

Структура и коллективные колебания электронных систем, состоящих из нескольких цепочек

В. Е. Сивоконь, Е. С. Соколова, С. С. Соколов

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина Национальной академии наук Украины
Харьков, 61103, Украина
E-mail: sivokon@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 25 мая 2020 г., опубликована онлайн 21 августа 2020 г.

Проведено исследование коллективных свойств систем поверхностных электронов, состоящих из нескольких линий зарядов. При моделировании системы с помощью фурье-анализа средних координат частиц вдоль и поперек линий найдены характерные частоты колебаний в системе. Значения частот сопоставлены с теоретически полученными законами дисперсии плазменных мод, рассчитанными методом уравнений движения для малых смещений электронов из положения равновесия. Законы дисперсии коллективных колебаний вычислены для двух-, трех- и четырехцепочечных систем электронов, причем в последнем случае рассмотрены конфигурации как с одинаковыми, так и разными расстояниями между линиями зарядов. Наблюдается хорошее согласие результатов метода моделирования со значениями частот, следующими из законов дисперсии.

Ключевые слова: дисперсия плазменных колебаний, низкоразмерные электронные системы, поверхностные электроны.

Введение

Вопрос о структуре электронных систем пониженной пространственной размерности вызывает большой интерес, обусловленный тем обстоятельством, что дальнедействующее кулоновское взаимодействие зарядов является трехмерным, тогда как количество степеней свободы поступательного движения частиц s равно 2 или 1. Случай $s = 1$ является особенно интересным, так как для образования одномерной или квазиодномерной системы зарядов необходимо поместить электроны в удерживающий потенциал, действующий поперек их линии, что приводит к уменьшению эффективной толщины слоя зарядов с возможностью формирования системы электронов, состоящей из всего нескольких (или даже одной) линий.

Наиболее известным примером такого рода систем являются поверхностные электроны над жидким гелием, отличающиеся как низкой плотностью зарядов, так и отсутствием примесей и наличием двух типов рассеяния (на атомах гелия в паровой фазе и квантованных капиллярных поверхностных волнах — риплонах), эффективность которых резко падает с понижением температуры. В этих условиях соотношение кулоновской энергии взаимодействия электронов и кинетиче-

ской энергии их движения можно изменять в широких пределах. Это позволяет изучать как переход системы в кристаллическое состояние (так называемый вигнеровский кристалл) двумерного типа, так и свойства упорядоченного (квазиупорядоченного) состояния в резко асимметричной системе зарядов, когда ширина системы оказывается значительно меньше ее длины.

При экспериментальном исследовании систем поверхностных электронов наряду с их транспортными и резонансными свойствами привлекают внимание их коллективные плазменные колебания, законы дисперсии которых сильно зависят и от размерности системы, и от ее фазового состояния и структуры. Трудности экспериментального исследования таких систем стимулируют численные эксперименты, которые моделируют изменение структуры системы под воздействием внешних факторов. В настоящей работе целью такого моделирования является исследование последовательности возникновения конфигураций системы электронов и формирование конечного числа линий зарядов. Эти исследования сопровождаются теоретическими расчетами законов дисперсии плазменных мод, которые могут распространяться при различных структурах системы.

2. Моделирование системы

Как отмечалось выше, экспериментальные исследования систем, которые являются объектом интереса в настоящей работе, сопряжены с серьезными трудностями ввиду малого числа частиц и, соответственно, малой величины измерительных сигналов, хотя, разумеется, такие исследования проводятся [1]. Имеются также трудности с интерпретацией результатов измерений из-за сложности измерительных схем и недостаточно полного контроля всех параметров эксперимента.

Для более полного понимания процессов, происходящих в системах с небольшим числом частиц, очень полезными оказываются методы компьютерных экспериментов, в которых с использованием простых принципов, положенных в основу расчетов, удается проследить за поведением каждой частицы и, в итоге, проанализировать возможные структуры, возникающие в системе частиц, условия их возникновения и характерные параметры, необходимые для планирования физических экспериментов и анализа их результатов, а также для разработки теоретических моделей, описывающих те или иные аспекты свойств низкоразмерных электронных систем.

В настоящей работе методами молекулярной динамики исследуются системы, состоящие из частиц (электронов), локализованных в плоскости и взаимодействующих посредством кулоновского взаимодействия. Имеется в виду экспериментально реализуемая система электронов над поверхностью сверхтекучего гелия, и при моделировании выбраны условия, максимально приближенные к условиям реального эксперимента, так что результаты компьютерных расчетов могут быть достаточно обоснованно сопоставлены с результатами физических экспериментов с поверхностными электронами.

Рассматривается система, состоящая из N_e электронов (в большинстве расчетов $N_e = 100$), взаимодействующих по закону Кулона и расположенных в ограниченной области двумерного пространства. Ограничение движения электронов, как и в реальном физическом эксперименте, реализуется с помощью плоского положительно заряженного электрода (прижимающего электрода), который обеспечивает компенсацию отталкивания между электронами. Плоскость, в которой расположены электроны, находится на расстоянии $d = 10^{-5}$ см от электрода. Предполагается, что положительный заряд прижимающего электрода по абсолютной величине равен суммарному заряду электронов.

Цель моделирования — проследить, как изменяются пространственные координаты и скорости электронов с течением времени, найти стационарные состояния электронной системы и исследовать их эволюцию при изменении внешних условий — температуры и геометрии прижимающего электрода.

Начальная конфигурация электронной системы с выбранной поверхностной плотностью электронов $n_s = 10^8 \text{ см}^{-2}$ характеризуется в момент времени $t = 0$ набором случайных координат $\mathbf{r}_i(t = 0)$, $i = 1, 2, \dots, N_e$, частиц над прямоугольным электродом длиной L и шириной M и случайным распределением их скоростей $\mathbf{v}_i(t = 0)$ в некотором выбранном интервале при условии, что суммарная кинетическая энергия электронов соответствует выбранной температуре T системы:

$$\frac{m_e}{2} \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{v}_i^2 = N_e T, \quad (1)$$

где m_e — масса электрона. При исследовании упорядоченных электронных систем, которые являются предметом настоящей работы, выбрана температура $T = 0,01$ К, что значительно ниже температуры плавления $T = 0,22$ К массивного двумерного электронного кристалла с поверхностной плотностью $n_s = 10^8 \text{ см}^{-2}$. Дополнительное ограничение движения в плоскости, создаваемое внешним потенциалом, которое необходимо для создания одно-, двух-, трех- и так далее цепочечных структур, приводит к повышению температуры разупорядочения таких систем [2].

