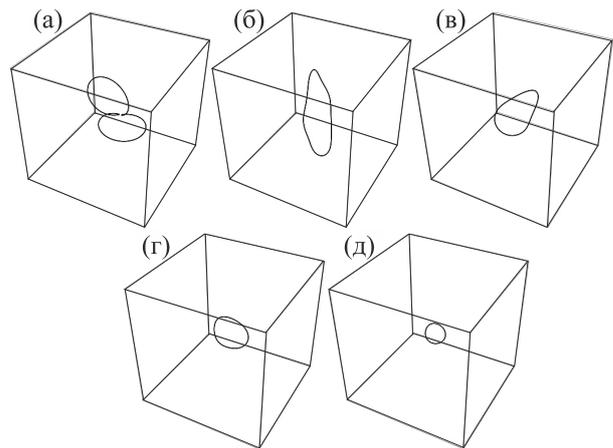


Рис. 4. Конфигурации вихревой петли в различные моменты времени, с: 0 (а), $6 \cdot 10^{-4}$ (б), $1,2 \cdot 10^{-3}$ (в), $1,8 \cdot 10^{-3}$ (г), $2,4 \cdot 10^{-3}$ (д). Угол между начальными плоскостями петель равен $\pi/2$. Температура жидкости 1,9 К.

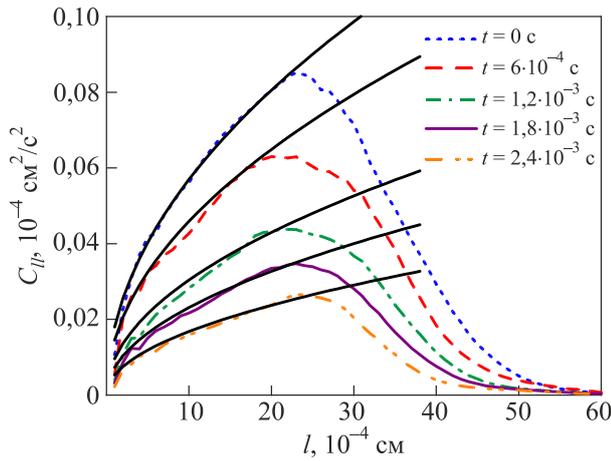


Рис. 5. (Онлайн в цвете) Структурные функции полей скоростей, соответствующих вихревым конфигурациям рис. 4. Черные сплошные линии — аппроксимирующие кривые $C_{ll}(l) \propto l^{1/2}$, в k -пространстве: $E(k) \propto (k)^{-3/2}$.

времени при движении петли не происходит изменение характера спектра энергии, хотя изменяются абсолютные значения $C_{ll}(l)$.

В [12] установлено, что динамика вихревых петель определяется двумя основными факторами: начальными условиями и температурой. Показано, что начальные условия определяют размеры и амплитуды возникших после реконнекции возмущений. Динамика петель изменялась с течением времени. В связи с этим представляло интерес исследование влияния начальных данных на энергетический спектр. На рис. 7 приведены конфигурации петель, соответствующие различным начальным условиям, в один и тот же момент времени непосредственно после реконнектирования при температуре 1,9 К. На рис. 8 представлены полученные расчетные кривые $C_{ll}(l)$ для этих конфигураций

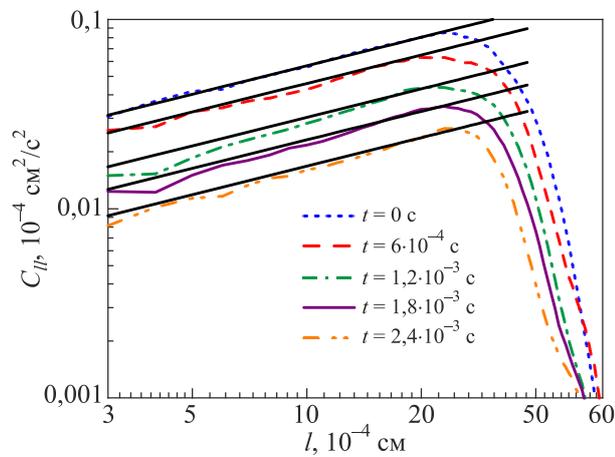


Рис. 6. (Онлайн в цвете) Структурные функции, соответствующие рис. 5, в логарифмических координатах.

