

Противотоковая теплопроводность и электрическая активность сверхтекучих систем в магнитном поле

С.И. Шевченко, А.М. Константинов

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Науки, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 17 октября 2019 г., опубликована онлайн 25 ноября 2019 г.

Показано, что поток тепла в сверхтекучем гелии, помещенном в магнитное поле, приводит к появлению в окружающем пространстве электрического поля. Эффект обусловлен противотоковой природой теплопроводности в сверхтекучих системах: перенос тепла в таких системах связан с движением нормальной компоненты, но средний поток массы, переносимый нормальной компонентой, компенсируется потоком массы, переносимым сверхтекучей компонентой. Локальный поток массы отличен от нуля. Эффект имеет место при стационарном и нестационарном (второй звук) потоках тепла. Рассмотрены особенности эффекта для ряда образцов с различной геометрией. Установлено, что величина возникающего электрического поля существенно зависит от формы образца с гелием и направления магнитного поля.

Ключевые слова: сверхтеплопроводность, поляризация, термомагнитный эффект.

Введение

Интерес к возможности электрической активации He II тепловыми потоками и течением жидкости возник в связи с экспериментами [1,2]. В частности, в работе [1] обнаружено, что стоячая волна второго звука в сверхтекучем гелии сопровождается электрическим откликом. В работе [2] обнаружен механоэлектрический эффект, который заключался в возникновении разности потенциалов между измерительным электродом и стенками камеры, покрытыми пленкой гелия, при механических колебаниях камеры. Результаты [1] были воспроизведены в недавно выполненных работах [3–5]. В [6] аналогичный эффект зарегистрирован в случае стоячей волны первого звука. В работе [4] обнаружено, что при некоторой критической мощности теплового потока амплитуда электрического сигнала существенно уменьшается.

Эти эксперименты вызвали большой интерес и стимулировали многочисленные теоретические исследования. Хотя общепринятое объяснение экспериментов в настоящее время отсутствует, был предсказан ряд интересных эффектов, связанных с поляризацией нормальных и сверхтекучих систем. В частности, в [7] предсказана поляризация любой диэлектрической среды при ее неравномерном движении (явление, аналогичное эффекту Стюарта–Толмена в металлах). В работе [8] наблюдавшееся явление электрической активности сверхтекучего гелия при возбуждении стоячих волн второго

звука в акустическом резонаторе также описывалось в рамках механизма инерционной поляризации атомов, когда поляризация пропорциональна механическому ускорению. В работах [7,9,10] обращено внимание на возможность флексоэлектрического эффекта в квантовых жидкостях и газах (появление поляризации, обусловленной неоднородностью системы). В работах [11,12] показано, что вихревое движение атомов в квантовой жидкости сопровождается их поляризацией (вблизи вихря возникает аксиально-симметричный «поляризационный еж»). При этом полный дипольный момент у вихря отсутствует. Позже обнаружено, что при наличии относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент дипольный момент вихря становится отличным от нуля [13]. В работах [14,15] установлено, что в магнитном поле вихри в сверхтекучей системе приобретают поляризационный электрический заряд. Компенсирующий заряд противоположного знака возникает на поверхности системы. В общем случае заряд вихря и его изображение на поверхности разделены на макроскопически большое расстояние.

Параллельно с феноменологическими моделями в работах [16–18] построена микроскопическая теория, описывающая сверхтекучее состояние разреженного электрон-дырочного газа [16,17] и разреженного газа атомов щелочного металла [18]. В рамках этой теории обнаружен флексоэлектрический эффект и количественно описаны перечисленные выше эффекты.

В [19], а также в [20,21] наблюдаемые эффекты связываются с появлением у атомов взаимно противоположных дипольных моментов, обусловленных ван-дер-ваальсовским взаимодействием между атомами. Высказывается предположение, что поток микроскопических вихревых колец в волне второго звука приводит к упорядочению хаотично направленных дипольных моментов атомов. В результате возникает объемная поляризация гелия. Существование дипольного момента у квантованных вихревых колец предполагается в работах [22–25], в которых утверждается, что наблюдаемые электрические явления в экспериментах [1,2] ключевым образом определяются электрическими свойствами квантованных вихревых колец.

Помимо взаимодействия атомов гелия друг с другом источником поляризации может стать взаимодействие атомов гелия со стенками сосуда, ограничивающего гелий [16], и с измерительными электродами на противоположных концах сосуда [26,27].

Роль приповерхностных поляризованных слоев особенно велика в тонких сверхтекучих пленках. Периодическое нагревание краев сверхтекучей пленки, покрывающей подложку, приводит к распространению по пленке волны третьего звука. Эта волна сопровождается колебаниями толщины пленки. Последние, в свою очередь, приводят к колебаниям индуцированного стенкой дипольного момента пленки и появлению в окружающем пространстве осциллирующего электрического поля. Возникающая разность потенциалов пропорциональна градиенту температур, т.е. должен иметь место нестационарный термоэлектрический эффект, что невозможно в нормальных системах. Этот эффект предсказан в [28,29].

Особняком стоит работа [30], в которой высказывается предположение, что в ^4He может иметь место фазовый переход в состояние со спонтанной электрической поляризацией. Утверждается, что этот переход должен наблюдаться в окрестности λ -точки, точнее, чуть выше λ -точки. Согласно развиваемым авторами [30] представлениям, при понижении температуры в жидком гелии вначале происходит фазовый переход в поляризованную нормальную фазу, а затем уже из состояния с ненулевой поляризацией осуществляется переход в сверхтекучее состояние. Переход нормальной жидкости в поляризованную фазу описан в рамках феноменологической теории фазовых переходов. Это любопытное предположение пока не получило экспериментального подтверждения.

В настоящей работе обращается внимание на новый механизм поляризации, который должен иметь место в сверхтекучих диэлектрических системах при наличии градиента температуры и магнитного поля. Известно, что He II характеризуется двумя уникальными свойствами, одним из которых является сверхтекучесть, а другое часто называют противотоковой теплопровод-

ностью, или сверхтеплопроводностью (последнее название предложено в работе [31]). Громадное значение эффективного коэффициента теплопроводности при переходе в сверхтекучее состояние объясняется тем, что перенос тепла в He II связан с движением нормальной компоненты. Поток массы, переносимый нормальной компонентой, компенсируется потоком массы, переносимым сверхтекучей компонентой, т.е. возникает противотоковое состояние, при котором перенос тепла осуществляется путем внутренней конвекции. Чрезвычайно важным обстоятельством является тот факт, что условие отсутствия потока массы должно выполняться лишь в среднем, т.е. должен обращаться в нуль лишь поток массы, усредненный по площади системы. Локальный поток массы в общем случае не должен обращаться в нуль. Поскольку движение любого диэлектрика в магнитном поле приводит к его поляризации, то при наличии магнитного поля с локальным потоком массы в сверхтекучем гелии будет связан локальный дипольный момент и вне системы может возникнуть среднее электрическое поле. В результате в сверхтекучих системах может иметь место термомагнитный эффект, аналогичный эффекту Нернста–Эттингсхаузена в проводящих системах. Оказалось, однако, что в сверхтекучих системах величина возникающего электрического потенциала очень чувствительна к геометрии системы и ориентации магнитного поля. Так, в круговом капилляре эффект отсутствует, а, например, в случае эллиптического капилляра с полуосями a и b величина электрического поля может изменяться на несколько порядков в зависимости от направления магнитного поля относительно осей эллипсоида. Краткое изложение некоторых из полученных результатов опубликовано в [32].

Настоящая работа организована следующим образом.

В разд. 1 излагается суть термомагнитного эффекта для сверхтекучих систем. Получено общее выражение для поляризации сверхтекучего гелия во внешнем магнитном поле при наличии градиента температур, порождающего противотоковое движение жидкости. Обсуждается вопрос о влиянии на результат граничных условий.

В разд. 2 рассматриваются особенности эффекта для образцов с различной геометрией. Получено распределение электрического поля в пространстве для случаев гелия, заполняющего капилляр кругового, эллиптического и треугольного сечений, а также для пленки гелия, покрывающей капилляр эллиптического сечения. Найдены максимально возможные значения величины электрического поля при ламинарном режиме течения жидкости.