Для изучения эволюции системы, т. е. для определения того, как изменяются координаты и скорости электронов с течением времени, пошагово решается линеаризованная система уравнений движения:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{v}_i \Delta t + \frac{\mathbf{f}_i(t)}{2m_e} (\Delta t)^2, \\ \mathbf{v}_i(t + \Delta t) &= \mathbf{v}_i(t) + \frac{\mathbf{f}_i(t)}{m_e} \Delta t, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{f}_i(t)$ — сила, действующая на i -электрон в момент времени t . Величина шага по времени Δt выбирается из условия, чтобы смещение частицы на одном шаге не превышало 0,01 (в некоторых случаях даже 0,001) среднего расстояния между частицами. Обычно упорядочение частиц происходит примерно за 10^4 шагов, но при расчете использовано как минимум 10^5 шагов для того, чтобы быть уверенным, что система достигла стационарного состояния (имеется в виду неизменность среднего пространственного положения каждой частицы и неизменность распределения скоростей). На каждом шаге проверяется условие (1), и, при необходимости, скорости корректируются умножением на один и тот же множитель. Предполагалось, что система находится в идеальном тепловом контакте с термостатом и сохраняет равновесное распределение скоростей.

Сила, действующая на электрон в плоскости слоя, описывается выражением

$$\mathbf{f}_i = e^2 \sum_{j \neq i}^N \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} + \mathbf{F}_i^{(L)}, \quad (3)$$

где e — заряд электрона, а $F_i^{(\perp)}$ — сила, обусловленная влиянием прижимающего электрода, формирующего поле, которое удерживает электроны в определенной области пространства. Аналитическое выражение этой силы для электрода прямоугольной формы приведено в работе [3].

Ранее проводились исследования систем электронов в узких каналах [2], в которых определялись структуры, образующиеся при тех или иных условиях, а также наблюдались структурные переходы при изменении геометрических размеров и переходы разупорядочения при изменении температуры. На основании этих исследований были найдены условия существования устойчивых конфигураций из 3 и 4 линий электронов, а также специфической конфигурации 2+2 (двойной зигзаг). Конфигурация 2+2 впервые была обнаружена при моделировании электронных систем в ограничивающем потенциале [4].

Кроме структурных исследований, моделирование методом молекулярной динамики позволяет получить информацию о коллективных движениях в системе. Эта информация содержится во временных зависимостях средних координат частиц, как вдоль (x -координата), так и поперек цепочек (y -координата). Фурье-анализ этих величин позволяет оценить характерные частоты колебаний в системе. Ранее этот метод был использован для исследования колебаний в одномерных цепочках и в зигзаге [5]. Сравнение модельных частот колебаний с теоретически рассчитанными частотами показал согласованность двух подходов. Аналогичный анализ проводится и в настоящей работе, но для конфигураций системы не только из двух, но и большего количества линий электронов.

3. Дисперсия коллективных мод в низкоразмерной системе электронов

Специфика закона дисперсии коллективных плазменных колебаний в заряженных системах пониженной пространственной размерности определяется дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия частиц. В результате закон дисперсии отличается от линейной зависимости частоты колебаний ω_q от волнового числа q . Так, в двумерном слое зарядов закон дисперсии является голдстоуновским и имеет вид (см., например, [6])

$$\omega_q^2 = \frac{2\pi n_s e^2}{m_e} q. \quad (4)$$

Такая зависимость сохраняется в длинноволновом пределе для продольных колебаний в кристаллической фазе, возникающей в системе электронов и образующей треугольную решетку. Поскольку поверхностные электроны, образующие вигнеровский кристалл над жидким гелием, взаимодействуют с колебаниями поверхности гелия (электрон-риплонное взаимодействие), возникает

прогиб поверхности (лунка) под каждым из зарядов, что ведет к возникновению связанных электрон-риплонных колебаний в сложной решетке электроны–лунки. Однако и в этом случае закон дисперсии продольных низкочастотных колебаний по-прежнему описывается (4), приобретая зависимость от эффективной массы, обусловленной локализацией заряда в лунке [6].

Для одномерной цепочки зарядов с кулоновским взаимодействием закон дисперсии плазменных колебаний, полученный в квазикристаллическом приближении [7, 8]

$$\omega_{\parallel}^2(q_x) = \omega_{\text{Coul}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos nq_x a)}{n^3}, \quad \omega_{\text{Coul}}^2 = \frac{4e^2}{m_e a^3}, \quad (5)$$

становится почти линейным в длинноволновом пределе $|q_x a| \ll 1$:

$$\omega_{\parallel}^2 \approx \frac{\omega_{\text{Coul}}^2}{2} (q_x a)^2 \ln \frac{1}{|q_x a|}, \quad (6)$$

где a — среднее межчастичное расстояние вдоль цепочки зарядов (предполагается, что эта цепочка ориентирована вдоль оси x). Выражение для закона дисперсии, полученное в приближении случайных фаз, почти совпадает с (6) с той разницей, что место a в аргументе логарифма занимает характерный масштаб локализации электрона y_0 поперек линии зарядов [9–16].

Помимо ветви (5) имеется еще мода поперечных плазменных колебаний

$$\omega_{\perp}^2 \approx \omega_0^2 - \frac{\omega_{\parallel}^2}{2}, \quad (7)$$

обусловленная колебаниями частиц поперек цепочки зарядов. Из (7) видно, что квадрат частоты поперечной моды становится отрицательным, а сама цепочка, следовательно, неустойчивой без стабилизирующего действия внешнего потенциала $m_e \omega_0^2 y^2 / 2$, приложенного поперек линии зарядов, который в гармоническом приближении характеризуется частотой ω_0 . Наличие такого потенциала позволяет добиться положительности квадрата частоты моды и, тем самым, стабилизации системы.

Ситуация значительно усложняется, если имеется не одна, а несколько цепочек электронов, поскольку кулоновское взаимодействие между зарядами, находящимися в различных цепочках, приводит к сильному отличию закона дисперсии коллективных мод от зависимостей (5)–(7). В работах [3] и [17] такие законы дисперсии были получены для двух и трех цепочек соответственно. Между тем, при изменении «поперечного» потенциала могут возникать конфигурации и с большим числом цепочек. Структура закона дисперсии в этом случае особенно интересна, поскольку закон дисперсии является характерным признаком конфигурации, и его экспериментальное определение представляется важным инструментом для определения коли-

чества электронных цепочек в системе в условиях реального физического эксперимента.

В настоящей работе проведены вычисления закона дисперсии коллективных мод, исходя из выражения для потенциальной энергии кулоновского взаимодействия электронов, находящихся в различных цепочках, число которых равно N , записанной в гармоническом приближении с точностью до квадратичных членов разложения по малым смещениям частиц из равновесных положений. Также определен закон дисперсии плазменных колебаний для $N = 2, 3$ и 4 . При этом в случае $N = 4$ рассмотрены две вышеупомянутые конфигурации — с одинаковыми и различными расстояниями между цепочками, возникающими в процессе эволюции системы.

