Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2020, т. 46, № 10, с. 1182–1185

Динамика проникновения магнитного потока в сверхпроводник со степенной вольт-амперной характеристикой

Н. А. Тайланов, Б. И. Хамдамов

Джизакский государственный педагогический институт, Джизак, Узбекистан
E-mail: taylanov@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 16 марта 2020 г., опубликована онлайн 21 августа 2020 г.

Рассмотрена задача о проникновении магнитного поля в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который находится в режиме вязкого течения потока во внешнем магнитном поле. Получены аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного поля в сверхпроводник в зависимости от значений параметра задачи — от показателя степени *n*, характеризующего скорость проникновения вихрей в сверхпроводящее полупространство.

Ключевые слова: проникновение магнитного потока, сверхпроводящее полупространство, высокотемпературный сверхпроводник II рода.

Изучение динамики эволюции магнитного потока вглубь сверхпроводника с нелинейной вольт-амперной характеристикой в режиме крипа потока является важной задачей технической сверхпроводимости. Математически задача исследования может быть сформулирована на основе системы нелинейных эволюционных уравнений для электромагнитного поля с учетом нелинейного соотношения между полем и током в сверхпроводнике [1–14]. Теоретические исследования закономерности проникновения магнитного потока в режиме крипа потока со степенной вольт-амперной характеристикой и связанная с ним быстрая релаксация тока в сверхпроводниках проведены в классических работах [10–14]. Закономерности проникновения магнитного поля в режиме вязкого течения потока изучены в [2]. Динамика проникновения магнитного потока исследована в [2] в предположении, что дифференциальное сопротивление не зависит от магнитного поля. Подробный анализ этих процессов в режиме крипа потока с нарастающим с постоянной скоростью магнитным полем для сверхпроводников второго рода с различными типами вольт-амперных характеристик проведен в [6–10]. В настоящей работе рассматривается диффузионная задача о проникновении магнитного потока в сверхпроводник с учетом нелинейной вольт-амперной характеристики сверхпроводников, справедливой в области малых эклектических полей и в режиме крипа потока. Получено точное аналитическое решение, описывающее пространственную и временную эволюции проникновения магнитного и электрического полей и плотность тока. Определена скорость распространения фронта намагниченности при заданной средней скорости изменения по времени внешнего магнитного поля на границе образца.

Для моделирования процесса эволюции возмущений электромагнитного поля в пространстве и времени используется система уравнений макроскопической электродинамики [15]. Взаимосвязь между магнитной индукцией $\mathbf{B}$, электрическим полем $\mathbf{E}$ и плотностью транспортного тока $\mathbf{j}$ устанавливается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}. \tag{2}$$

Движение вихревых нитей со скоростью v приводит к возникновению электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{v}{c}\mathbf{B}. \tag{3}$$

Согласно теории Андерсона [16, 17], термоактивационное движение вихрей может быть описано соотношением

$$v = v_0 \exp\left(-U / k_B T\right), \tag{4}$$

где v_0 — скорость вихрей при $T = 0$, U — энергия активации при тепловом движении вихрей, которая зависит от механизмов пиннинга, T — температура и k_B — постоянная Больцмана. Энергия активации $U(j)=U(j,\,B,\,T)$ зависит от температуры T, индукции магнитного поля B и плотности тока j. Для простого случая она может быть описана хорошо известной формулой Кима–Андерсона [17]:

$$U(j)=U_0\left(1-\frac{j}{j_{c0}}\right), \tag{5}$$

где U_0 — характерный масштаб энергии активации, j_{c0} — критическая плотность тока при $T=0$. В режиме коллективного крипа зависимость активационной энергии от плотности тока является логарифмической [18, 19]:

$$U(j)=U_0\ln\left(\frac{j_{c0}}{j}\right). \tag{6}$$

С учетом равенств (4) и (6) получим феноменологическую формулу для функции $\mathbf{E}$ в виде

$$\mathbf{E}=v_0\mathbf{B}\left(\frac{j}{j_{c0}}\right)^n, \tag{7}$$

где показатель экспоненты n зависит от механизма пиннинга [18]. Для зависимости $j_c(B)$ существуют различные модели и для простоты воспользуемся степенной моделью [20]:

$$j_c(B)=j_0\left(\frac{B_0}{B}\right)^\gamma, \tag{8}$$

где j_0 и B_0 — характеристические значения плотности тока и индукции магнитного поля, γ — безразмерный параметр, характеризующий пиннинг, $0<\gamma<1$. Другая возможная модель для зависимости $j_c(B)$ имеет экспоненциальную форму [21]:

$$j(B)=j_0\exp\left(-\frac{B}{B_1}\right)^\gamma, \tag{9}$$

где B_1 — параметр, связанный с пиннингом. Сформулируем основные уравнения, описывающие динамику развития тепловых и электромагнитных возмущений для простого случая — сверхпроводящего плоского полубесконечного образца $x\geq 0$. Предполагаем, что внешнее магнитное поле $\mathbf{B}=(0,\,0,\,B_e)$ направлено по оси z и скорость магнитного поля является постоянной $\dot{B}_e=\mathrm{const}$. Согласно уравнению Максвелла (2), в образце имеется вихревое электрическое поле $\mathbf{E}=(0,\,E_e,\,0)$. Здесь B_e — амплитуда внешнего магнитного поля, E_e — амплитуда фонового электрического поля. Из концепции критического состояния непосредственно следует параллельность плотности тока и электрического поля $\mathbf{j}\,||\,\mathbf{E}$. Для такой геометрии пространственная и временная эволюции индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ описываются следующим диффузионным уравнением:

$$\frac{db}{dt}=\frac{d}{dt}\left[b^{\gamma n+1}\left|\frac{db}{dt}\right|^{n-1}\frac{db}{dt}\right]. \tag{10}$$

В уравнение введены следующие безразмерные параметры: $b=B/B_0$, $x_p=\mu_0 j_0 x/B_0$, $t=t/\tau_0$, $j=j/j_0$, $\varepsilon=E/v_0 j_0$, $B_0=\mu_0 j_0 v_0\tau$. Запишем необходимые граничные и начальные условия относительно переменной b для рассматриваемой одномерной геометрии. Ниже ограничимся исследованием краевой задачи со степенным граничным режимом [7]

$$b(0,t)=b_0 t^\alpha. \tag{11}$$

Возрастание поля по закону (11) происходит на конечном интервале времени, а затем оно стабилизируется, таким образом,

$$b(x_p,0)=0, \tag{12}$$

где x_p — положение фронта магнитного потока. Тогда задача (10) с начальным распределением

$$\int b(x,0)dx=1 \tag{13}$$

моделирует эволюцию магнитного потока в сверхпроводнике. Искомое распределение индукции магнитного поля найдем в классе автомодельных решений [22, 23], используя групповые свойства дифференциального уравнения (10) с соответствующими граничными (11), (12) и начальным (13) условиями. Для решения задачи (10)–(13) используем инварианты вида [23]

$$b(x,t)=t^\alpha f(x/t^\beta). \tag{14}$$

Здесь параметры α и β удовлетворяют соотношению $\alpha+1=\beta+\alpha(\gamma n+1)+\alpha n+\beta n$. Используя соотношение для закона сохранения потока типа (13), получим точное выражение для параметра $\alpha=\beta=1/(2n+\gamma n+1)$, которое предполагает существование решения типа [23]

$$b(x,t)=t^{1/(2n+\gamma n+1)}f(z),\qquad z=xt^{1/(2n+\gamma n+1)}. \tag{15}$$

Подставляя решение (15) в уравнение (10), получим следующее дифференциальное уравнение для новой функции $f(z)$:

$$\frac{d}{dz}\left[f^{\gamma n+1}\left|\frac{df}{dz}\right|^n\right]+\frac{1}{2n+\gamma n+1}\frac{d}{dz}\left[z\frac{df}{dz}\right]=0. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) должно удовлетворять граничным условиям задачи

$$f(0,\,t)=1,\quad f(z_0,\,t)=0. \tag{17}$$

Таким образом, полученное решение описывает профиль распространения индукции магнитного поля в сверхпроводнике. Дальнейшее интегрирование уравнения (16) с учетом граничных условий (17) приводит к следующему решению задачи:

$$f(z) = f(z_0)\left[1-(z/z_0)^{(n+1)/n}\right]^{1/(\gamma+1)}, \qquad (18)$$

где

$$f(z_0) = \left[n\frac{\gamma+1}{n+1}\left(\frac{z_0^{n+1}}{2n+\gamma n+1}\right)^{1/n}\right]^{1/(\gamma+1)}.$$

Положение фронта индукции магнитного потока z_0 может быть найдено подстановкой (18) в равенство (13):

$$z_0^{(2n+\gamma n+1)/(\gamma+1)} =$$

$$= \left[\frac{\frac{n}{n+1}F\left(\frac{\gamma+2}{\gamma+1}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma+1}\right)\Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right]\left[n\frac{\gamma+1}{n+1}\left(\frac{1}{2n+\gamma n+1}\right)^{1/n}\right]^{1/(\gamma+1)}.$$

Последнее уравнение в старых переменных имеет вид

$$b(x,t) = b_0\left[1-\left(\frac{x}{x_p}\right)^{(n+1)/n}\right]^{1/(\gamma+1)}, \qquad (19)$$

где

$$b_0(0,t) = t^{-1/(2n+\gamma n+1)}\left[n\frac{\gamma+1}{n+1}\left(\frac{z_0^{n+1}}{2n+\gamma n+1}\right)^{1/n}\right]^{1/(\gamma+1)}.$$

Положение фронта магнитного потока может быть представлено в виде $x_p = x_0 t^{-1/(2n+\gamma n+1)}$. Тогда нетрудно определить скорость фронта магнитного поля:

$$v_p \approx v_0 t^{-n(2+\gamma)/(2n+\gamma n+1)}. \qquad (20)$$

Как видно, скорость фронта магнитного потока уменьшается линейно с течением времени. Полученное решение (20) описывает проникновение магнитного потока вглубь сверхпроводника в интервале $0 < x < x_p$ в режиме крипа потока со степенной вольт-амперной характеристикой, определяемой соотношением (7).