В разд. 3 исследован термомагнитный эффект для случая нестационарного градиента температур, в частности, при распространении второго и третьего звуков. Для третьего звука приведено сравнение величины тер-

момагнитного эффекта с величиной термоэлектрического эффекта в отсутствие магнитного поля.

В Заключении кратко обсуждается проблема наблюдения предсказываемого термомагнитного эффекта в связи с переходом жидкости в турбулентное состояние.

1. Термомагнитный эффект в сверхтекучих системах

Будем исходить из полученного Минковским (см., например, [33]) выражения для индукции \mathbf{D} в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ при его движении со скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \frac{\epsilon \mu - 1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности стационарных электрического и магнитного полей соответственно, c — скорость света в вакууме. Выражение (1) справедливо с линейной точностью по \mathbf{v}/c .

В случае ${}^4\text{He}$ с хорошей степенью точности можно считать, что $\mu = 1$. Связь диэлектрической проницаемости ϵ с поляризуемостью α атома ${}^4\text{He}$ и плотностью атомов n можно найти с помощью соотношения Клаузиуса–Моссотти

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4\pi n \alpha}{3}, \quad (2)$$

которое является следствием того факта, что атом поляризует не среднее поле \mathbf{E} , а локальное электрическое поле. Для ${}^4\text{He}$ плотность $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, поляризуемость $\alpha = 2 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$ и произведение $n\alpha$ существенно меньше единицы. Поэтому разность $\epsilon - 1$ представляет собой разложение по степеням $n\alpha$, в котором достаточно удержать только первый член разложения $4\pi n\alpha$.

Учитывая, что индукция $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ (\mathbf{P} — поляризация диэлектрика), из (1) и (2) получаем

$$\mathbf{P} = \alpha n \mathbf{E} + \frac{\alpha}{c} n [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (3)$$

В отсутствие внешнего электрического поля с учетом, что поток массы $\mathbf{j} = mn\mathbf{v}$ (m — масса атома гелия), получаем

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{mc} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (4)$$

Поток массы в He II в общем случае равен $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$, где \mathbf{v}_n , \mathbf{v}_s — скорости нормальной и сверхтекучей компонент, а ρ_n , ρ_s — их массовые плотности. Выражение (4) справедливо независимо от способа приведения He II в движение. Ниже будем считать, что движение жидкости индуцируется градиентом температуры.

Рассмотрим задачу о стационарном тепловом потоке в He II , заполняющем капилляр, между концами

которого поддерживается малая разность температур ΔT . При ламинарном движении (анализом которого мы ограничимся) скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s не зависят от продольной координаты (вдоль капилляра). При этом $(\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s = 0$ и уравнения двухжидкостной гидродинамики имеют вид

$$\eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n = \frac{\rho_n}{\rho} \nabla P + \rho_s S \nabla T, \quad (5)$$

$$\nabla P = \rho S \nabla T. \quad (6)$$

Здесь η_n — коэффициент вязкости нормальной компоненты, $\rho = \rho_n + \rho_s$ — полная массовая плотность, ∇P и ∇T — градиенты давления и температуры, S — удельная энтропия. Второе из этих уравнений, называемое уравнением Лондона, есть следствие механического равновесия, возникающего при протекании сверхтекучей жидкости между концами капилляра, в результате чего $\mu(P_1, T_1) = \mu(P_2, T_2)$. Здесь μ — химический потенциал, а P_1, T_1 и P_2, T_2 — давление и температура соответственно на концах капилляра. Из (5) и (6) следует уравнение

$$\eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n = \nabla P, \quad (7)$$

которое эквивалентно уравнению Пуазейля в классической гидродинамике.

Скорость сверхтекучего движения не может зависеть от поперечной координаты r , так как $\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$. Ее значение можно найти из условия отсутствия полного потока массы, т.е. из условия $\rho_n \langle \mathbf{v}_n \rangle + \rho_s \mathbf{v}_s = 0$. Здесь $\langle \mathbf{v}_n \rangle$ — скорость нормальной компоненты, усредненная по площади поперечного сечения капилляра. С учетом этого условия из (4) получаем

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha \rho_n}{mc} [(\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n \rangle) \times \mathbf{H}]. \quad (8)$$

Мы видим, что при наличии магнитного поля поляризация системы локально отлична от нуля, а ее полный дипольный момент обращается в нуль вместе с обращением в нуль полного потока массы. Электрический потенциал вне системы определяется формулой электростатики

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^3} d^3 r, \quad (9)$$

где $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, z_0)$ — радиус-вектор точки наблюдения. Обращение в нуль полного дипольного момента не приводит к отсутствию электрического поля снаружи системы. В общем случае потенциал $\varphi(\mathbf{r}_0)$ отличен от нуля и зависит от магнитного поля \mathbf{H} и скорости нормальной компоненты \mathbf{v}_n , которая, в свою очередь, зависит от градиента температуры. В результате $\varphi(\mathbf{r}_0)$ является функцией ∇T и магнитного поля, т.е. приходим к термомагнитному эффекту.

Решение уравнения (7) зависит от граничных условий и выбранной геометрии задачи. В качестве граничного условия обычно используется равенство нулю скорости нормальной компоненты на стенках капилляра. На микроскопическом уровне этому условию отвечает диффузное рассеяние фононов на границе. В задачах о теплопроводности часто допускается, что кроме диффузного рассеяния имеется некоторая доля зеркального рассеяния. Процесс рассеяния фононов на границе может приближаться к зеркальному при понижении температуры, когда средняя длина волны тепловых фононов становится больше характерного размера шероховатости образца. Этот факт, в свою очередь, несколько

модифицирует граничное условие [34], которое можно получить из условия механического равновесия тонкого слоя жидкости, прилегающего к поверхности образца. Пусть толщина этого слоя будет существенно меньше характерного размера образца, но существенно больше длины свободного пробега фонона относительно нормальных столкновений l^N . Со стороны границы на слой действует сила, равная импульсу, поглощаемому стенкой за единицу времени. С другой стороны, эта сила должна равняться силе трения. Направим ось \mathbf{z} по нормали к границе, а ось \mathbf{x} вдоль градиента температуры. Условие равновесия дает

$$v \left| \frac{\partial v_{nx}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b} = \left[\int_{s_z > 0} d\mathbf{p} p_x s_z n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) + \int_{s_z < 0} d\mathbf{p} p_x s_z \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{s'_z > 0} d\mathbf{p}' R_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'} n(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \right] \left[\int_{s_z > 0} d\mathbf{p} p_x^2 n'_0(\varepsilon) \right]^{-1}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b}. \quad (10)$$

Здесь $v \approx sl^N$ — кинематическая вязкость, s — скорость звука, $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ — функция распределения фононов, \hbar — постоянная Планка, $R_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'}$ — вероятность перехода из состояния с импульсом \mathbf{p}' в состояние с импульсом \mathbf{p} в результате рассеяния на границе, $n_0(\varepsilon) = (e^{\varepsilon/T} - 1)^{-1}$, $n'_0(\varepsilon) = \partial n_0(\varepsilon) / \partial \varepsilon$, \mathbf{r}_b — координата точки поверхности системы. В случае рассеяния, близкого к зеркальному, на границе изменение претерпевает лишь нормальная составляющая фононного импульса. Поэтому кинетическое уравнение будет иметь дрейфовое решение вплоть до границы и функцию распределения $n(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ в (10) можно заменить на дрейфовую так, что $n(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \approx n_0(\varepsilon - \mathbf{v}_n \mathbf{p}) \approx n_0(\varepsilon) - \mathbf{v}_n \mathbf{p} n'_0(\varepsilon)$. В результате находим искомое граничное условие:

$$l^N \left| \frac{\partial v_{n\tau}}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b} = F v_{n\tau} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b}, \quad (11)$$

$$F = \left[\int_{s_z > 0} d\mathbf{p} p_x^2 s_z n'_0(\varepsilon) + \int_{s_z < 0} d\mathbf{p} p_x s_z \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{s'_z > 0} d\mathbf{p}' p'_x R_{\mathbf{p}}^{\mathbf{p}'} n'_0(\varepsilon') \right] \left[s \int_{s_z > 0} d\mathbf{p} p_x^2 n'_0(\varepsilon) \right]^{-1}_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_b}, \quad (12)$$

где $v_{n\tau}$ — тангенциальная составляющая нормальной компоненты скорости, \mathbf{n} — вектор нормали, а величина F имеет смысл вероятности диффузионного рассеяния при одном столкновении со стенкой. Значительная доля зеркального рассеяния фононов на границе может иметь место либо в случае уникально гладкой поверхности, либо, как было замечено выше, в случае низких температур. Однако дальнейшие вычисления показывают, что наиболее благоприятной для получения наибольшего термомагнитного эффекта является область высоких температур. Ограничившись в данной работе рассмотрением систем, в которых поверхность не является совершенно гладкой, ниже будем решать уравнение (7) совместно со стандартным граничным условием $\mathbf{v}_n(\mathbf{r} = \mathbf{r}_b) = 0$.