4. Законы дисперсии плазменных мод и моделирования системы

Как следует из проведенного моделирования, электронная система состоит из N цепочек, вдоль каждой из которых электроны располагаются на расстоянии a один от другого. Такая регулярность в расположении зарядов позволяет применить метод уравнений движения для малых смещений относительно положения равновесия в квазикристаллическом приближении, аналогично [3, 7, 8, 17]. Предполагаем цепочки зарядов $n = 1, 2, \dots, N$, расположенными вдоль оси x , а ось y — направленной перпендикулярно цепочкам. Обозначим равновесные координаты i -электрона в n цепочке как $\{x_{ni}, y_{ni}\}$, а смещения частицы из положения равновесия вдоль и поперек цепочек как ξ_{ni} и η_{ni} соответственно. Разлагая энергии парных кулоновских взаимодействия с точностью до квадратичных членов по смещениям, получаем следующее выражение для функции Лагранжа электронной системы:

$$\begin{aligned}
 L_e = & \frac{m_e}{2} \sum_{n=1}^N \sum_i (\dot{\xi}_{ni}^2 + \dot{\eta}_{ni}^2 - \omega_{0n}^2 \eta_{ni}^2) - \\
 & - \frac{e^2}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{j \neq i} \left[\frac{(\xi_{ni} - \xi_{nj})^2}{|x_{ni} - x_{nj}|^3} - \frac{(\eta_{ni} - \eta_{nj})^2}{2|x_{ni} - x_{nj}|^3} \right] - \\
 & - \frac{e^2}{4} \sum_{n, n'=1}^N \sum_{i, j} \left\{ \frac{[2(x_{ni} - x_{n'j})^2 - (y_{ni} - y_{n'j})^2]}{[(x_{ni} - x_{n'j})^2 + (y_{ni} - y_{n'j})^2]^{5/2}} (\xi_{ni} - \xi_{n'j})^2 - \right. \\
 & - \frac{[(x_{ni} - x_{n'j})^2 - 2(y_{ni} - y_{n'j})^2]}{[(x_{ni} - x_{n'j})^2 + (y_{ni} - y_{n'j})^2]^{5/2}} (\eta_{ni} - \eta_{n'j})^2 + \\
 & \left. + \frac{6(x_{ni} - x_{n'j})(y_{ni} - y_{n'j})(\xi_{ni} - \xi_{n'j})(\eta_{ni} - \eta_{n'j})}{[(x_{ni} - x_{n'j})^2 + (y_{ni} - y_{n'j})^2]^{5/2}} \right\}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

При записи (8) учтено наличие потенциала, действующего на электроны вдоль оси y , который предполагается квадратичным с характерными частотами ω_{0n} для каждой из цепочек n . Первый член в квадратных

скобках в (8) описывает вклад взаимодействия электронов внутри каждой из цепочек, остальные отвечают взаимодействию электронов различных цепочек. Выражение (8) отличается от использованного в работах [3, 17] наличием последнего члена в сумме, связывающего смещения вдоль и поперек цепочек. Заметим, что с увеличением расстояния между электронами вдоль оси x при фиксированном $y_{ni} - y_{n'j}$ этот член убывает $\sim (x_{ni} - x_{n'j})^{-4}$, то есть быстрее, чем предыдущие члены в (8), которые убывают $\sim (x_{ni} - x_{n'j})^{-3}$. Поэтому при суммировании в (8) соответствующий вклад оказывается малым по сравнению с вкладом от остальных слагаемых, если процесс суммирования распространен на большое количество слагаемых, что происходит при длинноволновых колебаниях. Именно поэтому последний член в (8) был опущен в [3, 17], где основное внимание уделялось как раз длинноволновым колебаниям, хотя использованное в этих работах выражение для функции Лагранжа и было формально применено к колебаниям с произвольной длиной волны в широком интервале волнового числа q_x .

Дальнейшая процедура вычислений аналогична той, что была использована в [3, 17], и состоит в фурье-преобразовании уравнений движения [которые записаны с учетом (8)] относительно ξ_{ni} и η_{ni} :

$$\xi_{ni} = \sum_{q_x} \xi_{nq_x} \exp(iq_x x_{ni}), \quad \eta_{nq_x} = \sum_{q_x} \eta_{ni} \exp(iq_x x_{ni}). \quad (9)$$

После преобразования (9) система уравнений для смещений ξ_{ni} и η_{ni} превращается в систему линейных уравнений относительно ξ_{nq_x} и η_{nq_x} . Закон дисперсии коллективных мод является корнем уравнения совместности этой системы и существенно зависит от количества цепочек зарядов. Аналитическое решение дисперсионного уравнения для $N = 2$ в длинноволновом пределе возможно, когда дисперсионное уравнение четвертой степени для квадратов частот четырех ветвей спектра колебаний распадается на два уравнения второй степени, корни которых можно трактовать как соответствующие двум продольным и двум поперечным модам. В общем случае при произвольном значении волнового числа $0 < |q_x| < \pi/a$ разделение ветвей колебаний на продольные и поперечные невозможно. Для $N = 3$ и $N = 4$ получаем уравнения шестой и восьмой степени относительно частоты колебаний, которые даже в длинноволновом пределе могут быть решены только численно. В дальнейшем мы применяем численные методы для решения дисперсионных уравнений при всех рассмотренных нами случаях, включая $N = 2$, когда полученное численное решение совпадает с аналитическим.

4.1. Две цепочки электронов

На рис. 1(а) и 1(б) показана пространственная структура, которую образуют $N_e = 100$ электронов над электродом шириной $M = 2, 0 \cdot 10^{-4}$ см. Поскольку средняя поверхностная плотность электронов фиксирована и

составляет $n_s = 10^8 \text{ см}^{-2}$, то длину электрода следует выбрать равной $L = N_e / Mn_s$. Видно, что электроны образуют хорошо упорядоченную структуру. Масштаб по координатам x и y на рис. 1(а) различен, а на рис. 1(б) показана центральная часть структуры в одинаковом масштабе. Удерживающий потенциал U_y в направлении y , рассчитанный с использованием (7), а также при интегрировании (3), показан на рис. 1(в).

Величинами, характеризующими коллективное поведение системы электронов, являются средние координаты электронов, рассчитанные с использованием (7), а также при интегрировании (3), показан на рис. 1(г).

Величинами, характеризующими коллективное поведение системы электронов, являются средние координаты электронов, рассчитанные с использованием (7), а также при интегрировании (3), показан на рис. 1(г).