Таким образом, изучена задача о проникновении магнитного поля в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который находится в режиме крипа потока во внешнем магнитном поле. Показано, что магнитное поле на границе сверхпроводника возрастает с течением времени в режиме с обострением. Получено уравнение типа диффузии, которое описывает распределение магнитной индукции в режиме вязкого течения потока при проникновении магнитного потока вглубь сверхпроводника. Получены аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного поля в сверхпроводник в зависимости от значений параметров задачи, а именно от показателя степени n, характеризующего скорость проникновения вихрей в сверхпроводящее полупространство. Отличительной особенностью решений является их самоподобность, т. е. возникающие при крипе диссипативные магнитные структуры являются инвариантными относительно преобразований пространственных и временных масштабов [23].

---

1. V. Meerovich, M. Sinder, V. Sokolovsky, S. Goren, G. Jung, G. E. Shter, and G. S. Grader, *Supercond. Sci. Technol.* **9**, 1042 (1996).
2. V. V. Bryksin and S. N. Dorogovstev, *Physica C* **215**, 173 (1993).
3. M. Holiastou, M. Pissas, D. Niarchos, P. Haibach, U. Frey, and H. Adrian, *Supercond. Sci. Technol.* **11**, 1241 (1998).
4. В. Р. Романовский, *ЖТФ* **73**, 77 (2003).
5. В. Р. Романовский, *ЖТФ* **70**, 47 (2000).
6. И. Б. Краснюк, Р. М. Таранец, *Физика и техника высоких давлений* **21**, №4, 29 (2003).
7. Т. Н. Мельник, И. Б. Краснюк, Р. М. Таранец, В. М. Юрченко, *Физика и техника высоких давлений* **22**, № 2, 70 (2012).
8. Z. Kozioł and E. P. Chatel, *IEEE Trans. Magn.* **30**, 1169 (1994).
9. Z. Kozioł and R. A. Dunlap, *J. Appl. Phys.* **79**, 5926 (1996).
10. V. V. Vinokur, M. V. Feigel'man, and V. B. Geshkenbein, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 915 (1997).
11. W. Wang and J. Dong, *Phys. Rev. B* **49**, 698 (1994).
12. F. Bass, B. Ya. Shapiro, I. Shapiro, and M. Shvartser, *Physica C* **297**, 269 (1998).
13. J. Gilchrist and C. J. Van der Beek, *Physica C* **231**, 147 (1994).
14. J. Gilchrist, *Physica C* **291**, 132 (1997).
15. Р. Г. Минц, А. Л. Рахманов, *Неустойчивости в сверхпроводниках*, Наука, Москва (1984).
16. P. W. Anderson and Y. B. Kim, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 3456 (1964).
17. P. W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **309**, 317 (1962).
18. E. Zeldov, N. M. Amer, G. Koren, A. Gupta, M. W. McElfresh, and R. J. Gambino, *Appl. Phys. Lett.* **56**, 680 (1990).
19. M. P. Maley, J. O. Willis, H. Lessure, and M. E. McHenry, *Phys. Rev. B* **42**, 2639 (1990).
20. F. Irie and K. Yamafuji, *J. Phys. Soc. Jpn.* **23**, 255 (1967).
21. P. H. Kes, J. Aarts, J. van den Berg, C. J. van der Beek, and J. A. Mydosh, *Supercond. Sci. Technol.* **1**, 242 (1989).
22. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, Москва (1987).
23. Г. И. Баренблатт, *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике*, Гидрометеоиздат, Ленинград (1982).

Динаміка проникнення магнітного потоку у надпровідник зі степеневою вольт-амперною характеристикою

Н. А. Тайланов, Б. І. Хамдамов

Розглянуто задачу про проникнення магнітного поля у високотемпературний надпровідник II роду, який знаходиться у режимі в'язкої течії потоку в зовнішньому магнітному полі. Отримано аналітичні формули для глибини та швидкості проникнення магнітного поля у надпровідник в залежності від значень параметра задачі — від показника степеня *n*, який характеризує швидкість проникнення вихорів у надпровідний напівпростір.

Ключові слова: проникнення магнітного потоку, надпровідний напівпростір, високотемпературний надпровідник другого роду.

The dynamics of magnetic flux penetration into superconductors with power-law current-voltage characteristics

N. A. Taylanov and B. I. Hamdamov

We consider the problem of the penetration of a magnetic field into a high-temperature type-II superconductor, which is in the regime of a viscous flow in an external magnetic field. Analytical formulas are obtained for the depth and rate of penetration of a magnetic field into a superconductor depending on the values of the problem parameter, namely, on the exponent *n* characterizing the rate of penetration of vortices into the superconducting half-space.

Keywords: magnetic flux penetration, superconducting half-space, high-temperature type-II superconductor.