2. Стационарный случай

Рассмотрим вначале случай цилиндрического кругового капилляра радиуса R . Введем полярную систему координат с началом в центре кругового сечения и осью $\hat{\mathbf{z}}$, направленной вдоль оси капилляра. В этом случае \mathbf{v}_n зависит только от r . Решение уравнения (7) с учетом (6) имеет вид

$$\mathbf{v}_n = \frac{\rho S \Delta T}{4\eta_n L} (R^2 - r^2) \hat{\mathbf{z}}, \quad (13)$$

где L — длина капилляра. После подстановки (13) в (8) находим поляризацию гелия в цилиндре как функцию координат:

$$\mathbf{P}(r) = \frac{\alpha \rho_n}{mc} \frac{\rho S \Delta T R^2}{4\eta_n L} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{R^2} \right) [\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}]. \quad (14)$$

Направим ось $\hat{\mathbf{y}}$ вдоль магнитного поля \mathbf{H} и будем предполагать, что $L \gg R$ и $L \gg z_0$. Подставляя в (9) выражение для \mathbf{P} из (14), получаем после интегрирования по z

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\frac{\alpha\rho_n}{mc} \frac{\rho S \Delta T R^2}{2\eta_n L} H \int_0^R \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{(r_0 \cos \theta_0 - r \cos \theta)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta_0 - \theta)}. \quad (15)$$

Интеграл по θ может быть приведен к виду

$$\frac{\cos \theta_0}{2} \frac{\partial}{\partial r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(r_0^2 - 2r_0 r \cos \theta + r^2) d\theta = 2\pi \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial r_0} \ln \frac{r_0}{r} = \frac{2\pi \cos \theta_0}{r_0}. \quad (16)$$

Выражение (16) не зависит от r . В результате легко убедиться, что интеграл по r в (15) обращается в нуль. Таким образом, мы пришли к обескураживающему результату, что в рассмотренном случае цилиндрического кругового капилляра электрический потенциал вне цилиндра $\varphi(\mathbf{r}_0) \equiv 0$. Этот результат является следствием высокой симметрии цилиндрического кругового капилляра. Учет нелинейных по $n\alpha$ членов в разложении выражения для ϵ не изменяет симметрию задачи, поэтому тождественное обращение в нуль электрического потенциала вне цилиндрического капилляра сохранится и при учете нелинейной зависимости диэлектрической проницаемости ϵ от плотности n . Для систем, не обладающих столь высокой симметрией относительно поворотов вокруг оси капилляра, потенциал $\varphi(\mathbf{r}_0)$ будет отличен от нуля. В частности, он будет отличен от нуля для капилляра эллиптического сечения.

Рассмотрим капилляр эллиптического сечения с полуосями a и b . И пусть между концами капилляра создана малая разность температур ΔT . В случае $a \gg b$ приходим к сильно анизотропной системе. Неожиданным образом оказывается, что при этом в зависимости от направления магнитного поля результаты могут измениться на несколько порядков величины.

Направим ось $\hat{\mathbf{x}}$ вдоль полуоси a , ось $\hat{\mathbf{y}}$ — вдоль полуоси b , ось $\hat{\mathbf{z}}$ — вдоль оси капилляра. При произвольном соотношении между a и b скорость нормальной компоненты, полученная с помощью решения (7), равна [35]

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = \frac{\rho S \Delta T}{2\eta_n L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (17)$$

Считая, что магнитное поле \mathbf{H} направлено вдоль оси $\hat{\mathbf{y}}$, находим из (8) и (17) поляризацию жидкости

$$\mathbf{P}(x, y) = -P_0 \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad (18)$$

где использовано обозначение

$$P_0 = \frac{\alpha\rho_n H}{mc} \frac{\rho S \Delta T}{2\eta_n L} b^2. \quad (19)$$

Электрический потенциал вне жидкости может быть получен подстановкой этого выражения для поляризации в (9). Будем, как и раньше, считать, что $L \gg a, b$ и

$L \gg z_0$. Тогда, измеряя все длины (включая $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$) в единицах a и вводя обозначение $\gamma = b/a$, из (9) после интегрирования по z получаем

$$\varphi(x_0, y_0) = -\frac{2aP_0}{1+\gamma^2} \int_{-1}^1 dx \int_{-\gamma\sqrt{1-x^2}}^{\gamma\sqrt{1-x^2}} dy \frac{(1/2 - x^2 - \gamma^{-2}y^2)(x_0 - x)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}. \quad (20)$$

Простой анализ этого выражения показывает, что электрический потенциал имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} \varphi(-x_0, y_0) &= -\varphi(x_0, y_0) \\ \varphi(x_0, -y_0) &= \varphi(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (21)$$

Из первого равенства в (21) вытекает, что при $x_0 = 0$ и произвольном y_0 потенциал φ обращается в нуль. Вспомня, что магнитное поле направлено вдоль оси $\hat{\mathbf{y}}$, заключаем отсюда, что на оси, параллельной магнитному полю и проходящей через центр эллипса, потенциал $\varphi \equiv 0$.

Интегрирование в (20) не удается выполнить при произвольных x_0 и y_0 . Аналитическое выражение можно получить при $y_0 = 0$. Однако даже в этом случае ответ оказывается весьма громоздким. Поэтому приведем ответы лишь для некоторых частных случаев. Представляют интерес три случая. В первом случае $\gamma \sim 1$, так что сечение капилляра близко к окружности. Во втором случае $\gamma \ll 1$ и система моделирует щель. При этом магнитное поле приложено поперек щели. И наконец, в третьем случае $\gamma \gg 1$; система снова моделирует щель, но магнитное поле приложено вдоль щели.

В первом случае при $x_0 = 1$ (в размерных величинах $x_0 = a$, т.е. на поверхности капилляра) потенциал равен

$$\varphi = \frac{2\pi b P_0}{3} \frac{1-\gamma}{(1+\gamma^2)(1+\gamma)^2}. \quad (22)$$

Это выражение справедливо при произвольных γ . При $x_0 \gg 1$, т.е. вдали от капилляра

$$\varphi = \frac{\pi b P_0 (1-\gamma^2)}{12(1+\gamma^2)x_0^3}. \quad (23)$$

При $\gamma = 1$, т.е. при $a = b = R$, когда эллипс превращается в окружность, выражения (22) и (23) обращаются в

нуль в соответствии с полученным ранее результатом. Этот результат имеет место при произвольных x_0, y_0 .

Во втором случае ($\gamma \ll 1$) при произвольных x_0

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, 0) = & \\ = \frac{2\pi b P_0}{3} & \left\{ \sqrt{x_0^2 - 1} + x_0 \left[4x_0 \left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - 1} \right) - 3 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Легко видеть, что при $x_0 = 1$ этот потенциал переходит в (22). Отметим также, что вблизи поверхности капилляра напряженность электрического поля расходится по закону $E_x(x_0, 0) \sim 1/\sqrt{x_0 - 1}$.

В третьем случае при $x_0 \ll \gamma$ потенциал равен

$$\varphi(x_0, 0) = -\frac{2\pi b P_0}{3\gamma^3} \left\{ 1 - 3\frac{x_0}{\gamma} \right\}. \quad (25)$$

При $x_0 \gg \gamma$ выражение для потенциала дается формулой (23). Отметим, что в этом случае в знаменателе выражений (23) и (25) стоит очень большая величина (γ^3 в (25) и x_0^3 в (23)). В результате потенциал на несколько порядков меньше, чем при $\gamma \sim 1$ и $\gamma \ll 1$. Поэтому не будем далее рассматривать этот случай.