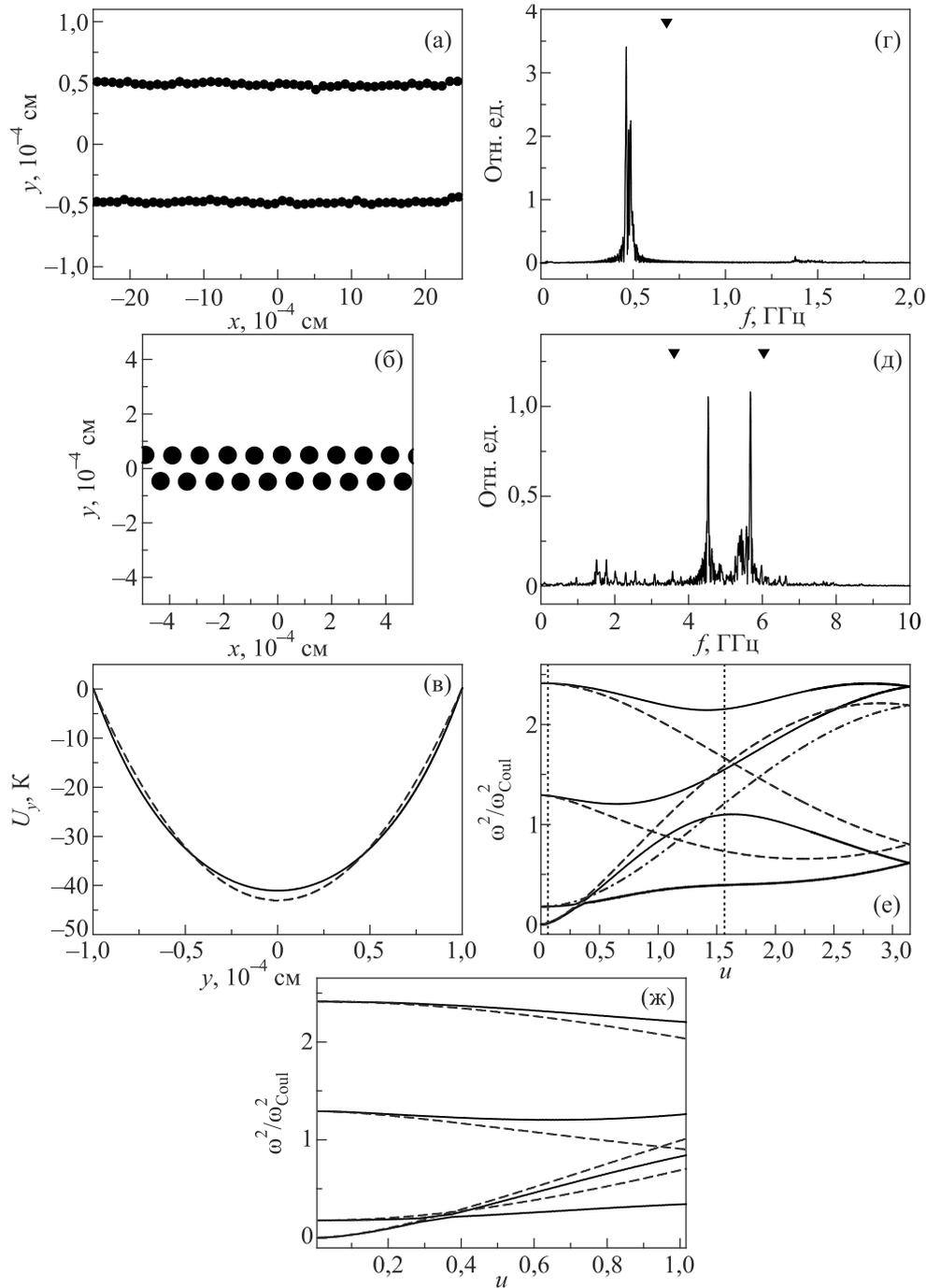


Рис. 1. Структура и законы дисперсии плазменных мод электронной системы, состоящей из двух линий зарядов: (а) структура системы в различном и (б) одинаковом масштабах вдоль осей x и y , ориентированных вдоль и поперек линий частиц; (в) потенциал, удерживающий частицы поперек их линий: точный расчет путем интегрирования (3) для сил, действующих на электрон — сплошная линия, параболическое приближение — пунктирная линия; результаты фурье-анализа средних значений (г) x -координат и (д) y -координат электронов; (е) закон дисперсии коллективных колебаний, рассчитанный с учетом функции Лагранжа (8) — сплошная линия, и в пренебрежении последним членом в (8) — пунктирная линия: в пределах первой зоны Бриллюэна и (ж) при малых значениях $u = |q_x a|$. Вертикальные пунктирные линии соответствуют волновым числам, для которых соответствующие значения частот сопоставляются с результатами фурье-анализа для средних значений координат электронов вдоль осей x (слева) и y (справа).

динаты $x_{\text{mean}}(t) = \sum_{i=1}^{N_e} x_i(t) / N_e$ и $y_{\text{mean}}(t) = \sum_{i=1}^{N_e} y_i(t) / N_e$.

Средние координаты частиц в процессе расчета колеблются с некоторыми частотами, причем период этих колебаний больше (обычно в несколько раз) вычислительного шага Δt , что говорит о том, что они отражают физические процессы в системе. Результаты фурье-анализа $x_{\text{mean}}(t)$ и $y_{\text{mean}}(t)$ приведены на рис. 1(г) и 1(д) соответственно. Частоты колебаний, определенные при численном решении дисперсионного уравнения, на рис. 1(г) и 1(д) показаны треугольниками. Хорошо видно, что в системе возбуждаются колебания лишь на нескольких выделенных частотах. Проводя фурье-анализ с использованием нескольких последовательных временных интервалов, обнаружено, что относительные вероятности тех или иных колебаний могут изменяться со временем, но колебания проявляются на одних и тех же частотах.

В случае $N = 2$ [рис. 1(а)] в (8) следует положить $|y_{1i} - y_{2j}| = (\sqrt{3}/2)a$. Записывая уравнения движения и вводя обозначения

$$F_{\text{line}}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos nu)}{n^3},$$

$$F_{1l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{8} \right]}{\left(n^2 - n + 1 \right)^{5/2}} = 0,0889\dots,$$

$$F_{2l}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\left(n - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{8} \right] \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) u \right]}{\left(n^2 - n + 1 \right)^{5/2}},$$

$$F_{1r} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{3}{2} - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right]}{\left(n^2 - n + 1 \right)^{5/2}} = 0,5599\dots,$$

$$F_{2r}(u) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\frac{3}{2} - \left(n - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) u \right]}{\left(n^2 - n + 1 \right)^{5/2}},$$

$$F_{12}(u) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n - \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) u \right]}{\left(n^2 - n + 1 \right)^{5/2}},$$

где $u = |q_x a|$, получаем следующее дисперсионное уравнение, записанное в терминах $z = \omega^2(q_x) / \omega_{\text{Coul}}^2$:

$$\begin{aligned} & (z - z_1^{(0)})(z - z_2^{(0)})(z - z_3^{(0)})(z - z_4^{(0)}) - \\ & - 2F_{12}^2(u) \left[\left(z - \frac{z_1^{(0)} + z_2^{(0)}}{2} \right) \left(z - \frac{z_3^{(0)} + z_4^{(0)}}{2} \right) - \right. \\ & \left. - F_{2l}(u)F_{2r}(u) \right] + F_{12}^4(u) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$z_1^{(0)} = F_{1l} + F_{\text{line}}(u) + F_{2l}(u), \quad z_2^{(0)} = F_{1l} + F_{\text{line}}(u) - F_{2l}(u),$$

$$z_3^{(0)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{Coul}}^2} + F_{1r} - \frac{F_{\text{line}}(u)}{2} + F_{2r}(u),$$

$$z_4^{(0)} = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{Coul}}^2} + F_{1r} - \frac{F_{\text{line}}(u)}{2} - F_{2r}(u)$$

и, как и в [3, 17], полагаем $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$. При использовании модели поверхностных электронов, локализованных в проводящем канале с радиусом кривизны R , созданном благодаря искривлению формы поверхности гелия капиллярными силами, в качестве ω_0 следует взять $\omega_0 = [eE_{\perp} / (m_e R)]^{1/2}$, E_{\perp} — прижимающее электрическое поле, ориентированное перпендикулярно поверхности жидкости [18].