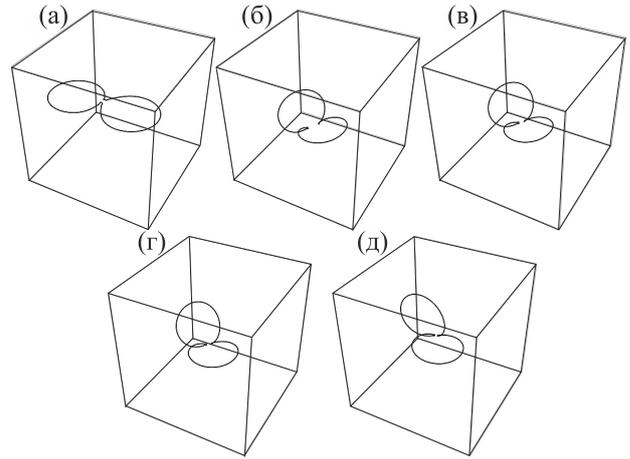


Рис. 7. Конфигураций вихревых петель после реконнекции при различных начальных углах θ между плоскостями петель: (а) $\theta = 0$, (б) $\theta = \pi/6$, (в) $\theta = \pi/4$, (г) $\theta = \pi/3$, (д) $\theta = \pi/2$. Температура жидкости равна 1,9 К, $t = 0$ с.

вихревых петель, как видно, кинетическая энергия жидкости изменяется, однако характер спектра нет. Динамика петель меняется с течением времени, суммарная потеря энергии вследствие действия силы взаимного трения при этом увеличивается. Полученные структурные функции приведены на рис. 9 в момент времени $t = 1,8 \cdot 10^{-3}$ с. Видно, что их численные значения уменьшились, характер же аппроксимирующих кривых остался прежним, т. е. действие силы трения не приводит к каким-либо дополнительным перераспределениям энергии по масштабам.

В работе [12] установлено, что с повышением температуры увеличивается скорость релаксации возникших возмущений. Исследование спектральных харак-

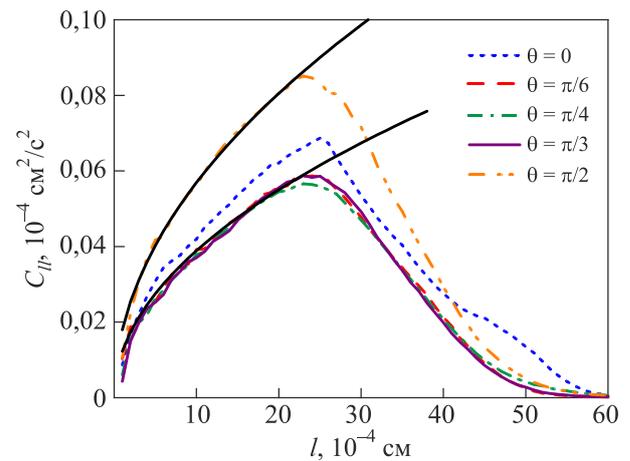


Рис. 8. (Онлайн в цвете) Структурные функции полей скоростей, соответствующих вихревым конфигурациям рис. 7. Черные сплошные линии — аппроксимирующие кривые $C_{ll}(l) \propto l^{1/2}$, в k -пространстве: $E(k) \propto (k)^{-3/2}$.