При произвольных x_0 и y_0 численное интегрирование позволяет найти потенциал φ при движение от точек с координатами $(x_0, y_0 = 0)$ к точкам $(x_0 = 0, y_0)$. Можно было бы ожидать монотонного убывания потенциала $\varphi(x_0, y_0)$. Оказывается, это не так. Ниже приведены графики зависимостей потенциала φ на поверхности капилляра от полярного угла $\theta_0 = \arctg(y_0/x_0)$ для $\gamma \sim 1$ и $\gamma \ll 1$ (см. рис. 1 и 2).

Как видно на графиках, потенциал обращается в нуль не только на плоскости $x_0 = 0$. Дополнительные нули потенциала аналитически можно найти для капилляра слабо некругового сечения так, что $a - b \ll b$. Раскладывая (20) по степеням $1 - \gamma$, получаем для потенциала во втором порядке

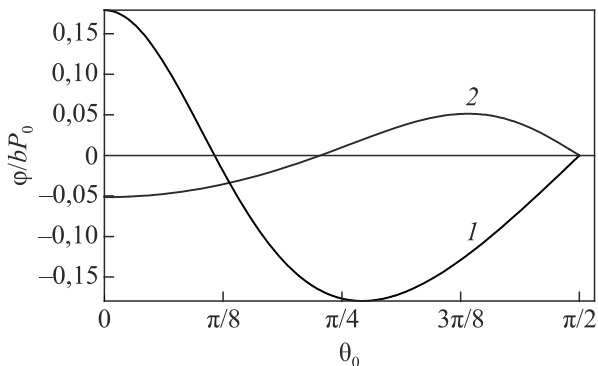


Рис. 1. Угловые зависимости потенциала φ на поверхности капилляра при $\gamma \sim 1$. Кривая 1 отвечает магнитному полю, направленному вдоль малой полуоси эллипса, кривая 2 — вдоль большой полуоси эллипса.

$$\varphi(r_0, \theta_0) = \frac{\pi P_0 b (1 - \gamma) \left(2r_0^2 \cos(3\theta_0) + 3(1 - \gamma) \cos(5\theta_0) \right)}{24 r_0^5}. \quad (26)$$

Здесь $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ и $\gamma \rightarrow 1$. Приравнивая этот потенциал нулю, получаем два угла θ_0 , при которых потенциал обращается в нуль:

$$\theta_{01} = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_{02} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}(1 - \gamma)}{4r_0^2}. \quad (27)$$

Как видно, помимо полученного из симметричных соображений ответа $\theta_0 = \pi/2$, в интервале $[0, \pi/2]$ существует еще одна поверхность, на которой потенциал тождественно обращается в нуль. На больших расстояниях от капилляра, т.е. при $r_0 \gg 1$ (в размерных величинах при $r_0 \gg a$), этот угол равен $\pi/6$. На поверхности капилляра это значение смещается в сторону больших либо меньших углов в зависимости от знака разности $1 - \gamma$ (см. рис. 1).

Из анализа графиков и выражений (22)–(25) следует, что наиболее благоприятным для получения большого потенциала φ является случай $\gamma \ll 1$ (магнитное поле \mathbf{H} приложено поперек щели). При этом максимальное значение потенциала достигается в области малых углов θ_0 . В частности, при $\theta_0 = 0$ потенциал равен

$$\varphi = \frac{\pi b^3}{3} \frac{\alpha \rho_n H}{mc} \frac{\rho S \Delta T}{\eta_n L}. \quad (28)$$

Зависимость потенциала φ от температуры определяется зависимостью от температуры нормальной плотности ρ_n , вязкости η_n , а также удельной энтропии S . Зависимостью от температуры полной плотности ρ и поляризуемости α можно пренебрегать. В области высоких температур (при $T > 1,4$ К) основной вклад в нормальную плотность ρ_n и удельную энтропию S дают ротоны, плотность которых пропорциональна $\exp(-\Delta/T)$, где $\Delta = 8,6$ К — ротонная щель. Вязкость

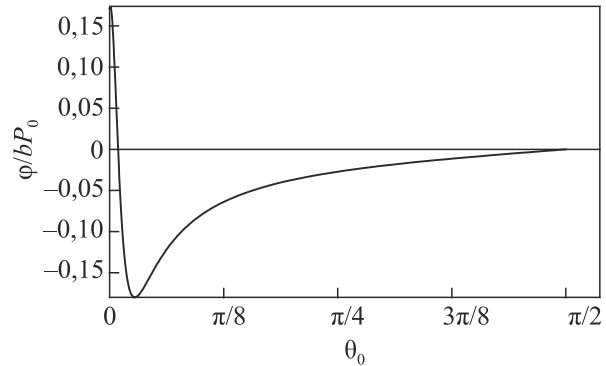


Рис. 2. Угловая зависимость потенциала φ на поверхности капилляра при $\gamma = 0,05$; магнитное поле направлено поперек большой полуоси эллипса.

в этой области температур остается постоянной. При низких температурах нормальная плотность $\rho_n \sim T^4$, а энтропия $S \sim T^3$. При температурах ниже 1,4 К вклад ротонной вязкости пренебрежимо мал по сравнению с фононным. Фононная часть коэффициента вязкости возрастает с убыванием температуры по экспоненциальному закону, а при температуре ниже 0,7 К фононная вязкость $\eta_n \sim T^{-5}$ [36].

В рассмотренных до сих пор системах на поверхности отсутствовали острые углы. В электростатике, однако, известно, что особенно большую напряженность электрических полей можно ожидать вблизи острых краев системы. Поэтому представляет интерес вопрос о распределении электрического поля вокруг капилляра с сечением в виде многоугольника. В качестве примера выберем капилляр с сечением в виде равностороннего треугольника со стороной a , для которого уравнение гидродинамики (7) решается точно.

Обращаясь к задаче об электрических полях, возникающих снаружи капилляра треугольного сечения, будем считать, что ось \hat{x} совпадает с «нижней» стороной треугольника, ось \hat{y} совпадает с высотой, опущенной из вершины, противоположной этой стороне, а ось \hat{z} параллельна оси капилляра. Скорость нормальной компоненты, полученная в результате решения (7), равна [35]

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = \frac{\rho S \Delta T}{2\sqrt{3}\eta_n L a} \left(\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 - 3x^2 \right) y \hat{z}. \quad (29)$$

Подставляя это выражение для скорости в (8) и далее в (9), получаем выражение для электрического потенциала в окружающем пространстве. В отличие от капилляра кругового сечения, в данном случае потенциал не равен нулю тождественно. Результат дается весьма громоздким аналитическим выражением. Ниже приведены рисунки (см. рис. 3) распределения электрического поля в пространстве для случаев, когда внешнее магнитное поле направлено вдоль оси \hat{x} (рис. 3(а)) и вдоль оси \hat{y} (рис. 3(б)). Ввиду линейности задачи по магнитному полю результат при произвольном расположении магнитного поля может быть получен сложением результатов для компонент поля H_x и H_y .

На рисунках видно, что напряженность электрического поля, как и ожидалось, достигает наибольших значений вблизи углов треугольника $(\pm a/2, 0)$ и $(0, a\sqrt{3}/2)$. При этом связь компонент электрического и магнитного полей может быть записана с помощью вспомогательного вектора $\mathbf{q} = (q_x, q_y, 0)$:

$$E_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{q}, \quad E_y = [\mathbf{H} \times \mathbf{q}]_z. \quad (30)$$

Для нахождения электрического поля вблизи угла с координатами $(a/2, 0)$ удобно выполнить параллельный перенос введенной ранее системы координат вдоль оси