Решения дисперсионного уравнения (10) приведены на рис. 1(е) и 1(ж). Видно, что закон дисперсии коллективных колебаний имеет четыре ветви, причем одна из них — голдстоуновская, а три — оптические. Полагая в (10) $u = 0$ и учитывая, что в этом пределе $F_{\text{line}}(0) = F_{12}(0) = 0$, $F_{2l}(0) = F_{1l}$, $F_{2r}(0) = F_{1r}$, получаем, что

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 2F_{1l} = 0,1777,$$

$$z_3(0) = \omega_0^2 / \omega_{\text{Coul}}^2 = 1,5625,$$

$$z_4(0) = \omega_0^2 / \omega_{\text{Coul}}^2 + 2F_{1r} = 2,6823$$

в согласии с результатами численных вычислений.

На рис. 1(е) результаты (сплошные линии) приведены вместе с законами дисперсии, полученными в [3] в пренебрежении последним слагаемым в (8) (пунктирные линии), когда в (10) следует положить $F_{12}(u) = 0$. Видно, что результаты настоящей работы очень близки к результатам [3] при $u = |q_x a| \leq 1$ [рис. 1(ж)]. Однако при больших $|q_x a|$ имеется различие вплоть до $u = |q_x a| = \pi$, соответствующего границе зоны Бриллюэна. В случае $u = \pi$ имеем $F_{2l}(\pi) = F_{2r}(\pi) = 0$ и уравнение (10) превращается в уравнение второй степени относительно z :

$$(z - z_{12}^{(0)})(z - z_{34}^{(0)}) - F_{12}^2(\pi) = 0, \quad (11)$$

где $z_{12}^{(0)} = z_1^{(0)} = z_2^{(0)}$, $z_{34}^{(0)} = z_3^{(0)} = z_4^{(0)}$. Два корня уравнения (11) равны

$$z_{12} = \frac{z_{12}^{(0)} + z_{34}^{(0)}}{2} + \sqrt{\frac{(z_{12}^{(0)} - z_{34}^{(0)})^2}{4} + F_{12}^2(\pi)} \approx 2,4130,$$

$$z_{34} = \frac{z_{12}^{(0)} + z_{34}^{(0)}}{2} - \sqrt{\frac{(z_{12}^{(0)} - z_{34}^{(0)})^2}{4} + F_{12}^2(\pi)} \approx 0,8501$$

в согласии с численными результатами на рис. 1(е), на котором видно, что при $u = \pi$ четыре решения (10) вырождаются в два.

4.2. Три цепочки электронов

На рис. 2(а) и 2(б) показана пространственная структура электронов над электродом шириной $M = 2,7 \cdot 10^{-4}$ см. Видно, что электроны, как и в случае двух цепочек, образуют хорошо упорядоченную структуру. Удерживающий потенциал в направлении y , рассчитанный с использованием (7), в случае трех линий зарядов показан на рис. 2(в).

Как и раньше, проводим фурье-анализ средних координаты $x_{\text{mean}}(t)$ и $y_{\text{mean}}(t)$ [см. рис. 2(г) и 2(д)]. В системе возбуждаются колебания с выделенными частотами.

Для конфигурации из трех цепочек зарядов, показанной на рис. 2(б), расстояния между цепочками составляют $|y_{1i} - y_{2j}| = |y_{2i} - y_{3j}| = (\sqrt{3}/2)a$ и $|y_{1i} - y_{3j}| = \sqrt{3}a$ соответственно. Результаты численного определения шести корней дисперсионного уравнения в зависимости от $u = |q_x a|$ приведены на рис. 2(е). Ранее аналогичный численный расчет в длинноволновом пределе

был выполнен в [17]. Как видно на рис. 2(е), голдстоуновской является одна из мод спектра, остальные пять — оптические, причем две из них, имеющие наибольшие частоты, вырождаются в одну по мере приближения к $u = \pi$. Интересно отметить, что при $u = \pi$, в отличие от конфигурации двух цепочек, четыре решения дисперсионного уравнения различны, что подтверждается аналитическим анализом структуры дисперсионного уравнения на верхней границе зоны Бриллюэна, результаты которого приводить здесь не будем ввиду громоздкости.

Определенные при теоретическом рассмотрении закона дисперсии коллективных мод частоты колебаний сравнивались с частотами, полученными при моделировании трехцепочечной электронной структуры. Вертикальными пунктирными линиями на рис. 2(е) показаны значения волновых векторов, соответствующих модельной системе, именно $u_l = \pi a / L$ и $u_t = \pi a / M$ (при расчете выбирали $a = 10^{-4}$ см). Заметим, что $u_l \ll 1$ и $u_t \leq 1$ при выбранных значениях a , M и L , что