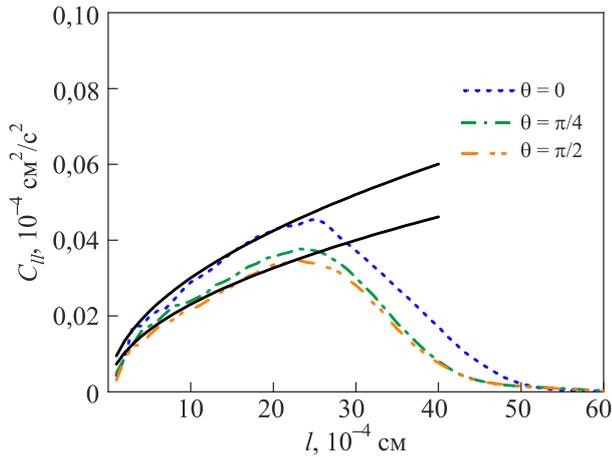


Рис. 9. (Онлайн в цвете) Структурные функции полей скоростей петель после реконнекции при различных начальных углах θ между плоскостями петель. Температура жидкости $T = 1,9$ К, $t = 1,8 \cdot 10^{-3}$ с. Черные сплошные линии — аппроксимирующие кривые $C_{ll}(l) \propto l^{1/2}$, в k -пространстве: $E(k) \propto (k)^{-3/2}$.

теристик полей скоростей для вихревых петель после осуществления реконнекции при различных температурах также дает степенной вид структурных функций с показателем степени $1/2$ и различающейся амплитудой. На рис. 10 приведены структурные функции полей скоростей в момент времени непосредственно после реконнекции, на рис. 11 — спустя время $t = 1,8 \cdot 10^{-3}$ с. Видно, что с течением времени кривые все больше расслаиваются, а затухание энергии происходит быстрее при более высоких температурах, при этом вид структурных функций не изменяется. Значение показателя степени остается равным $1/2$.

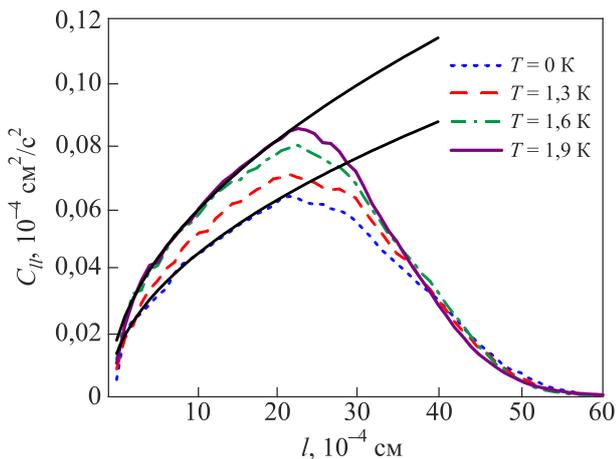


Рис. 10. (Онлайн в цвете) Структурные функции полей скоростей для вихревых петель при различных температурах. Угол между начальными плоскостями петель равен $\theta = \pi/2$, $t = 0$ с. Черные сплошные линии — аппроксимирующие кривые $C_{ll}(l) \propto l^{1/2}$, в k -пространстве: $E(k) \propto (k)^{-3/2}$.

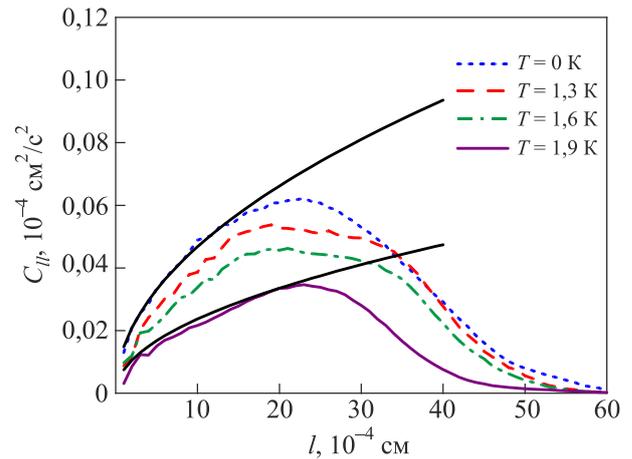


Рис. 11. (Онлайн в цвете) Структурные функции полей скоростей для вихревых петель при различных температурах. Угол между начальными плоскостями петель равен $\theta = \pi/2$, $t = 1,8 \cdot 10^{-3}$ с. Черные сплошные линии — аппроксимирующие кривые $C_{ll}(l) \propto l^{1/2}$, в k -пространстве: $E(k) \propto (k)^{-3/2}$.