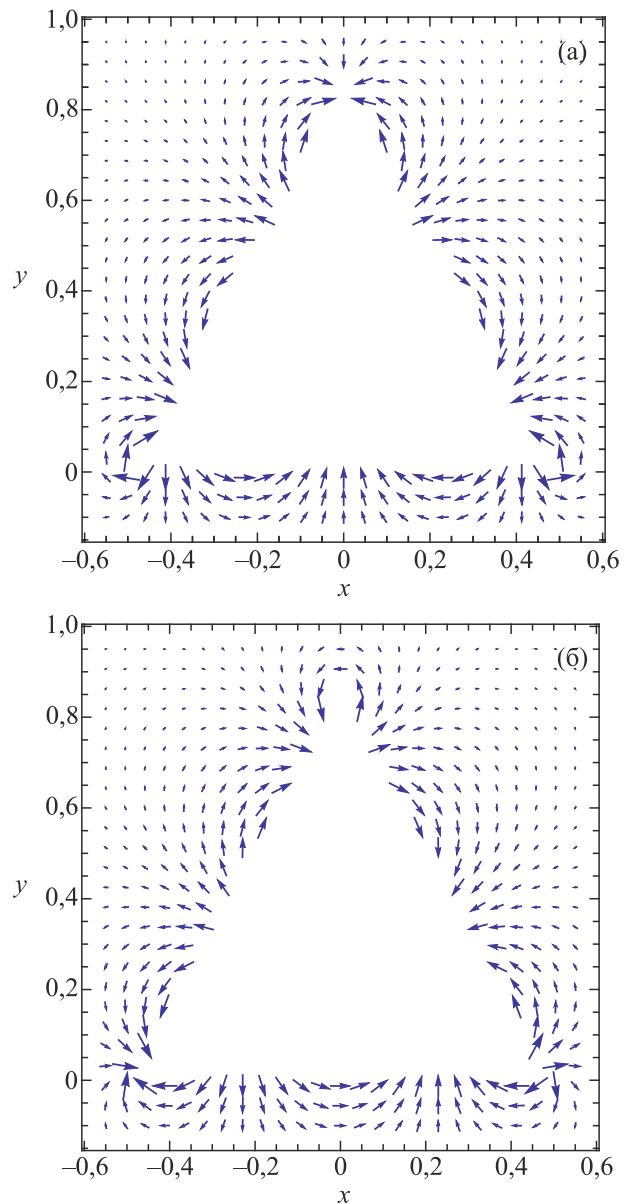


Рис. 3. Распределение электрического поля вне капилляра треугольного сечения в случаях, когда магнитное поле направлено по оси \hat{x} (а) и по оси \hat{y} (б). Все длины на рисунках измеряются в единицах a .

\hat{x} на расстояние $a/2$ (в результате начало координат будет привязано к углу $(a/2, 0)$) и перейти к полярной системе координат. Вычислив с помощью (29) поляризацию \mathbf{P} и подставив полученное выражение для \mathbf{P} в (9), найдем потенциал ϕ , дифференцируя который, получим поле \mathbf{E} . Затем с помощью (30) найдем компоненты вектора \mathbf{q} :

$$q_x(r, \theta) = \frac{\alpha \rho_n}{mc} \frac{3\rho S \Delta T}{160\eta_n L} a^3 \left(\frac{28\sqrt{3}\pi}{9} - 20 - \frac{\sqrt{3}\theta}{3} + \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right),$$

$$q_y(r, \theta) = \frac{\alpha \rho_n}{mc} \frac{\sqrt{3}\rho S \Delta T}{160\eta_n L} a^3 \left(-20 + \frac{10\pi}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\theta + \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right). \quad (31)$$

Здесь $\theta \in (-\pi; 2\pi/3)$ и предполагается, что $r \ll a$.

Для нахождения электрического поля вблизи угла с координатами $(0, a\sqrt{3}/2)$ удобно выполнить параллельный перенос системы координат на расстояние $a\sqrt{3}/2$ вдоль оси \hat{y} (в результате начало координат будет привязано к углу $(0, a\sqrt{3}/2)$). Переходя, как и раньше, к полярной системе координат, найдем, что теперь компоненты вектора \mathbf{q} даются выражениями

$$q_x(r, \theta) = -\frac{\alpha\rho_n \sqrt{3}\rho S \Delta T}{mc 160\eta_n L} a^3 (\pi - 2\theta),$$

$$q_y(r, \theta) = -\frac{\alpha\rho_n \sqrt{3}\rho S \Delta T}{mc 80\eta_n L} a^3 \left(-20 + 19 \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right). \quad (32)$$

Здесь $\theta \in (-\pi/3; 4\pi/3)$ и, как и прежде, $r \ll a$. Отметим, что сумма слагаемых в круглых скобках (31) и (32), не содержащих логарифм, порядка единицы, поэтому при $r \ll a$ логарифмические слагаемые в этих выражениях становятся определяющими.

Как отмечалось выше, в случае капилляра эллиптического сечения, моделирующего щель, вблизи точек с нулевым полярным углом также имеет место расходимость электрического поля (см. (24)). Однако, в отличие от случая капилляра треугольного сечения, эта расходимость степенная, а не логарифмическая, т.е. более «сильная». Другим отличием капилляра треугольного сечения является иной закон спада потенциала с расстоянием на больших расстояниях от системы. При этом закон спада зависит от направления магнитного поля по отношению к выбранной нами оси \hat{x} . Потенциал спадает как четвертая степень расстояния до капилляра, если магнитное поле параллельно оси \hat{x} , и как пятая степень, если магнитное поле перпендикулярно оси \hat{x} .

Из (28), (31) и (32) следует, что потенциал и электрическое поле снаружи образца пропорциональны кубу характерного поперечного размера сосуда d и может показаться, что увеличивая d , можно существенно увеличить величину эффекта. Однако такое изменение возможно лишь в некоторых пределах. Причина в том, что при фиксированной скорости \mathbf{v}_n с ростом d ламинарное движение жидкости переходит в турбулентное, и мы выходим за пределы применимости нашего расчета. В эксперименте переход в турбулентное состояние проявляется в появлении нелинейной зависимости теплового потока W от разности температур между концами капилляра.

В пионерской работе [37] показано, что при достижении тепловым потоком $W = \rho_s S T |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ некоторой критической величины W_{c1} ламинарное движение разрушается путем появления в сверхтекучей жидкости квантованных вихрей и вихревых колец, которые затем образуют вихревой клубок (состояние T1). Дальнейшие исследования показали, что существует второй критиче-

ский тепловой поток W_{c2} , при превышении которого вихревая плотность существенно увеличивается (состояние T2). Переход от состояния T1 к состоянию T2 связывается с переходом в турбулентное состояние нормальной компоненты (см., например, [38,39]). Результаты существенно зависят от формы канала. Два перехода имеют место в эллиптических каналах с размерами $a \approx b$. При $a \gg b$ происходит только один переход в состояние T2 [40]. В случае канала треугольного сечения, по-видимому, должны наблюдаться два перехода.

Критическими кольцами в состоянии T1 являются кольца с радиусом порядка характерного размера капилляра d . Для появления таких колец разность $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ должна стать порядка $(\hbar/md) \ln(d/\xi)$, где ξ — радиус вихревого ядра [41]. Переход в турбулентное состояние T2 должен происходить при достижении нормальной компонентой критической скорости $R_n \eta_n / \rho_n d$ (R_n — число Рейнольдса), подобно тому, как это имеет место в вязкой жидкости. Существование критических скоростей определяет максимально допустимый размер d , при котором сохраняется ламинарное движение жидкости. Тем самым накладывается ограничение на величину наблюдаемого электрического потенциала (28), а также полей (30).

Приведем ограничения на величину электрического потенциала в случае капилляра эллиптического сечения, который может быть получен в режиме ламинарного протекания жидкости. При $\gamma \sim 1$ это ограничение связано с ограничением на относительную скорость $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s| < (\hbar/mb) \ln(b/\xi)$. Учитывая, что $\mathbf{v}_s = -(\rho_n/\rho_s)\mathbf{v}_n$ и $v_n \sim \langle v_n \rangle$, из (17), (19) и (22) получаем

$$\phi < \frac{4\pi\hbar \alpha H}{3m mc} \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} \ln\left(\frac{b}{\xi}\right) \equiv \phi_{c1}. \quad (33)$$

При $\gamma \ll 1$ ограничение накладывается на скорость нормальной компоненты $\langle v_n \rangle < R_n \eta_n / \rho_n b$. Ограничение на ϕ в этом случае имеет вид

$$\phi < \frac{4\pi \alpha H}{3 mc} R_n \eta_n \equiv \phi_{c2}. \quad (34)$$

Рассматривая область температур, в которой $\rho_s \sim \rho_n \sim \rho$, находим, что $\phi_{c2} > \phi_{c1}$. Так, для $H = 10$ Тл, $\alpha = 2 \cdot 10^{-25}$ см², $R_n = 2 \cdot 10^3$, $\eta_n = 2$ мкП и $\rho = 10^{-1}$ г/см³ имеем $\phi_{c1} = 2 \cdot 10^{-8}$ В и $\phi_{c2} = 5 \cdot 10^{-7}$ В. Таким образом, приходим к выводу, что для получения наибольшего потенциала ϕ следует использовать не капилляр кругового сечения ($\gamma \sim 1$), а щель ($\gamma \ll 1$), причем, как отмечалось выше, магнитное поле \mathbf{H} должно быть направлено поперек щели. Найдем поперечный размер щели b_c , который соответствует наибольшему потенциалу ϕ_{c2} . Для капилляра длиной $L = 1$ см, между концами которого создана разность температур $\Delta T = 10^{-3}$ К, из выражения (28) в указанной области температур (в которой $S = 10^6$ эрг/(г·К)) находим $b_c = 10^{-3}$ см. Критический

размер капилляра треугольного сечения оказывается такого же порядка величины.