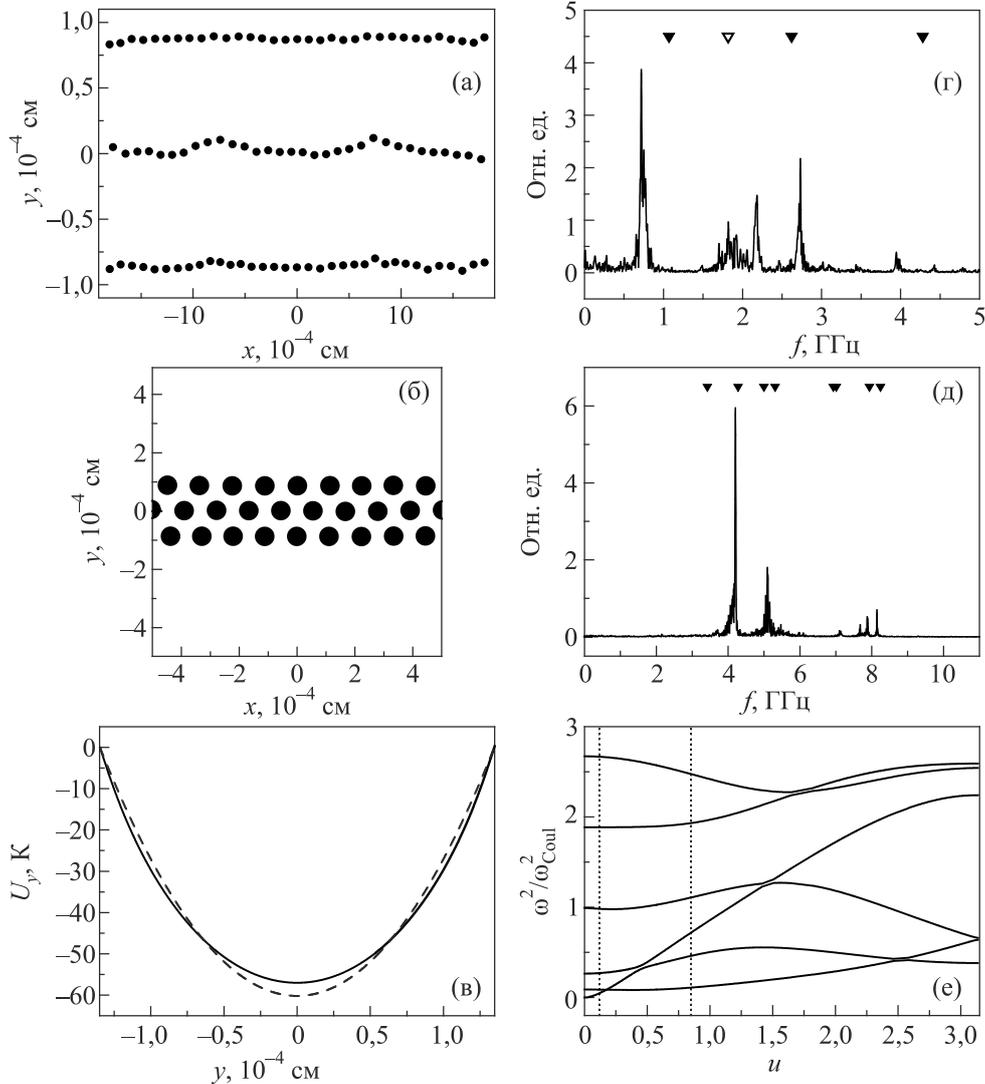


Рис. 2. То же, что на рис. 1(а)–1(е), но для электронной системы из трех линий.

соответствует длинноволновому пределу, в котором, аналогично случаю двух цепочек, колебания можно разделить на продольные и поперечные. Поэтому можно сказать, что в системе возможно возбуждение трех продольных и трех поперечных мод, что согласуется с результатами проведенных модельных экспериментов. Частоты колебаний, определенные при численном решении дисперсионного уравнения, на рис. 2(г) и 2(д) показаны треугольниками. Согласие между этими частотами и их значениями, определенными с помощью фурье-анализа, следует признать достаточно хорошим.

4.3. Четыре цепочки электронов

Как отмечалось во втором разделе настоящей работы, конфигурация системы в четыре цепочки реализуется как при условии одинакового расстояния между линиями зарядов, [рис. 3(а) при разном и 3(б) при одинаковом масштабе по осям x и y], так и при различном расстоянии между такими линиями, когда возникает двойной зигзаг [рис. 4(а) и 4(б)]. Соответствующие удерживающие потенциалы, рассчитанные в параболическом приближении и путем интегрирования (3), приведены на рис. 3(в) и 4(в).

В случае одинакового расстояния $|y_{ni} - y_{n+1,j}| = (\sqrt{3}/2)a$, $|y_{ni} - y_{n+2,j}| = \sqrt{3}a$ и $|y_{ni} - y_{n+3,j}| = (3\sqrt{3}/2)a$ соответственно. Устойчивая конфигурация из четырех равноудаленных линий реализуется при ширине электрода $M = 3,6 \cdot 10^{-4}$ см.

Как и в случае трех линий, фурье-анализ величин $x_{\text{mean}}(t)$ [рис. 3(г)] и $y_{\text{mean}}(t)$ [рис. 3(д)] показывает возбуждение коллективных мод при $u_l = \pi a/L$ и $u_m = \pi a/M$. В длинноволновом пределе, соответствующем анализу, моды на рис. 3(д) можно трактовать как поперечные, тогда как моды на рис. 3(г) — как продольные.

Результаты вычисления законов дисперсии восьми ветвей спектра коллективных мод показаны на рис. 3(е). Оказывается, что голдстоуновскими являются две ветви спектра, остальные шесть — оптические, а на верхней границе зоны Бриллюэна $u = \pi$ решение дисперсии

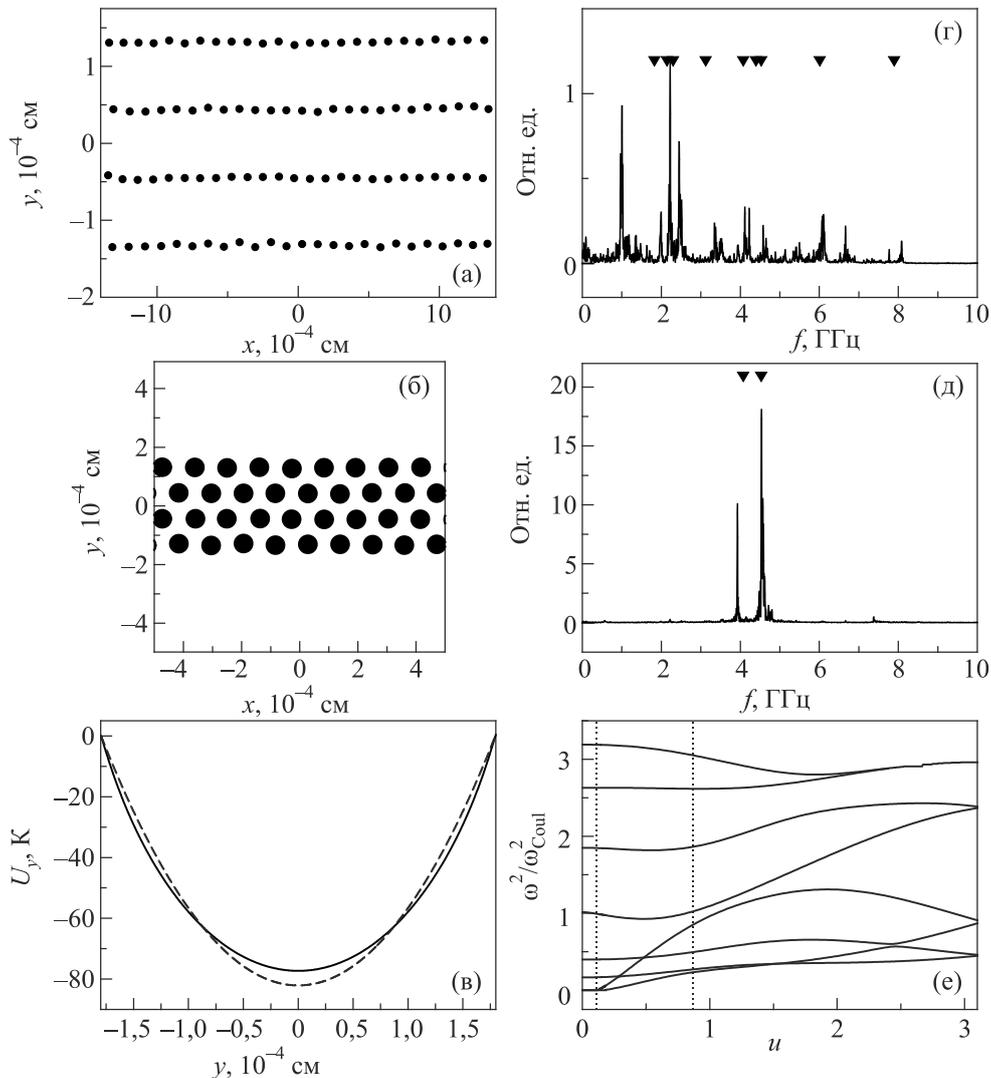


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для электронной системы из четырех линий с одинаковым расстоянием между линиями.