4. Заключение

В результате проведенного систематического изучения установлено, что структурные функции второго порядка имеют одинаковый вид для различных температур и начальных данных и соответствуют спектру $E(k) \propto (k)^{-3/2}$. Амплитуда структурных функций несколько отличается, что соответствует наличию различных возмущений, возникающих на вихревых петлях при реконнекциях. При ненулевой температуре с течением времени амплитуда структурных функций уменьшается, причем тем быстрее, чем больше температура, что связано с более интенсивной диссипацией энергии. При нулевой температуре спектральные характеристики вихревых петель не изменяются вследствие отсутствия диссипации энергии. Во всех рассмотренных случаях были получены спектры $E(k) \propto (k)^{-3/2}$, характерные для гладкого вихревого кольца. Таким образом, механизм распада вихревых петель аналогичен механизму распада одиночных гладких вихревых колец, с той лишь разницей, что возникшие при реконнекции возмущения из-за более интенсивного взаимодействия с нормальной компонентой гелия могут несколько ускорять этот процесс.

Численные исследования спектра энергии выполнены за счет поддержки гранта РФФИ проект №:18-08-00576а, в рамках государственного задания $E(k) \propto (k)^{-3/2}$ ИТ СО РАН (AAAA-Ф17-117022850027-5) проведен анализ полученных результатов.

1. A. F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, Oxford (2004).
2. A. J. Chorin, *Vorticity and Turbulence, Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York (1994).

3. U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
4. S. K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
5. M. R. Smith, R. J. Donnelly, N. Goldenfeld, and W. F. Vinen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2583 (1993).
6. S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4831 (1999).
7. L. Skrbek, A. V. Gordeev, and F. Soukup, *Phys. Rev. E* **67**, 047302 (2003).
8. V. A. Andryushchenko, L. P. Kondaurova, and S. K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **185**, 377 (2016).
9. В. А. Андриященко, Л. П. Кондаурова, *ФНТ* **43**, 245 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 200 (2017)].
10. V. A. Andryushchenko, L. P. Kondaurova, and S. K. Nemirovskii, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 523 (2017).
11. В. А. Андриященко, Л. П. Кондаурова, *ФНТ* **44**, 1302 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 1020 (2018)].
12. В. А. Андриященко, Л. П. Кондаурова, *ФНТ* **45**, 1053 (2019) [*Low Temp. Phys.* **45**, 901 (2019)].
13. V. A. Andryushchenko and L. P. Kondaurova, *J. Phys. Conf. Ser.* **1382**, 012001 (2019).
14. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge (1975), Pt. 2.
15. А. Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **30**(4), 299 (1941).
16. А. Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **32**(1), 19 (1941).
17. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon, New York (1987).
18. M. Lesieur, *Turbulence in fluids. Fluid mechanics and its applications*, Springer, Dordrecht (1997).

Енергетичний спектр вихрових петель у He II після реконнекції

В. А. Андриященко, Л. П. Кондаурова

Проведено систематичне вивчення спектру енергії після реконнекції вихрових петель при різних значеннях температури рідини (від температури, близької до абсолютного нуля, до температури $T = 1,9$ К). При кожній температурі початкові умови змінювалися: вихрові петлі було спочатку розташовано в площинах, кут між якими змінювався від 0 до $\pi/2$. Для знаходження спектру використовувався статистичний підхід, тобто було обчислено поздовжню структурну функцію швидкості другого порядку. В усіх розглянутих випадках отримано спектри, характерні для гладкого вихрового кільця $E(k) \propto k^{-3/2}$.

Ключові слова: спектр енергії, надтекучість, вихрові лінії, квантова турбулентність, реконнекція.

The energy spectrum of reconnected vortex loops in He II

V. A. Andryushchenko and L. P. Kondaurova

A systematic study of the energy spectrum after reconnection of vortex loops was made at various values of the liquid temperature (from a temperature close to absolute zero to a temperature of $T = 1.9$ K). At each temperature, the initial conditions varied, namely, the vortex loops were initially located in planes, the angle between which varied from 0 to $\pi/2$. To find the spectrum, a statistical approach was used, i.e., the second-order longitudinal structural function of velocity was calculated. In all cases considered, the spectra were obtained $E(k) \propto k^{-3/2}$ that are characteristic of a smooth vortex ring.

Keywords: the energy spectrum, superfluidity, vortex lines, quantum turbulence, reconnection.