Ограничение на величину поперечного размера капилляра, связанное с переходом от ламинарного движения к турбулентному, более «мягкое» для пленки сверхтекучего гелия, покрывающего капилляр. Для капилляра эллиптического сечения с полуосями a и b скорость нормальной компоненты дается выражением, которое отличается знаком от выражения (17), т.е.

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = \frac{\rho S \Delta T}{2\eta_n L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (35)$$

В этом случае $x \geq a$ и $y \geq b$. После усреднения (35) по площади капилляра, с помощью (8) получаем выражение для поляризации:

$$\mathbf{P}(x, y) = -\frac{P_0 a^2}{a^2 + b^2} \times \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 - \frac{\gamma(3 + 2\gamma + 3\gamma^2) + \delta(1 + \gamma)^3 + \delta^2(1 + \gamma^2)}{4\gamma^2(1 + \gamma + \delta)} \delta \right) \hat{\mathbf{x}}. \quad (36)$$

Здесь $\delta = h/a$, h — толщина пленки. Подстановка (36) в (9) показывает, что электрический потенциал над пленкой также обладает симметричными свойствами (21), т.е. потенциал, как и прежде, тождественно равен нулю на плоскости, параллельной магнитному полю и проходящей через ось капилляра. Кроме того, как и в случае капилляра кругового сечения, т.е. при $\gamma = b/a = 1$, потенциал снаружи системы тождественно обращается в нуль.

При произвольных γ распределение электрического потенциала вне системы удастся найти аналитически на полуоси a . Как и выше, наиболее благоприятной ситуацией для получения максимального эффекта, является случай $\gamma \ll 1$ («линза», покрытая пленкой сверхтекучего гелия, поперек которой приложено магнитное поле). Выражение для потенциала оказывается весьма громоздким, и мы запишем ответ в двух предельных случаях. На поверхности системы

$$\varphi(x = a + h) = 2\pi b h^2 \frac{\alpha \rho_n H}{mc} \frac{\rho S \Delta T}{\eta_n L}. \quad (37)$$

Вдали от системы

$$\varphi(x \gg a) = \frac{\pi b h^2}{16} \frac{\alpha \rho_n H}{mc} \frac{\rho S \Delta T}{\eta_n L} \frac{a^3}{x^3}. \quad (38)$$

В обоих случаях предполагается, что сверхтекучая пленка тонкая и ее толщина h удовлетворяет неравенствам $h \ll b \ll a$. Подставляя в (37) численные значения величин, использованных для оценки выражений (33) и (34), для потенциала на поверхности системы получаем $\varphi \sim (b/L) N^2 10^{-12}$ В, где N — число атомных слоев в пленке гелия. Предельное значение выражения достигается для насыщенных пленок с $N \approx 100$. Принимая $b/L \sim 10^{-2}$, получаем $\varphi \sim 10^{-10}$ В.

3. Нестационарный случай

До сих пор считалось, что созданный между концами капилляра перепад температур не зависит от времени. Однако предсказываемый эффект должен иметь место и в случае, когда такой перепад создается с помощью погруженного в He II тела с периодически изменяющейся температурой, т.е. в условиях распространения в He II второго звука.

Пусть He II заполняет цилиндр кругового сечения радиуса R , и второй звук распространяется вдоль оси цилиндра z . Известно, что в пренебрежении тепловым расширением β в волнах первого звука имеют место колебания давления и плотности, а в волнах второго звука испытывают колебания только температура и энтропия. При учете теплового расширения в волне второго звука возникают колебания плотности и давления. Эти колебания приводят к отличному от нуля потоку массы j_z , который связан с осциллирующей частью температуры T' . В случае $R \gg \lambda$, где λ — длина волны второго звука, зависимость j_z от радиальной координаты r можно пренебречь и поток j_z связан с T' соотношением (см., например, [36])

$$j_z = -\frac{\beta \rho u_1^2 u_2}{u_1^2 - u_2^2} T', \quad (39)$$

где u_1 и u_2 — скорость первого и второго звуков соответственно. Если внешнее магнитное поле направлено поперек цилиндра (вдоль оси y), то в гелии, согласно (4), возникает электрическая поляризация $P_x = -\alpha H j_z / mc$. Электрический потенциал снаружи цилиндра получается подстановкой этой поляризации в (9). Подробно вычисления возникающего интеграла можно найти в работе [29]. Учитывая, что при $T > 0,8$ К выполняется условие $u_1 \gg u_2$, и полагая, что высота цилиндра L существенно превышает длину волны второго звука λ , находим выражение для электрического потенциала в точке с координатами $(r_0, \theta_0, 0)$:

$$\varphi(r_0, \theta_0, t) = 4\pi\beta\rho u_2 \frac{\alpha HR}{mc} I_1(kR) K_1(kr_0) T'_a \cos(\theta_0) \cos(\omega t). \quad (40)$$

Здесь k — волновое число, ω — частота, T'_a — амплитуда температуры в волне второго звука, I_1 и K_1 — модифицированные функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно.

При получении (40) мы предполагали, что $R \gg \lambda$, и пренебрегали зависимостью потока j_z от радиальной координаты r . Однако если радиус цилиндра порядка или меньше длины волны второго звука, такое допущение оказывается неоправданным. В этом случае для корректного решения задачи о распространении второго звука следует использовать полную систему гидро-

динамических уравнений для сверхтекучей жидкости, дополненную граничными условиями:

$$\mathbf{v}_n(r=R)=0, \quad v_{sr}(r=R)=0, \quad (41)$$

где v_{sr} — радиальная составляющая сверхтекучей компоненты. При решении этой системы уравнений удобно воспользоваться подходом, развитым в работе [42]. Решение линеаризованной системы гидродинамических уравнений ищется в виде

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n = L_1 \nabla \phi_1 + L_2 \nabla \phi_2 + \mathbf{v}_\eta, \\ \mathbf{v}_s = N_1 \nabla \phi_1 + N_2 \nabla \phi_2, \\ T' = M_1 \phi_1 + M_2 \phi_2, \end{cases} \quad (42)$$

где ϕ_1, ϕ_2 и \mathbf{v}_η — некоторые функции координат и времени (временная зависимость выберется в виде множителя $\exp(-i\omega t)$), подлежащие определению; $L_{1,2}, N_{1,2}, M_{1,2}$ — амплитуды. Выбор решения в виде (42) оправдан тем, что линеаризованная система гидродинамических уравнений для сверхтекучей жидкости в безграничной среде имеет три линейно независимых решения. Таковыми являются первый звук, в котором отсутствуют колебания температуры (при $\beta = 0$), второй звук, в котором отсутствуют колебания плотности (снова при $\beta = 0$), а также сильнозатухающая вязкая волна, в которой отсутствуют как осцилляции температуры, так и плотности. При этом в вязкой волне вовлекается в движение лишь нормальная компонента. В результате подстановки (42) в систему гидродинамических уравнений, находится связь между амплитудами $L_{1,2}, N_{1,2}, M_{1,2}$ (их удастся выразить через две амплитуды, например, через N_1 и N_2), а также система уравнений для функций $\phi_{1,2}$ и \mathbf{v}_η . Непосредственное решение этой системы дает

$$\begin{cases} \phi_{1,2} = J_0(r\sqrt{k_{1,2}^2 - k^2}) \exp[i(kz - \omega t)], \\ v_{nr} = -i \frac{A_\eta}{\sqrt{k_\eta^2 - k^2}} J_1(r\sqrt{k_\eta^2 - k^2}) \exp[i(kz - \omega t)], \\ v_{nz} = A_\eta J_0(r\sqrt{k_\eta^2 - k^2}) \exp[i(kz - \omega t)]. \end{cases} \quad (43)$$