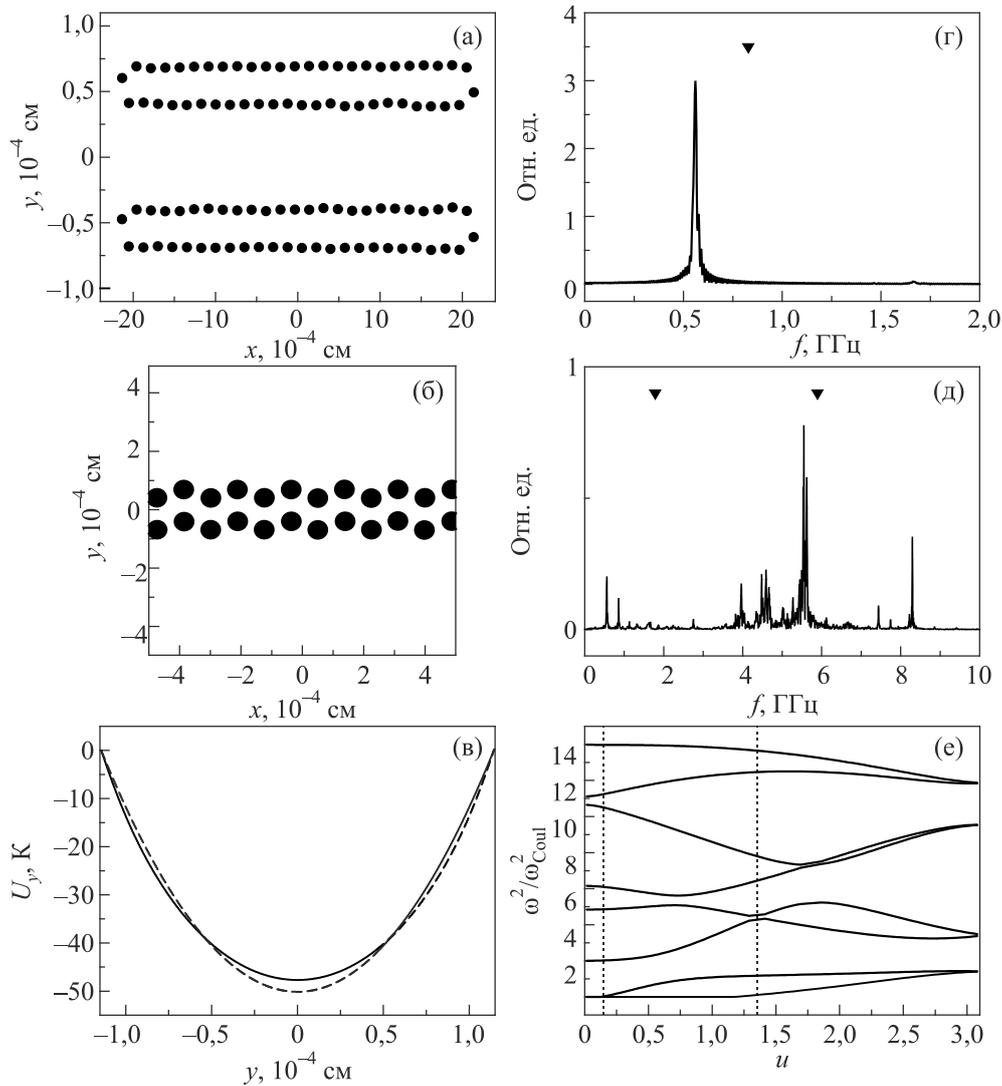


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но при неодинаковом расстоянии между линиями зарядов (система 2+2 — двойной зигзаг).

онного уравнения вырождается в четыре ветви в согласии с аналитическим расчетом, который становится возможным при указанном значении аргумента u .

Из закона дисперсии [рис. 3(е)] следует возможность возбуждения большого количества мод в длинноволновой области. Значения частот, следующих из вычисления закона дисперсии, показаны треугольниками на рис. 3(г) и 3(д). Можно отметить, что результаты модельных экспериментов достаточно хорошо согласуются с теоретическим анализом закона дисперсии коллективных колебаний в системе.

Конфигурация двойного зигзага существует в узком интервале отношений ширины электрода к среднему расстоянию между частицами [2]. На рис. 4(а) показана пространственная структура, образованная 100 частицами над электродом шириной $M = 2,29 \cdot 10^{-4}$ см, в разном, а на рис. 4(б) в одинаковом масштабе по координатам x и y .

Расстояние между соседними частицами вдоль каждой из линий составляет $1,75 \cdot 10^{-4}$ см, расстояние меж-

ду внутренними линиями равно $0,8 \cdot 10^{-4}$ см, а между внешней и ближайшей внутренней линиями — $0,29 \cdot 10^{-4}$ см. На рис. 4(г) и 4(д) приведены результаты фурье-анализа зависимостей $x_{\text{mean}}(t)$ и $y_{\text{mean}}(t)$ при тех же значениях u_l и u_t , что и раньше (пунктирные линии). Наблюдается лишь одна продольная мода и фактически одна поперечная мода на рис. 4(д), если не принимать во внимание некоторые неотчетливые резонансные особенности при других частотах.

Законы дисперсии для конфигурации двойного зигзага оказываются существенно иными, чем на рис. 3(е). Если пронумеровать цепочки сверху вниз (или снизу вверх) от 1 до 4, то для $a = 1,75 \cdot 10^{-4}$ см, $|y_{1i} - y_{2j}| = |y_{3i} - y_{4j}| = 0,29 \cdot 10^{-4}$ см, $|y_{2i} - y_{3j}| = 0,8 \cdot 10^{-4}$ см. Результаты численного решения дисперсионного уравнения показаны на рис. 4(е). Как и в случае одинакового расстояния между цепочками, две из ветвей спектра коллективных мод являются голдстоуновскими, остальные шесть — оптическими. В то же время имеется существенное количественное различие между результа-

тами рис. 4(е) и 3(е). Для конфигурации из четырех цепочек с различным расстоянием между линиями электронов значения квадратов частот оказываются примерно в три раза выше, чем в случае одинакового расстояния между цепочками. Кроме того, отчетливо видно различное поведение мод в одном и том же интервале изменения аргумента. Например, законы дисперсии на рис. 3(е) имеют точки максимального сближения мод (кроссинг) для низкочастотных мод, тогда как на рис. 4(д) такой кроссинг отсутствует, появляясь у более высокочастотных мод. Столь разные поведения мод спектра для двух типов конфигурации системы из четырех цепочек могут оказаться благоприятными при попытке идентификации типа конфигурации на основании экспериментально измеренного закона дисперсии коллективных колебаний.