Здесь $k_{1,2}$ и k_η — волновые числа первого и второго звуков и вязкой волны соответственно, J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, A_η — амплитуда. Подстановка (43) в (42) и далее в (41) приводит к линейной однородной системе уравнений относительно величин N_1, N_2 и A_η . Дисперсионное уравнение получается приравниванием нулю определителя этой системы. В случае выполнения условий $u_1 \gg u_2$ и $\lambda \gg R \gg \lambda_\eta$, где $\lambda_\eta = 2\pi\sqrt{\eta/\omega\rho_n}$ — длина вязкой волны, удастся разрешить это уравнение. Закон дисперсии для случая распространения волны второго звука при этом имеет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{u_2^2} \left[1 + i\delta \frac{\rho_s}{\rho_n} - i\delta \frac{2\beta\rho_s}{\rho} \right], \quad (44)$$

где $\delta \equiv -i \left[2\rho_n J_1(k_\eta R) / \rho(k_\eta R J_0(k_\eta R) - 2J_1(k_\eta R)) \right]$. Это выражение отличается от аналогичного выражения в работе [42] наличием третьего слагаемого. Комбинируя (42), (43) и (44), находим амплитудные значения поля скоростей

$$\begin{cases} v_{sr} = 0, \quad v_{sz} = \frac{iN_2\omega}{u_2}, \\ v_{nr} = \frac{N_2\rho_s\omega^2}{u_2^2\rho_n k_\eta} \left[\frac{J_1(k_\eta r)}{J_2(k_\eta R)} - \frac{r}{R} \frac{J_1(k_\eta R)}{J_2(k_\eta R)} \right], \\ v_{nz} = \frac{iN_2\rho_s\omega}{u_2\rho_n} \left(\frac{J_0(k_\eta r)}{J_0(k_\eta R)} - 1 \right) \left(1 - \frac{\beta\rho u_2^2}{S\rho_s} \right). \end{cases} \quad (45)$$

С помощью этих выражений вычисляем полный поток массы $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$. Его z -я компонента равна

$$j_z = - \left(\beta\rho u_2 + \frac{\rho_s S}{u_2} \frac{J_0(k_\eta r)}{J_0(k_\eta R)} \right) T'. \quad (46)$$

Подстановка этого выражения для потока массы в (4) и далее в (9) дает выражение для электрического потенциала в точке с координатами $(r_0, \theta_0, 0)$:

$$\begin{aligned} \varphi(r_0, \theta_0, t) = 4\pi \frac{\alpha HR}{mc} K_1(kr_0) \times \\ \times \left[\beta\rho u_2 I_1(kR) - \frac{\rho_s S}{u_2} \frac{\lambda_\eta}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right] T'_a \cos(\theta_0) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (47)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках соответствует объемному вкладу потока массы в эффект (сравни с (40)), тогда как второе слагаемое является следствием учета граничных условий в задаче о втором звуке. С учетом неравенства $kR \ll 1$ находим, что отношение второго слагаемого в квадратных скобках (47) к первому равно $2\rho_s S \sqrt{\eta_n} / \beta\rho u_2^2 R \sqrt{\omega\rho_n}$. Для области высоких температур (при $T > 1,4$ К) это отношение меньше единицы и вкладом граничного условия можно пренебречь. В области низких температур указанное отношение пропорционально $\beta^{-1} T^{-3/2}$. Поскольку коэффициент теплового расширения при $T \ll 1$ К уменьшается с уменьшением температуры, можно утверждать, что учет граничных условий при решении задачи о втором звуке существенно перенормирует электрический потенциал (47), и второе слагаемое в квадратных скобках (47) становится существенно больше первого. Также стоит отметить, что потенциал (47), как и потенциал (40), зависит от полярного угла точки наблюдения по закону косинуса и, аналогично стационарному случаю (см. рис. 1, 2), обращается в нуль при $\theta_0 = \pi/2$. Другими словами, на плоскости, параллельной магнитному полю \mathbf{H} и проходящей через ось цилиндра, потенциал тождественно равен нулю.

При выполнении экспериментов со вторым звуком следует различать электрические поля, предсказываемые в данной работе, от разности потенциалов между концами образца, о которой сообщается в [1]. Потенциалы (40) и (47) имеют характерную угловую зависимость. Кроме того, в настоящей работе речь идет об электрических полях снаружи образца, в то время как в [1] измеряется разность потенциалов внутри образца.

Прежде чем привести численные оценки, заметим, что выражения для потенциала φ при распространении второго звука, как и в статическом случае, получены в предположении ламинарного режима. К сожалению, нам не известны аналитические критерии перехода от ламинарного режима к турбулентному в случае распространения второго звука. В экспериментах диаметр цилиндрического образца обычно лежит в интервале $R = 0,1 - 1$ см (см., например, [40]). При этом амплитудное значение температуры, соответствующее ламинарной области, не превышает нескольких милликельвинов. Для $T = 1,5$ К, $H = 10$ Тл, $\omega = 2,5 \cdot 10^3$ Гц, $T'_a = 10^{-3}$ К и $R = 0,5$ см потенциал на поверхности цилиндра в точке с координатами $r_0 = R$, $\theta_0 = 0$ равен $\varphi = 4 \cdot 10^{-8}$ В. При $T = 0,8$ К, $H = 10$ Тл, $\omega = 2,5 \cdot 10^3$ Гц, $T'_a = 10^{-3}$ К (ответ в этой области температур не зависит от R) имеем $\varphi = 1,5 \cdot 10^{-8}$ В.

Предсказываемый эффект реализуется и в случае распространения третьего звука по гелиевой пленке толщиной h , покрывающей, например, цилиндрический капилляр. При этом нормальная компонента заторможена, и вклад в полный поток массы вносит лишь сверхтекучая компонента, осциллирующая параллельно подложке. Полагая, что длина волны третьего звука существенно меньше длины цилиндра, после непосредственного интегрирования (9) получаем распределение потенциала на плоскости поперечного сечения цилиндра, которое делит цилиндр пополам:

$$\varphi(r_0, \theta_0, t) = \frac{4\pi\alpha\rho_s H v_{sa} h}{mc} k_3 R \cos(\theta_0) \cos(\omega_3 t) \times \begin{cases} K_0(k_3 R) I_1(k_3 r_0), & r_0 < R, \\ -I_0(k_3 R) K_1(k_3 r_0), & r_0 > R. \end{cases} \quad (48)$$

Здесь k_3 — волновое число в волне третьего звука, ω_3 — частота третьего звука, v_{sa} — амплитудное значение скорости сверхтекучей компоненты, I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно. Первый ответ в (48) при $r_0 < R$ соответствует случаю, когда пленка покрывает внутреннюю сторону цилиндра и потенциал ищется внутри цилиндра, тогда как второй ответ при $r_0 > R$ отвечает случаю, когда пленка покрывает внешнюю сторону цилиндра и наблюдение потенциала производится снаружи цилиндра. Максимальное значение величины электрического потенциала достигается для $r_0 < R$ при условии $k_3 R \gg 1$ ($k_3 R K_0(k_3 R) I_1(k_3 R) = 0,5$), а для $r_0 > R$ при $k_3 R \ll 1$ ($k_3 R K_0(k_3 R) I_1(k_3 R) = 1$).

Предполагая, что третий звук возбуждается перепадом температур между концами пленки, можно определить связь потенциала φ с температурой, которая задается связью с температурой скорости сверхтекучей компоненты v_{sa} в (48). Последняя сильно зависит от значения равновесной температуры. Так, в высокотемпературной области на процесс распространения третьего звука сильное влияние оказывает испарение пленки, тогда как в низкотемпературной области им можно пренебречь (см. [29,43]). В результате

$$v_{sa} = \frac{u_3 T' C}{T S}, \quad T \ll 1 \text{ К}, \quad (49)$$

$$v_{sa} = \frac{u_3 T' L_{ev} h^3}{T \alpha_V}, \quad T \sim 1 \text{ К}. \quad (50)$$

Здесь u_3 — скорость третьего звука, C — удельная теплоемкость гелия, L_{ev} — скрытая теплота парообразования, α_V — параметр, характеризующий интенсивность действия сил Ван-дер-Ваальса, действующих на пленку со стороны подложки (цилиндра).

Переходя к оценке величины электрического потенциала (48), получаем для $H = 10$ Тл, $r_0 = R$, $\theta_0 = 0$ максимальное значение φ порядка $\varphi = 10^{-12} N v_{sa}$ (с·В/см), где N — число атомных слоев в пленке гелия. Для насыщенной пленки, т.е. при $N \sim 100$ и $v_{sa} \sim 1$ м/с, находим $\varphi \sim 10^{-10}$ В.

В работах [28,29] показано, что в отсутствие магнитного поля при распространении по пленке, покрывающей цилиндр, третьего звука в окружающем пространстве возникает электрическое поле \mathbf{E}_0 , потенциал которого φ_0 дается выражениями

$$\varphi_0(r_0, \theta_0, t) = \frac{4\pi A e a_B^5 n_3 \rho_s v_{sa} k_3 R \cos(\omega_3 t)}{h^3 \rho u_3} \times \begin{cases} K_1(k_3 R) I_0(k_3 r_0), & r_0 < R, \\ -I_1(k_3 R) K_0(k_3 r_0), & r_0 > R, \end{cases} \quad (51)$$

где A — безразмерный коэффициент порядка единицы, a_B — боровский радиус, n_3 — плотность частиц гелия. Сравнение потенциала φ_0 в отсутствие магнитного поля с потенциалом (48) при наличии поля показывает, что отношение потенциалов $\varphi / \varphi_0 \sim h^4 \alpha H u_3 / e a_B^5 c \sim 10^{-5} N^{5/2}$.

Заключение

В заключение отметим, что в работе рассмотрен режим ламинарного течения жидкости. При увеличении теплового потока происходит переход от ламинарного к турбулентному течению. Рассмотренный электрический эффект должен иметь место и в турбулентном режиме, поскольку в этом режиме локальные потоки массы могут быть отличными от нуля. При этом возможно изменение функциональной зависимости возникающего

электрического поля, как от координаты, так и от геометрических размеров сосуда. Наблюдение поведения электрического поля при изменении величины теплового потока может служить экспериментальным тестом по обнаружению перехода жидкости из ламинарного в турбулентное состояние. Мы предполагаем вернуться к рассмотрению этого круга вопросов.

1. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004) [*Low Temp. Phys.* **30**, 994 (2004)].
2. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 623 (2005)].
3. Т.В. Чаговцев, *Fiz. Nizk. Temp.* **42**, 230 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 176 (2016)].
4. Т.В. Чаговцев, *Physics B* **488**, 62 (2016).
5. Н. Yayama, Y. Nishimura, H. Ushiyama, H. Kawai, J.-P. van Woensel, and A.G. Hafes, *Fiz. Nizk. Temp.* **44**, 1386 (2018) [*Low Temp. Phys.* **44**, 1090 (2018)].
6. Т.В. Чаговцев, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 383 (2017).
7. L.A. Melnikovsky, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 559 (2007).
8. Э.А. Пашицкий, А.А. Гулин, *ЖЭТФ* **138**, 1103 (2010).
9. А.М. Косевич, *ФНТ* **31**, 1100 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 839 (2005)].
10. M.D. Tomchenko, *J. Low Temp. Phys.* **158**, 854 (2010).
11. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005) [*Low Temp. Phys.* **31**, 915 (2005)].
12. В.Д. Нацик, *ФНТ* **33**, 1319 (2007) [*Low Temp. Phys.* **33**, 999 (2007)].
13. S.I. Shevchenko and A.M. Konstantinov, *J. Low Temp. Phys.* **185**, 384 (2016).
14. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 748 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 596 (2010)].
15. А.С. Рукин, С.И. Шевченко, *ФНТ* **37**, 1107 (2011) [*Low Temp. Phys.* **37**, 884 (2011)].
16. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 46 (2009).
17. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **36**, 186 (2010) [*Low Temp. Phys.* **36**, 146 (2010)].
18. С.И. Шевченко, А.С. Рукин, *ФНТ* **38**, 1147 (2012) [*Low Temp. Phys.* **38**, 905 (2012)].
19. В.М. Локтев, М.Д. Томченко, *ФНТ* **34**, 337 (2008) [*Low Temp. Phys.* **34**, 262 (2008)].
20. M.D. Tomchenko, *Dokl. Nats. Akad. Nauk Ukr.* **1**, 64 (2010).
21. V.M. Loktev and M.D. Tomchenko, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **44**, 035006 (2011).
22. И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко, *ФНТ* **41**, 635 (2015) [*Low Temp. Phys.* **41**, 495 (2015)].
23. И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко, *ФНТ* **42**, 335 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 258 (2016)].
24. I.N. Adamenko and E.K. Nemchenko, *J. Low Temp. Phys.* **188**, 112 (2017).
25. И.Н. Адаменко, Е.К. Немченко, *ФНТ* **43**, 1295 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 1038 (2017)].
26. Е.Д. Гутлянский, *ФНТ* **35**, 956 (2009) [*Low Temp. Phys.* **35**, 748 (2009)].
27. M.D. Tomchenko, *Phys. Rev. B* **83**, 094512 (2011).
28. С.И. Шевченко, А.М. Константинов, *Письма в ЖЭТФ* **104**, 518 (2016).
29. S.I. Shevchenko and A.M. Konstantinov, *J. Low Temp. Phys.* **194**, 1 (2019).
30. Ю.М. Полуэктов, А.С. Рыбалко, *ФНТ* **39**, 992 (2013) [*Low Temp. Phys.* **39**, 770 (2013)].
31. W.H. Keesom, A.P. Keesom, and B.F. Saris, *Physica* **5**, 281 (1938).
32. С.И. Шевченко, А.М. Константинов, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 829 (2019).
33. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред, гл. 9*, Физматлит, Москва (2005).
34. Р.Н. Гуржи, С.И. Шевченко, *ЖЭТФ* **54**, 1613 (1968).
35. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, гл. 2, Физматлит, Москва (2001).
36. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
37. W.F. Vinen, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **240**, 114 (1957).
38. D.J. Melotte and C.F. Barenghi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4181 (1998).
39. S. Yui and M. Tsubota, *J. Phys., Conf. Ser.* **568**, 012028 (2014).
40. J.T. Tough, *Progr. Low Temp. Phys.* **8**, 133 (1982).
41. W.F. Vinen and J.J. Niemela, *J. Low Temp. Phys.* **128**, 167 (2002).
42. М.И. Каганов, И.Н. Адаменко, *ЖЭТФ* **53**, 615 (1967).
43. D.J. Bergman, *Phys. Rev.* **188**, 370 (1969).

Протитечієва теплопровідність та електрична активність надплинних систем у магнітному полі

С.І. Шевченко, О.М. Константинов

Показано, що потік тепла у надплинному гелії, який вміщено у магнітне поле, призводить до появи в навколишньому просторі електричного поля. Ефект обумовлено протитечієвою природою теплопровідності у надплинних системах: перенесення тепла в таких системах пов'язано з рухом нормальної компоненти, але середній потік маси, який переносить нормальна компонента, компенсується потоком маси, що переносить надплинна компонента. Локальний потік маси відрізняється від нуля. Ефект має місце при стаціонарному та нестаціонарному (другий звук) потоці тепла. Розглянуто особливості ефекту для ряду зразків з різною геометрією. Встановлено, що величина виникаючого електричного поля суттєво залежить від форми зразка з гелієм та напрямком магнітного поля.

Ключові слова: надпровідність, поляризація, термомагнітний ефект.

**Thermal counterflow and electrical activity
of superfluid systems in a magnetic field**

S.I. Shevchenko and A.M. Konstantinov

It is shown that the thermal counterflow in superfluid helium placed in a magnetic field leads to the appearance of an electric field in the surrounding space. The effect is due to the counterflow nature of thermal conductivity in superfluid systems: heat transfer in such systems is associated with the movement of the normal component, but the average mass flow carried by the

normal component is compensated by the mass flow carried by the superfluid component. The local mass flow is nonzero. The effect occurs for stationary and non-stationary (second sound) heat flow. The features of the effect for samples with different geometries are considered. It was established that the magnitude of the arising electric field substantially depends on the shape of the sample and the direction of the magnetic field.

Keywords: heat superconductivity, polarization, thermomagnetic effect.