Из теоретически рассчитанного закона дисперсии на рис. 4(е) видно, что в низкочастотной области в условиях модельного эксперимента (соответствующие волновые векторы отмечены вертикальными пунктирными линиями) возможно наблюдение двух поперечных мод и одной продольной в условиях слияния двух голдстоуновских ветвей спектра при малых значениях u_l [рис. 4(г)]. Качественно результаты модельных расчетов хорошо согласуются с теоретическими результатами [отмечены треугольниками на рис. 4(г) и 4(д)], хотя имеется различие в численных значениях частот.

Заключение

В настоящей работе проведено моделирование поведения электронной системы, образующей структуры, состоящие из нескольких линий зарядов при наличии удерживающего потенциала поперек системы частиц. В качестве реальной системы, соответствующей проведенным исследованиям, рассмотрена система поверхностных электронов над жидким гелием. Установлены параметры возникающих конфигураций зарядов, состоящих из двух, трех и четырех линий. Причем в последнем случае исследованы две конфигурации системы — одна с одинаковым расстоянием между линиями, и вторая типа «двойной зигзаг» с переменным расстоянием.

Проведен фурье-анализ средних значений координат частиц вдоль и поперек системы и найдены значения характерных частот их колебаний в длинноволновом пределе. Результаты сопоставлены с теоретическим расчетом закона дисперсии коллективных плазменных мод, обусловленных кулоновским взаимодействием между частицами системы, найдено неплохое согласие между результатами обоих методов. Закон дисперсии получен из условия совместности уравнений движений для малых смещений электронов из положения равновесия. В отличие от ранее проведенных исследований [3, 17], где основное внимание было уделено длинноволновым колебаниям, результаты, полученные в настоящей работе, применимы во всем интервале волновых чисел,

соответствующем первой зоне Бриллюэна квазикристаллического приближения.

Показано, что закон дисперсии плазменных колебаний существенно зависит от количества линий зарядов и отличается в случае двух возможных конфигураций системы, состоящей из четырех линий.

Авторы признательны С. Б. Феодосьеву за полезные замечания, высказанные в ходе обсуждения результатов работы.

1. D. G. Rees, N. R. Beysengulov, Juhn-Jong Lin, and K. Kono, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 206801 (2016).
2. В. Е. Сивоконь, И. В. Шарапова, *ФНТ* **45**, 1498 (2019) [*Low Temp. Phys.* **45**, 1267 (2019)].
3. В. Е. Сивоконь, С. С. Соколов *ФНТ* **41**, 1097 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 858 (2015)].
4. G. Piacente, I. V. Schweigert, J. J. Betouras, and F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **69**, 045324 (2004).
5. В. Е. Сивоконь, С. С. Соколов, И. В. Шарапова, *ФНТ* **45**, 58 (2019) [*Low Temp. Phys.* **45**, 49 (2019)].
6. Y. P. Monarkha and K. Kono, *Two-Dimensional Coulomb Liquids and Solids*, Springer-Verlag, Berlin (2003).
7. А. В. Чаплик, *Письма в ЖЭТФ* **31**, 275 (1980) [*JETP Lett.* **31**, 252 (1980)].
8. С. С. Соколов, О. И. Киричек, *ФНТ* **20**, 764 (1994) [*Low Temp. Phys.* **20**, 599 (1994)].
9. S. S. Sokolov, J.-P. Rino, and N. Studart, *Phys. Rev. B* **75**, 233405 (2007).
10. S. Das Sarma and W.-Y. Lai, *Phys. Rev. B* **32**, 1401 (1985).
11. Q. Li and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **40**, 5860 (1990).
12. Q. P. Li and S. Das Sarma, *Phys. Rev. B* **43**, 11768 (1991).
13. G. Y. Hu and R. F. O'Connell, *Phys. Rev. B* **42**, 1290 (1990).
14. G.-Q. Hai, N. Studart, and G. E. Marques, *Phys. Rev. B* **55**, 15154 (1997).
15. S. S. Sokolov and N. Studart, *Phys. Rev. B* **57**, R704 (1998).
16. S. S. Sokolov and N. Studart, *J. Phys.: Condens. Matter* **12**, 9563 (2000).
17. S. S. Sokolov and V. E. Syvokon, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 427 (2017).
18. Ю. З. Ковдря, Ю. П. Монарха, *ФНТ* **12**, 1011 (1986) [*Sov. J. Low Temp. Phys.* **12**, 571 (1986)].

Структура й колективні коливання електронних систем, що складаються із декількох ланцюжків

В. Ю. Сивоконь, О. С. Соколова, С. С. Соколов

Проведено дослідження колективних властивостей систем поверхневих електронів, що складаються із декількох ліній зарядів. При моделюванні системи за допомогою фур'є-аналізу середніх координат частинок уздовж і поперек ліній, знайдено характерні частоти коливань у системі. Значення частот зіставлено з теоретично отриманими законами дисперсії плазмових мод, розрахованими методом рівнянь руху

для малих зсувів електронів з положення рівноваги. Закони дисперсії колективних коливань обчислені для двох-, трьох- та чотирьохланцюгових систем електронів, причому в останньому випадку розглянуто конфігурації як з однаковими, так із різними відстанями між лініями зарядів. Спостерігається добра згода результатів методу моделювання зі значеннями частот, що впливають із законів дисперсії.

Ключові слова: дисперсія плазмових коливань, маломірні електронні системи, поверхневі електрони.

Structure and collective oscillations of electron systems consisting of several chains

V. E. Syvokon, E. S. Sokolova, and S. S. Sokolov

The study of the collective properties of systems of surface electrons consisting of several charge lines has been carried out. Under simulation of the system, using Fourier analysis of the average coordinates of the particles along and across the lines, the characteristic vibration frequencies in the system are found. The frequencies are compared with theoretically obtained laws of the dispersion of plasma modes, calculated by the method of equations of motion for small displacements of electrons from the equilibrium position. The dispersion laws of collective vibrations were calculated for two-, three-, and four-chain electron systems, and in the latter case, configurations with both the same and different distances between the charge lines were considered. There is good agreement between the results of the simulation method and the frequencies following from the dispersion laws.

Keywords: dispersion of plasma oscillations, low-dimensional electronic systems, surface electrons.